

J.-Ph. Pérez

Relativité

Fondements et applications

Avec 150 exercices
et problèmes résolus

3^e édition

- ▶ Licence
- ▶ Classes préparatoires
- ▶ CAPES/Agrégation

RESSOURCES



NUMÉRIQUES

DUNOD

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 1999, 2005,
2011 pour le tirage corrigé, 2016
5 rue Laromiguière, 75005 Paris
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-075155-6

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Avant-propos	viii
Les grands noms de la relativité	x
Constantes physiques, notations et symboles	xvi
Description de l'ouvrage	xix
La relativité en vingt questions	xxii
1. Introduction. Principe de relativité	
I. — Relativité newtonienne	1
II. — Comportement singulier de la lumière	5
III. — Équations de Maxwell et transformation de Galilée	10
IV. — Principe de relativité de Poincaré-Einstein	14
Exercices et problèmes	17
2. Transformation de Lorentz-Poincaré. Intervalle entre deux événements	
I. — Transformation de Lorentz-Poincaré	21
II. — Intervalle entre deux événements	27
III. — Formalisme quadridimensionnel	31
Exercices et problèmes	36
3. Fondements de la cinématique einsteinienne	
I. — Mesure des durées et des longueurs	40
II. — Dilatation des durées	42
III. — Contraction des longueurs	51
IV. — Effet Doppler-Fizeau	56
Exercices et problèmes	64
4. Transformation einsteinienne des vitesses et des accélérations	
I. — Formules de transformation des vitesses	68
II. — Quadrivecteur vitesse	70
III. — Applications	72
IV. — Formules de transformation des accélérations	74
Exercices et problèmes	80

5. Dynamique et énergétique einsteiniennes. Énergie de masse

I. — Quadrivecteur énergie-quantité de mouvement	85
II. — Loi fondamentale de la dynamique einsteinienne	86
III. — Énergie cinétique, énergie de masse, énergie	89
IV. — Relation entre quantité de mouvement et énergie	94
V. — Problème de Kepler en relativité restreinte	96
VI. — Formules de transformation des forces	99
<i>Exercices et problèmes</i>	102

6. Électrodynamique des particules rapides

I. — Particule dans un champ électromagnétique	106
II. — Particule dans un champ électrique constant	108
III. — Particule dans un champ magnétique constant	112
IV. — Exemples d'accélérateurs de particules	116
V. — Spectrométrie corpusculaire	118
VI. — Cas de champs stationnaires non uniformes	123
<i>Exercices et problèmes</i>	128

7. Collisions de particules rapides

I. — Propriétés générales des collisions	136
II. — Référentiel du centre de masse	139
III. — Collisions élastiques	142
IV. — Collisions inélastiques	147
V. — Diffusion inélastique d'une particule par un atome	153
VI. — Collisions avec photons	154
<i>Exercices et problèmes</i>	162

8. Physique nucléaire et applications

I. — Le noyau	172
II. — Radioactivité	178
III. — Ralentissement des particules	188
IV. — Les particules fondamentales et leur détection	193
V. — Énergie de liaison d'une réaction nucléaire	198
<i>Exercices et problèmes</i>	209

9. Électromagnétisme et relativité

I. — Équations de Maxwell dans le vide	216
II. — Quadripotentiel électromagnétique	218
III. — Transformation einsteinienne des champs	222
IV. — Lagrangien et hamiltonien d'une particule rapide	231
<i>Exercices et problèmes</i>	234

10. Relativité générale

I. — Caractère singulier de la gravitation	239
II. — Invariance de la forme des lois de la physique	244
III. — Particule dans le voisinage d'une grosse masse	250
IV. — Décalage spectral d'origine gravitationnelle	260
V. — Cosmologie	264
<i>Exercices et problèmes</i>	279

Annexe 1. Systèmes d'unités 284

I. — Unités de base et unités dérivées	284
II. — Le Système International en 2016	286
III. — Différents systèmes d'unités électriques	287

Annexe 2. Tenseurs 292

I. — Différents tenseurs en physique	292
II. — Concept de tenseur	294
III. — Champ de vecteur sur une variété	294
IV. — Produit scalaire de deux vecteurs	298
V. — Dérivée covariante d'un vecteur en un point	300
VI. — Géodésiques sur une variété	302

Annexe 3. Simulation en relativité 305

I. — Structures de données et fonctions de base	305
II. — Quadrivecteurs et transformation de Lorentz	307
III. — Émission de particules par un objet en mouvement	310
IV. — Particule dans un champ magnétique stationnaire	317
V. — Action de champs électrique et magnétique	325

Réponses aux vingt questions 332**Solutions des exercices et problèmes** 335**Bibliographie** 431**Index** 434

Avant-propos

Contrairement aux idées reçues, propagées par des sentences comme « tout est relatif », le principe de la relativité est plus lié à l'invariance qu'au relativisme de toute chose.

Dictionnaire culturel « Le Robert », 2005

Ce cours, intitulé « Relativité », correspond globalement au programme traité en licence troisième année, à l'Université Paul Sabatier de Toulouse, pendant un semestre de douze semaines, à raison d'une heure de cours et d'une heure de travaux dirigés par semaine.

C'est un cours introductif qui s'adresse à de jeunes étudiants dont les connaissances en mathématiques, en mécanique et en optique, bien que modestes, suffisent pour comprendre les fondements et les implications physiques de cette théorie.

Nous avons volontairement réduit le formalisme à sa plus simple expression, considérant que ce dernier privilégiait une présentation abstraite, voire mystique de la relativité. Au contraire, nous avons voulu bâtir notre exposé, de façon rationnelle et concrète, en nous appuyant sur l'expérimentation et les limites physiques des hypothèses newtoniennes. La signature $+ - - -$ caractérisant le carré de l'intervalle espace-temps a été délibérément choisie, afin de privilégier la durée, laquelle, invariante en relativité galiléenne, est remplacée, en relativité einsteinienne, par la durée propre ou par l'intervalle qui est son équivalent spatial par multiplication par la constante d'Einstein c .

Il n'est probablement pas inutile de rappeler que, comme son nom ne l'indique pas, la théorie de la relativité n'est pas l'expression scientifique d'un quelconque relativisme philosophique : elle est donc très mal résumée par l'expression « Tout est relatif ». Au contraire, les relativités newtonienne, restreinte et générale peuvent être considérées comme les recherches fructueuses de concepts universels, c'est-à-dire invariants par changement de référentiel.

Le cours est divisé en dix leçons :

i) La première concerne l'extension du principe newtonien de relativité aux phénomènes électromagnétiques, avec les expériences décisives de Fizeau et Michelson.

ii) Dans les leçons 2, 3 et 4, on développe toute la cinématique einsteinienne, en introduisant notamment le formalisme quadridimensionnel, mais sans omettre d'analyser ce qui est parfois présenté sous forme de paradoxes : les « jumeaux de Langevin », pour la dilatation des durées, et la barre en mouvement cependant contenue dans une ouverture plus courte, pour la contraction des longueurs.

iii) Les leçons 5, 6, 7, 8, qui concernent la dynamique et l'énergétique des particules, sont essentielles, puisqu'elles permettent d'introduire et de valider, par de multiples applications physiques (particules dans un champ électromagnétique et collisions), la loi fondamentale de la dynamique einsteinienne, ainsi que le concept d'énergie de masse.

iv) Les deux dernières leçons, 9 et 10, sont des extensions qui, en général, ne figurent pas dans les programmes d'enseignement de licence. L'avant-dernière « Électromagnétisme et relativité » permet de présenter l'électromagnétisme classique sous une forme synthétique très enrichissante. Dans la dernière, « Relativité générale », on donne un aperçu physique significatif de cette théorie et de son rôle majeur en cosmologie.

L'ouvrage s'adresse d'abord aux étudiants des licences de physique. Aussi les leçons sont-elles quasi autonomes, les exemples nombreux et les 150 exercices et problèmes accompagnés de leurs solutions, ce qui témoigne de notre volonté de communiquer à la fois un savoir-culturel et un savoir-faire utile pour préparer les divers examens et concours. En outre, dans l'annexe 3, intitulée « Simulation en relativité », on propose d'utiliser les possibilités qu'offre le langage Matlab pour résoudre quelques problèmes concrets, tels que l'anisotropie de l'émission de particules par des noyaux en mouvement ou la focalisation de particules chargées dans des spectromètres.

Comme il s'agit avant tout d'un ouvrage d'enseignement, nous avons systématiquement utilisé le système d'unités international et adopté les notations recommandées par l'AFNOR, abandonnant ainsi le « régionalisme » des notations de spécialistes. Dans ce contexte, nous avons adopté les unités standard, en évitant notamment la valeur unité pour la constante d'Einstein c , ce qui est précieux dans l'analyse dimensionnelle.

En raison de son découpage en leçons structurées, de son aspect peu technique, de l'accent mis sur le développement des idées et de la présence de thèmes physiques tels que « Électromagnétisme et relativité », et « Relativité générale », ce livre devrait intéresser aussi les candidats aux concours de recrutement de l'enseignement (CAPES et agrégations).

Plus largement, l'ouvrage est destiné à tous ceux qui s'intéressent à la théorie de la relativité, afin d'en comprendre la signification profonde et ainsi en écarter tout aspect mystérieux : pour être attractive, la théorie de la relativité n'a nul besoin de véhiculer une pensée magique ; son esthétique, sa capacité explicative et son pouvoir créatif suffisent.

Les étudiants de licence de l'Université Paul Sabatier, ainsi que ceux qui préparent l'agrégation de physique, m'ont beaucoup aidé par leurs questions et leurs exigences pédagogiques. Aussi figurent-ils en bonne place parmi tous ceux, notamment collègues de recherche ou d'enseignement, que je remercie pour leurs remarques et commentaires constructifs.

Mises à part quelques corrections typographiques ou pédagogiques, cette troisième édition diffère des précédentes principalement sur la leçon 10 dans laquelle la section « cosmologie » a été actualisée et développée en s'appuyant sur la nouvelle annexe 2 sur les tenseurs. L'ancienne annexe 1, « Rappels mathématiques », a été jugée inutile car déjà présente dans les autres ouvrages de la collection, et remplacée par une nouvelle annexe sur les systèmes d'unités en raison des modifications profondes que subira certainement dès 2018 le système international actuel.

Les grands noms de la relativité

François Arago

Astronome et opticien français, né à Estagel, dans le Roussillon, en 1786, et mort à Paris en 1853. Polytechnicien, il est nommé à 23 ans professeur à l'École Polytechnique, succédant ainsi à G. Monge, afin d'y enseigner la géodésie. Il oriente ses travaux de recherche vers l'optique, notamment dans le but d'améliorer la précision des observations en astronomie. Il s'intéresse alors à la nature ondulatoire et polarisée de la lumière ; dans ce contexte, il découvre la polarisation rotatoire du quartz, ainsi que les conditions d'obtention des franges d'interférence en lumière polarisée. Très influent, il entreprend une carrière politique qui le conduit à rédiger le décret d'abolition de l'esclavage dans les colonies françaises.

Henri Becquerel

Physicien français, né à Paris en 1852 et mort à Le Croisic en 1908. Polytechnicien, puis professeur à l'École Polytechnique, il découvre en 1896, sur des sels d'uranium, trois mois après la mise en évidence des rayons X par W. Röntgen, la radioactivité bêta moins du thorium 234, c'est-à-dire l'émission d'électrons par des noyaux. Ses travaux sur la radioactivité sont récompensés en 1903 par le prix Nobel qu'il partage avec P. et M. Curie.

Hans Bethe

Physicien américain, d'origine allemande, né à Strasbourg (ville allemande à cette époque) en 1906, et mort à Ithaca (état de New-York) en mars 2005. Après des études à Munich, Bethe prépare une thèse sous la direction de Sommerfeld, puis devient professeur à l'Université de Munich d'abord puis à celle de Tübingen. En 1933, après l'arrivée d'Hitler, il est démis de ses fonctions, en raison de ses origines juives. Il s'installe aux États-Unis en 1935, précisément à Ithaca, à l'Université Cornell où il enseigne la physique. Il devient célèbre en 1938 en décrivant le cycle du carbone dans les étoiles et en détaillant les réactions nucléaires de fusion qui sont à l'origine du rayonnement intense qu'elles émettent. En 1943, il dirige le groupe de physique théorique dans le projet Manhattan chargé de développer les premières bombes par fission nucléaire. Il reste cependant un adversaire du développement des armes nucléaires en s'opposant notamment au projet américain de guerre des étoiles. Il reçoit en 1967 le prix Nobel de physique pour l'ensemble de ses travaux. À partir de 1975, il s'intéresse à l'astrophysique et publie quelques contributions remarquables sur les supernovae.

Arthur Compton

Physicien américain, né à Wooster (Ohio) en 1892 et mort à Berkeley en 1962. Il rend parfaitement compte de la diffusion des rayons X par le graphite en interprétant ce phénomène comme une collision entre un photon incident et un électron libre du matériau. Cette contribution, publiée en 1923, lui valut le prix Nobel en 1927.

Marie Curie

Physicienne et chimiste française, née à Varsovie (Pologne) en 1867 et morte à Sallanches (Haute Savoie) en 1934). À 24 ans, Marya Skłodowska quitte sa ville natale pour se rendre à Paris afin d'y effectuer des études scientifiques. Excellente étudiante à la Sorbonne, elle est reçue première à l'agrégation de physique en 1896. Elle est ensuite accueillie à l'École de Physique et Chimie de Paris, où elle étudie le nouveau rayonnement bêta découvert par H. Becquerel. Avec l'aide de son mari P. Curie, enseignant et chercheur dans cette École, elle identifie le radium et le polonium. En 1903, elle passe sa thèse, puis reçoit le prix Nobel de physique qu'elle partage avec son mari et Becquerel. Après la mort accidentelle de P. Curie, elle lui succède comme professeur à la Sorbonne. En 1911, elle reçoit un second prix Nobel, celui de chimie, pour avoir déterminé la masse molaire du radium. Curieusement, l'Académie des Sciences ne l'a jamais admise en son sein. Pendant la Première Guerre mondiale, elle crée un service de radiologie aux armées. Elle meurt en 1934 des suites d'une leucémie contractée précisément par une trop grande exposition aux rayons X et au rayonnement bêta.

Paul Dirac

Physicien anglais, né à Bristol en 1902 et mort à Tallahassee en 1984. Grâce à des qualités exceptionnelles en mathématiques, il imagine un formalisme permettant de concilier l'approche ondulatoire de Schrödinger et la démarche matricielle d'Heisenberg, ce qui lui vaut d'obtenir en 1932 la célèbre chaire qu'occupa Newton à Cambridge. Sa contribution la plus importante, intitulée « L'équation d'onde relativiste de l'électron », a été publiée en 1928. Cette théorie prédit non seulement le spin de l'électron, mais aussi l'existence du positron. Il reçut le prix Nobel de physique en 1933, la même année que Schrödinger.

Albert Einstein

Physicien allemand, naturalisé suisse puis américain, né à Ulm (Allemagne) en 1879 et mort à Princeton (USA) en 1955. Il est considéré, avec Newton, comme le plus grand physicien de tous les temps. Cependant ses qualités exceptionnelles ne furent remarquées ni au collège ni à l'université. En optique, ses contributions sont l'interprétation de l'effet photo-électrique, pour laquelle il reçoit le prix Nobel en 1921, celle de l'expérience de Michelson et Morley par extension du principe de relativité et celle de l'émission stimulée en 1917. Il est surtout connu pour la théorie de la relativité restreinte qu'il publie en 1905, et qu'il complète en 1915, en prenant en compte le caractère singulier de la gravitation. Son influence en cosmologie est considérable. Celle en physique statistique aussi, notamment avec la condensation dite d'Einstein-Bose.

Hippolyte Fizeau

Opticien français, né à Paris en 1819 et mort à La Ferté-sous-Jouarre en 1896. Il fut le premier à mesurer la vitesse de la lumière par une expérience de laboratoire. Il montra expérimentalement, dès 1850, que la composition des vitesses, appliquée à la lumière se propageant dans un milieu liquide en mouvement, n'était pas de nature newtonienne. En outre, il découvrit la possibilité de mesurer le diamètre des étoiles à partir de méthodes interférométriques (synthèse d'ouverture). Enfin, il étendit, à l'optique, l'effet découvert en acoustique par Doppler, c'est-à-dire le décalage de fréquence mesuré par un observateur en mouvement par rapport à une source lumineuse.

Augustin Fresnel

Opticien français, né à Broglie (Eure) en 1788 et mort à Ville d'Avray (région parisienne) en 1827. Il reprend les expériences d'Young (cf. *Optique*), les étend et propose, avec le physicien français François Arago, l'interprétation ondulatoire de la lumière. Il étudie également la diffraction à distance finie, ainsi que la propagation de la lumière dans les milieux cristallins. Il présente un mémoire complet sur ce dernier sujet à l'Académie des Sciences en 1823.

Galileo Galilei dit Galilée

Astronome et physicien italien, né à Pise en 1564 et mort à Arcetri (près de Florence) en 1642. Il est considéré comme le précurseur de la science moderne, d'une part en utilisant les mathématiques pour décrire les lois de la physique, d'autre part en testant la validité de ces lois par l'expérimentation. Ses principales contributions en astronomie sont l'observation de la surface de la Lune et la découverte des satellites de Jupiter à l'aide d'instruments d'optique qu'il met lui-même au point. L'ensemble est publié en 1610 dans « Le messager des étoiles ». Cependant, c'est sa contribution en mécanique qui est la plus célèbre. En étudiant le mouvement des corps, il découvre les lois de la chute libre, notamment l'indépendance de la masse lorsque la résistance de l'air est négligée, l'isochronisme des petites oscillations d'un pendule ; il perçoit aussi le principe de l'inertie et se rallie aux idées héliocentriques de Copernic. Il publie alors le « Dialogue sur les deux principaux systèmes du monde » en 1632, ce qui lui vaut la condamnation de l'Inquisition en raison de sa vision copernicienne du Monde (mobilité de la Terre). C'est à la fin de ce procès qu'il aurait prononcé la fameuse phrase « eppur si muove. »

George Gamow

Physicien et astrophysicien américain d'origine russe, né à Odessa en 1904 et mort à Boulder dans le Colorado en 1968. Après des études à Leningrad, à Copenhague avec N. Bohr et à Cambridge avec E. Rutherford, il obtient une charge d'enseignement en URSS. En 1928, il interprète la radioactivité α à l'aide de la physique quantique, précisément l'effet tunnel. Il montre notamment qu'il est possible qu'un proton-projectile peut pénétrer dans un noyau et ainsi en modifier la constitution, ce qui est à la base de la transmutation nucléaire, réalisée pour la première fois par J. Cockroft et E. Walton. En récompensant ces derniers en 1951, le jury Nobel oublia de l'inclure dans le prix. En 1939, il s'installe aux USA et prend la nationalité américaine. Il fut le premier en 1948 à prévoir, avec deux collaborateurs, Alpher et Hermann, le rayonnement radio fossile, lequel fut découvert par hasard en 1965 par Penzias et Wilson.

Gamow fut aussi connu pour ses travaux de vulgarisateur scientifique dans lesquels se sont exprimés, outre ses grandes compétences, son style alerte et son humour.

William Rowan Hamilton

Mathématicien et physicien irlandais, né en 1806 à Dublin et mort en 1865 près de Dublin. Enfant prodige puis étudiant génial, il impressionne, à 22 ans, l'Académie Royale d'Irlande en présentant un exposé moderne sur la théorie des rayons lumineux. Ce travail est le point de départ d'une contribution capitale en dynamique qui s'achèvera en 1833 sur une remarquable analogie entre l'optique et la mécanique. Cette synthèse débouchera sur la relation de L. de Broglie et sur l'équation de Schrödinger en mécanique ondulatoire.

Edwin Hubble

Astrophysicien américain, né à Marshfield dans le Missouri en 1889 et mort à San Marino en Californie en 1953. À la suite d'une récompense universitaire, il interrompt en 1910 une carrière prometteuse de boxeur (!) pour suivre des études de droit (!) à Oxford, en Angleterre. Il rentre ensuite aux USA, s'installe comme avocat dans le Kentucky, puis abandonne cette activité en 1914 pour reprendre des études spécialisées en astronomie sous la direction de G. Hale. Ses observations à l'Observatoire de Yerkes (à Chicago), au Mont Wilson (Californie) en 1919, après deux ans d'arrêt pour participation à la Première Guerre mondiale, le conduisent à la mise en évidence de galaxies situées en dehors de la Voie Lactée. En découvrant les étoiles variables, les Céphéides, il peut déterminer de façon précise la distance d'objets célestes et établir la loi expérimentale de proportionnalité entre le décalage spectral cosmologique et leur distance à la Terre. Interprétant cette loi comme un effet Doppler-Fizeau, il conforte l'hypothèse de l'expansion de l'Univers. Après une participation à la Deuxième Guerre mondiale en Europe, il supervise en 1948 la réalisation et la mise au point du télescope deux mètres du Mont Palomar en Californie.

Georges Lemaître

Astrophysicien belge, né à Charleroi en 1894 et mort à Louvain en 1966. Après des études d'ingénieur des mines à Louvain, qu'il interrompt en 1914, en raison de la guerre mondiale, et qu'il reprend en 1918, il s'oriente vers les mathématiques qu'il abandonne pour la physique. Une bourse lui permet de suivre des cours d'astrophysique à Cambridge (USA), puis au MIT (USA) où il soutient sa thèse en 1926. De retour en Belgique, il enseigne à l'université de Louvain, tout en poursuivant une carrière de prêtre. Il est le premier physicien à avoir émis l'hypothèse d'un Univers en expansion en 1927, mais sa publication en français passe inaperçue. Pire, traduite en 1931 par l'astrophysicien britannique A. Eddington, elle est entamée de l'information essentielle sur l'expansion ! En 1951, il s'oppose au pape Pie XII qui tente de récupérer ce phénomène pour justifier la genèse. En 1962, il s'oppose aussi à l'éviction des Wallons de l'Université catholique de Louvain.

Hendrik Antoon Lorentz

Physicien néerlandais, né à Arnhem en 1853 et mort à Haarlem en 1928. Il devint en 1878 titulaire de la chaire de physique théorique à l'Université de Leyde. Ses contributions importantes concernent

l'électromagnétisme des milieux matériels, et notamment l'influence d'un champ magnétique sur le rayonnement lumineux émis par les atomes, ce qui lui vaut le prix Nobel en 1902, prix qu'il partage avec son élève P. Zeeman. Il est surtout connu pour les formules de transformation de la relativité restreinte qui respectent l'invariance de toutes les équations de Maxwell par changement de référentiel galiléen.

James Clerk Maxwell

Physicien britannique, né à Edimbourg (Écosse) en 1831 et mort à Cambridge en 1879. En 1857, il publie un article sur la constitution probable des anneaux de Saturne, ce qui le fait connaître de la communauté scientifique et l'incite à s'intéresser aux systèmes constitués d'un grand nombre de particules. Il établit alors les principaux résultats de la théorie cinétique des gaz. C'est ensuite comme professeur d'université au King's College de Londres qu'il travaille sur l'électromagnétisme, chez lui (!), assisté par son épouse. Sa contribution décisive sur les équations de l'électromagnétisme date de 1876. Enfin, il est nommé à Cambridge pour diriger la construction du célèbre « Cavendish Laboratory ».

Albert Michelson

Physicien américain d'origine polonaise, né à Strelno en 1852 et mort à Pasadena (Californie) en 1931. Expérimentateur de génie, il construit un interféromètre, devenu désormais célèbre, pour mettre en évidence de très faibles chemins optiques, ce qui permet d'établir expérimentalement l'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide, malgré ses propres convictions antirelativistes. Il reçoit le prix Nobel en 1907 pour cette contribution qu'il publia seul en 1881 ; avec Morley, il en fournit une version plus précise en 1887. Il développa en outre la technique de synthèse d'ouverture imaginée par Fizeau pour déterminer le diamètre apparent des étoiles par des méthodes interférométriques.

Hermann Minkowski

Mathématicien allemand, né à Kovno (Lituanie) en 1864 et mort à Göttingen en 1909. Après ses études à l'Université de Königsberg et une thèse qu'il présente en 1885, il exerce les fonctions de professeur, notamment à l'École Polytechnique de Zurich. C'est là qu'il rencontre son élève Einstein. Il est à l'origine de l'utilisation du formalisme quadridimensionnel pour exprimer le concept d'espace-temps en relativité.

Isaac Newton

Mathématicien, astronome et physicien anglais, né à Woolsthorpe en 1642 et mort à Kensington en 1727. Il est considéré, avec Einstein, comme l'un des plus grands physiciens de tous les temps. Curieusement et comme ce dernier, il fut un élève qui ne révéla au collège aucune capacité exceptionnelle. C'est à Cambridge que l'on remarqua ses grandes possibilités. Plus influencé par Descartes que par Aristote, il publie en 1687 une synthèse magistrale de la mécanique, « Principia mathematica » ; il y énonce les fondements de la dynamique et relie, en introduisant la loi de la gravitation universelle, le mouvement des planètes et la chute des corps. En optique, il s'opposa à C. Huygens et R. Hooke, adeptes d'une théorie ondulatoire de la lumière. Cependant, sa contribution faite dans « Opticks » est, elle aussi, ex-

ceptionnelle : il interprète la décomposition spectrale de la lumière à partir d'expériences conçues avec des prismes et montre que la couleur blanche est un mélange des différentes couleurs spectrales ; il explique aussi la formation des images par des miroirs, et suggère même la possibilité d'échanges entre lumière et matière.

Henri Poincaré

Mathématicien et physicien français, né à Nancy en 1854 et mort à Paris en 1912. Après des études à l'École Polytechnique et un diplôme d'ingénieur au corps des Mines, il passe une thèse en mathématiques en 1879. Deux ans après, il est nommé professeur à la Sorbonne. À 33 ans, il entre à l'Académie des Sciences. Sa contribution en mathématiques est considérable et fortement inspirée par la physique. Aussi ses apports à l'électromagnétisme et à la mécanique sont-ils considérés comme majeurs. Il a ainsi joué un rôle essentiel dans la recherche d'un groupe de transformation compatible avec l'invariance des équations de Maxwell et dans l'introduction des concepts relativistes développés par Einstein ; il est actuellement établi qu'il fut le premier à étendre le principe de relativité newtonien aux phénomènes électromagnétiques. En outre, sa contribution sur les équations différentielles, issues de la physique, en a fait le fondateur de la théorie des systèmes dynamiques à comportement chaotique.

Ernest Rutherford

Physicien britannique, né à Brightwater, près de Nelson, en Nouvelle Zélande en 1871 et mort à Cambridge en 1937. Même si très jeune, en classe, il excellait sur tous les sujets, Rutherford fut intéressé surtout par les sciences et les mathématiques, au point de construire chez lui, pendant sa scolarité, un appareil lui permettant d'étudier la propagation des ondes électromagnétiques. Boursier, il poursuit ses études en Angleterre, à Cambridge, où il devint l'élève de J.J. Thomson, celui qui détermina pour la première fois le rapport e/m_e pour l'électron. Il fut successivement professeur à Montréal, à Manchester, puis à Cambridge en 1909, et prit la direction du Laboratoire Cavendish en 1919. Il est surtout connu pour ses travaux sur la radioactivité, notamment l'étude des rayons α , qu'il identifie à des noyaux d'hélium, et de leur diffusion, ce qui lui permet d'établir le modèle de la structure atomique, dans lequel une charge positive est concentrée au centre, le noyau, et une charge négative est répartie autour. En 1920, au cours d'une conférence, il prévoit l'existence d'une particule, de masse égale à celle du proton, mais de charge nulle ; cette particule sera découverte dans son laboratoire par James Chadwick en 1932 et appelée neutron par ce dernier. Curieusement, il reçut, en 1908, le prix Nobel de chimie mais pas celui de physique.

Constantes physiques, notations et symboles

Constantes physiques

Constante de gravitation ou constante de Newton :	$G = 6,674\,28(67) \times 10^{-11} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$
Constante d'Einstein (valeur exacte) :	$c = 2,997\,924\,580 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
Charge élémentaire :	$e = 1,602\,176\,487(40) \times 10^{-19} \text{ C}$
$q_e^2 = e^2 / (4\pi\epsilon_0) :$	$q_e^2 \approx 230,708 \times 10^{-30} \text{ SI}$
Masse de l'électron :	$m_e = 9,109\,382\,15(45) \times 10^{-31} \text{ kg}$ $m_e c^2 \approx 0,511 \text{ MeV}$
Masse du proton :	$m_p = 1,672\,621\,637(83) \times 10^{-27} \text{ kg}$ $m_p c^2 \approx 938,27 \text{ MeV}$
Constante de Planck :	$h = 6,626\,068\,96(33) \times 10^{-34} \text{ J.s}$
Constante de Planck divisée par 2π :	$\hbar = 1,054\,571\,628(53) \times 10^{-34} \text{ J.s}$
Nombre d'Avogadro :	$N_A = 6,022\,141\,79(20) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann :	$k_B = 1,380\,650\,4(24) \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
Constante des gaz parfaits :	$R = N_A k_B = 8,314\,472\,(15) \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$
Constante de Faraday :	$F = N_A e = 96\,485,339\,9(24) \text{ C.mol}^{-1}$
Constante de structure fine :	$\alpha_e = q_e^2 / \hbar c$ $= 7,297\,352\,537\,6(50) \times 10^{-3} \approx 1/137,036$
Longueur d'onde de Compton relative à l'électron :	$\lambda_C = 2,426\,310\,217\,5(33) \times 10^{-12} \text{ m}$
Unité de masse atomique :	$u = 1,660\,4 \times 10^{-27} \text{ kg} = 931,5 \text{ MeV.c}^{-2}$

Les valeurs de ces constantes fondamentales sont celles actualisées en 2006 (<http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html>). La valeur de la constante de Newton doit se lire :

$$G = 6,674\,28(67) \pm 0,000\,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$$

Notations et symboles

$\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$

$x, y, z ; x', y', z'$

$\mathbf{v}, \mathbf{a}$

$\mathbf{v}', \mathbf{a}'$

référentiels (repères d'espace et de temps)

composantes cartésiennes du vecteur position dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$

vecteurs vitesse et accélération d'une particule par rapport à $\mathcal{R}$

vecteurs vitesse et accélération d'une particule par rapport à $\mathcal{R}'$

$\mathbf{v}_e$	vitesse d'entraînement de $\mathcal{R}'$ en translation par rapport à $\mathcal{R}$
$4\text{-}x$ (ct, x, y, z)	quadrivecteur espace-temps
$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$	carré de l'intervalle élémentaire entre deux événements
$\ 4\text{-}x\ ^2$	carré de la pseudo-norme de $4\text{-}x$: $c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$
$d\tau = ds/c$	durée propre élémentaire
m	masse d'une particule
M	masse d'un système de particules
$\beta_e = v_e/c$	rapport de la vitesse de translation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ sur c
$\gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2}$	facteur relativiste associé à v_e
$\beta = v/c$	rapport de la vitesse quelconque d'une particule sur c
$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$	facteur relativiste associé à la vitesse v quelconque d'une particule
$4\text{-}v$ ($\gamma c, \gamma \mathbf{v}$)	quadrivecteur vitesse
$4\text{-}a$	quadrivecteur accélération
$4\text{-}k$ ($\omega/c, \mathbf{k}$)	quadrivecteur d'onde
$4\text{-}p$ ($\gamma mc, \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$)	quadrivecteur énergie-quantité de mouvement
$\mathbf{L}$	moment cinétique
$\mathcal{E}_k = (\gamma - 1)mc^2$	énergie cinétique d'une particule
$\mathcal{E}_0 = mc^2$	énergie de masse d'une particule
$\mathcal{E}_p$	énergie potentielle
$\mathcal{E}$	énergie d'une particule libre
$\mathcal{E}_t$	énergie totale d'une particule dans un potentiel
$4\text{-}f$ ($\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}/c, \gamma \mathbf{F}$)	quadrivecteur force
$\mathcal{R}^*$	référentiel du centre de masse
$\mathbf{E}, V$	champ et potentiel scalaires électriques
$\mathbf{B}, \mathbf{A}$	champ et potentiel vecteur magnétiques
$\omega_c = qB/(\gamma m)$	pulsation cyclotron d'une particule en dynamique einsteinienne
$\mathbf{P} = \mathbf{p} + q\mathbf{A}$	impulsion d'une particule ou moment linéaire
$\mathcal{L}, \mathcal{H}$	lagrangien, hamiltonien
$4\text{-}J$ ($\rho c, \mathbf{J}$)	quadrivecteur source du champ électromagnétique
$4\text{-}A$ ($V/c, \mathbf{A}$)	quadrivecteur potentiel
$4\text{-}\nabla$ ($\partial/\partial ct, -\nabla$)	quadriopérateur nabla
$\square = \partial^2/c^2 \partial^2 t^2 - \nabla^2$	dalembertien
H	coefficient de Hubble
z	décalage spectral relatif
Λ	constante cosmologique
Gan	giga-année (milliard d'années, 1 Gan = $3,155\,76 \times 10^{16}$ s)

Alphabet grec

alpha	A	α	êta	H	η	nu	N	ν	tau	T	τ
bêta	B	β	thêta	Θ	θ	xi	Ξ	ξ	upsilon	Y	υ
gamma	Γ	γ	iota	I	ι	omicron	O	o	phi	Φ	ϕ
delta	Δ	δ	kappa	K	κ	pi	Π	π	khi	X	χ
epsilon	E	ϵ	lambda	Λ	λ	rhô	P	ρ	psi	Ψ	ψ
zêta	Z	ζ	mu	M	μ	sigma	Σ	σ	oméga	Ω	ω

milli (m) = 10^{-3}

micro(μ) = 10^{-6}

nano (n) = 10^{-9}

pico (p) = 10^{-12}

kilo (k) = 10^3

méga (M) = 10^6

giga (G) = 10^9

téra (T) = 10^{12}

péta (P) = 10^{15}

Description de l'ouvrage

L'ouvrage « Relativité » est découpé en dix leçons dont les trois dernières sont des compléments succints de physique nucléaire, d'électromagnétisme et de gravitation. Le déroulement de ce cours, qui s'adresse à des étudiants de licence 2 ou 3, est le suivant :

Leçons 1 à 5 : Introduction, Transformation de Lorentz-Poincaré, Intervalle entre deux événements, Dilatation des durées, Contraction des longueurs, Effet Doppler-Fizeau, Composition des vitesses, Loi fondamentale de la dynamique einsteinienne, quadrivecteur énergie-quantité de mouvement, énergie cinétique et énergie de masse.

Leçons 6 à 7 : Mouvement de particules chargées dans des champs électriques et magnétiques, Collisions élastiques et inélastiques entre particules.

Leçons 8 à 10 : Physique nucléaire, Électromagnétisme et Relativité Générale.

Les leçons 1, 2, 3, 4 et 5 tiennent un rôle central, car elles contiennent les éléments indispensables (définitions, lois et principes) à l'étude des leçons qui suivent. Même si ces dernières sont présentées dans un certain ordre, on peut les aborder dans un ordre quelconque, selon l'intérêt du moment ; en effet, toutes les leçons sont présentées de façon quasi autonome et le renvoi à des formules éloignées est pratiquement inexistant.

Méthode de travail

Lecture des leçons

Dans une phase initiale, une leçon doit être lue une première fois, en insistant sur l'introduction, laquelle situe la leçon dans le cours, et sur la conclusion qui répertorie l'ensemble des résultats essentiels.

Dans une deuxième phase, l'étudiant doit refaire avec soin tous les calculs intermédiaires.

Enfin, une dernière lecture devrait permettre d'appréhender complètement la leçon, notamment les résultats essentiels, les exemples significatifs et les ordres de grandeur.

Exercices et problèmes

La lecture de la leçon achevée, l'étudiant doit passer à la phase d'application en faisant des exercices simples et courts, directement liés au contenu de la leçon ; il doit essayer de les résoudre avec le seul support que constitue le cours. En cas de difficultés, un coup d'œil rapide sur la solution, proposée en fin d'ouvrage, devrait l'aider. Il faut cependant éviter la simple lecture de la solution proposée et la mémorisation de la démonstration : mieux vaut revenir sur la leçon pour résoudre l'exercice. En cas de difficulté majeure, lire la solution et tenter de la refaire, sans aucune aide, un ou deux jours plus tard.

Une fois ces exercices rédigés, tenter de résoudre des problèmes d'examens et concours, généralement plus longs.

Révision

Pour réviser, une ultime lecture devrait conforter l'apprentissage. Ne pas hésiter à souligner au crayon les parties essentielles et à porter en marge des remarques personnelles suggérées par la lecture d'autres ouvrages ou de documents annexes, tels que des revues à grand public (La Recherche, Pour la Science, Ciel et Espace, Science et Vie, etc.).

Comment résoudre un problème de relativité ?

La pratique pédagogique de l'enseignement de relativité nous conduit à souligner préalablement quelques points essentiels en cinématique et en dynamique einsteiniennes.

Cinématique

C'est la partie la plus délicate, car non intuitive. On la résout correctement si l'on suit les règles suivantes, même lorsque le texte du problème n'invite pas à le faire.

1) On s'astreint à écrire systématiquement les coordonnées des différents événements considérés. On change de référentiel en appliquant la transformation de Lorentz-Poincaré.

2) On écrit cette dernière transformation sous sa forme canonique, dans laquelle toutes les variables sont homogènes à une longueur (ct au lieu de t).

3) On identifie le référentiel propre pour les durées (référentiel par rapport auquel les deux événements sont localisés au même point) et pour les longueurs (référentiel par rapport auquel la tige dont on mesure la longueur est fixe).

4) On introduit le quadrivecteur vitesse et le quadrivecteur d'onde, lesquels se transforment comme les coordonnées spatio-temporelles.

5) On distingue soigneusement les trois facteurs relativistes : γ_e associé à la vitesse d'entraînement $\mathbf{v}_e$ de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$, γ fonction de la vitesse $\mathbf{v}$ de la particule par rapport à $\mathcal{R}$ et γ' dépendant de la vitesse de cette même particule par rapport à $\mathcal{R}'$.

6) Enfin, on vérifie l'analyse par le test d'invariance de l'intervalle entre deux événements, lequel remplace le temps newtonien qui, en relativité, n'est plus universel.

Dynamique et énergétique

C'est la partie la moins délicate et la plus riche sur le plan des applications : particules chargées dans des champs, électrique et magnétique, collisions élastiques ou inélastiques. Les précautions à prendre sont les suivantes.

1) Les théorèmes à appliquer sont analogues à ceux de la mécanique newtonienne, avec des expressions évidemment plus riches de la quantité de mouvement et de l'énergie $\mathcal{E}$ d'une particule libre :

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_k = (\gamma - 1)mc^2 \quad \text{avec} \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

au lieu de $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ et $\mathcal{E}_k = mv^2/2$.

2) La quantité $\mathcal{E}_0 = mc^2$, concept nouveau appelé énergie de masse, est reliée à la quantité de mouvement $\mathbf{p}$ et à son énergie $\mathcal{E}$ de particule libre par la relation générale :

$$\mathcal{E}^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 = \mathcal{E}_0^2$$

3) Dans l'application de la loi fondamentale de la dynamique, il est préférable de privilégier le concept de quantité de mouvement. Techniquement, cela revient à obtenir d'abord la quantité de mouvement par intégration puis à en déduire la vitesse par la relation :

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} = \frac{\mathbf{p}c^2}{\mathcal{E}} = \frac{\mathbf{p}c^2}{(p^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2}}$$

4) Pour toute collision, élastique ou inélastique, la quantité de mouvement totale et l'énergie totale se conservent. Dans le premier cas, cette dernière conservation implique celle de l'énergie cinétique. Comme en mécanique newtonienne, le référentiel du centre de masse est commode pour établir des propriétés caractéristiques ou pour déterminer des seuils énergétiques.

Simulation

Le recours à la simulation numérique est particulièrement utile dans l'étude du mouvement de particules chargées rapides dans des champs non uniformes, et surtout dans le tracé de faisceaux de particules.

Quelle est l'interprétation des résultats obtenus ?

Cette dernière phase est capitale, car elle permet d'apprécier la nature physique des résultats obtenus et donc de revenir sur des erreurs de calcul ou de programmation malheureuses. Dans la plupart des applications numériques, il est judicieux d'utiliser le MeV pour l'énergie, le $\text{MeV} \cdot c^{-1}$ pour la quantité de mouvement et le $\text{MeV} \cdot c^{-2}$ pour la masse.

La relativité en vingt questions

1. *Pourquoi* dit-on parfois que la relativité est une théorie mal nommée ?
2. On lit souvent la phrase suivante : « Les quatre équations de Maxwell ne sont pas invariantes par transformation de Galilée ». *Pourquoi* une telle affirmation n'est-elle que partiellement correcte ?
3. *Pourquoi*, malgré certaines analogies, les ondes électromagnétiques sont-elles fondamentalement différentes des ondes acoustiques ?
4. On lit souvent, dans des textes relativistes, pas nécessairement destinés au grand public, que les intervalles temporel et spatial sont séparément invariants en relativité galiléenne. *Pourquoi* cette affirmation est-elle en partie incorrecte ?
5. Il existe deux façons d'écrire l'intervalle entre deux événements, l'une privilégiant le temps, l'autre privilégiant l'espace. *Pourquoi*, malgré une même efficacité calculatoire, la première est-elle pédagogiquement et même conceptuellement préférable à la seconde ?
6. En relativité restreinte, il est souvent commode de mesurer le temps en mètre, en utilisant la coordonnée ct au lieu de la variable temps t . *Pourquoi* cependant la phrase suivante souvent entendue : « Avec la relativité, le temps et l'espace ont désormais des statuts identiques », est-elle abusive ?
7. Lors d'une émission télévisée grand public sur la relativité, un scientifique (!) voulant illustrer la contraction des longueurs a affirmé qu'un voyageur, situé dans un train se déplaçant à grande vitesse par rapport à la Terre, voyait la largeur de la fenêtre de son compartiment se rétrécir. *Pourquoi* une telle affirmation traduit-elle une incompréhension de la relativité ?
8. *Pourquoi* n'y a-t-il pas réciprocité de situation dans l'expérience de pensée sur les jumeaux de Langevin ?
9. *Pourquoi* James Bradley a-t-il pu, en 1729, estimer la vitesse de la lumière dans le vide, avec une efficacité remarquable, en étudiant l'aberration de l'étoile γ du Dragon, alors qu'il s'appuyait sur la simple théorie newtonienne ?
10. *Pourquoi* l'expérience interférométrique de Fizeau, où la lumière se propage dans de l'eau en mouvement, suffisait à valider le point de vue d'Einstein sur l'espace et le temps, sans le recours de l'expérience de Michelson et Morley ?

11. *Pourquoi* le concept de masse variable ne présente aucun intérêt, et qu'en outre il est pédagogiquement dangereux ?
12. *Pourquoi* la tentative d'interpréter l'avance du périhélie de Mercure par une théorie relativiste d'espace-temps plat a-t-elle conduit à un échec ?
13. *Pourquoi* un ensemble de deux photons, de même énergie et de quantités de mouvement opposées, se comporte-t-il comme un système de masse non nulle ?
14. *Pourquoi* le mouvement relativiste d'une particule chargée, dans un champ magnétique seul, est-il simple à étudier et important à connaître ?
15. Dans l'étude des collisions entre particules rapides, on introduit souvent, même en mécanique einsteinienne, le référentiel du centre de masse. *Pourquoi* ?
16. Lorsqu'on veut créer de nouvelles particules, on s'arrange pour que le projectile et la cible soient en mouvement, de telle sorte que le référentiel du laboratoire soit aussi le référentiel du centre de masse. *Pourquoi* ?
17. *Pourquoi* un ensemble de deux champs orthogonaux, l'un électrique et l'autre magnétique, peut-il se réduire, dans d'autres référentiels, à un seul champ électrique ou à un seul champ magnétique ?
18. *Pourquoi* le rayonnement d'une étoile ne peut-il être attribué à un effondrement gravitationnel ?
19. Malgré une masse nulle, un photon émis par une étoile est dévié de sa trajectoire par une masse telle que le Soleil. *Pourquoi* ?
20. *Pourquoi* la constante cosmologique Λ exprime-t-elle l'équivalent d'une force répulsive ?

1

Introduction. Principe de relativité

Au début du XX^e siècle, la plupart des physiciens étaient persuadés que l'ensemble des phénomènes physiques pouvaient être interprétés, soit par la mécanique de Newton (cf. *Mécanique*), soit par l'électromagnétisme de Maxwell (cf. *Électromagnétisme*). Cependant, dans ce tableau d'une science physique pratiquement maîtrisée, *seulement deux* questions restaient à résoudre, selon notamment l'éminent physicien écossais Lord Kelvin : *i*) le mode de propagation de la lumière ainsi que le comportement singulier de sa vitesse, *ii*) le rayonnement émis par les corps condensés.

Cette seconde question constitue le point de départ de la physique quantique (cf. *Quantique*),

Quant à la réponse à la première question, elle est à l'origine de la théorie, dite de la *Relativité*, qui se présente, après analyse, comme une double extrapolation du principe de relativité newtonien, selon lequel aucune expérience de *mécanique* ne permet de distinguer entre deux référentiels galiléens (cf. *Mécanique*). La première extrapolation, qui concerne l'extension de ce principe à la lumière, est la *Relativité Restreinte* (RR), la seconde est la *Relativité Générale* (RG).

Il convient donc avant tout de rappeler la Relativité Newtonienne.

I. — RELATIVITÉ NEWTONNIENNE

On appelle *relativité newtonienne* des lois de la mécanique leur invariance, par changement de référentiel galiléen (cf. *Mécanique*). Rappelons que ces derniers sont des référentiels en translation, rectiligne, uniforme, les uns par rapport aux autres, dans lesquels les forces qui apparaissent sont uniquement dues à l'interaction du corps considéré avec d'autres corps situés dans son voisinage.

Remarque : Il convient de ne pas confondre la translation, qui exprime l'absence de rotation d'un référentiel par rapport à un autre référentiel, et le mouvement rectiligne qui, lui, ne concerne qu'un point dont la trajectoire au cours du temps est une droite (cf. *Mécanique*). C'est une incorrection que l'on peut malheureusement lire, encore aujourd'hui, dans des textes écrits par des scientifiques.

I. 1. — Coordonnées d'un événement

On exprime la relativité newtonienne en exprimant le changement de coordonnées d'un *événement*, c'est-à-dire d'un phénomène physique localisé, dans un référentiel donné, à la fois dans le temps (instant) et dans l'espace (lieu).

Ainsi, un événement, survenant à une particule matérielle, est caractérisé par la donnée de la coordonnée temporelle t et de ses coordonnées de position, par exemple x , y , z . Il est alors commode d'utiliser un espace à quatre dimensions, dans lequel un événement est représenté par un point Q appelé *point d'Univers*. Dans cet espace, la courbe décrite par Q est la *ligne d'Univers*. La figure 1.1 représente le mouvement rectiligne d'une particule ainsi que la ligne d'univers correspondante.

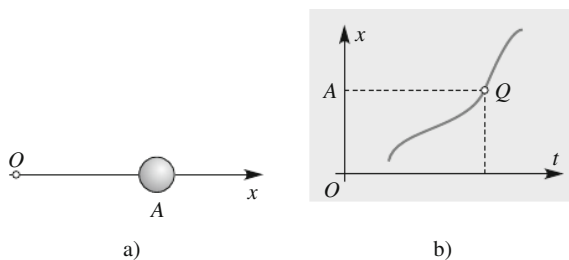


FIG. 1.1.

I. 2. — Transformation de Galilée

La transformation de Galilée permet de relier les coordonnées d'un événement dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ à celles du même événement dans un autre référentiel galiléen $\mathcal{R}'$, de vitesse d'entraînement v_e par rapport à $\mathcal{R}$ (Fig. 1.2a). Cette transformation est à la base de la cinématique newtonienne :

$$t = t' \quad x = x' + v_e t' \quad y = y' \quad \text{et} \quad z = z'$$

L'absence de constantes dans les formules de transformation revient simplement à supposer que les origines O et O' de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ coïncident aux instants $t = t' = 0$. Sur la figure $x > 0$ et $x' < 0$.

On voit qu'en cinématique relativiste la durée est un *invariant* : on dit aussi que le temps est une grandeur universelle ; c'est le principe d'universalité du temps de la mécanique newtonienne.

En revanche, contrairement à une idée incorrecte très répandue, l'espace n'est pas absolu en mécanique newtonienne, mais *relatif*, puisque les coordonnées spatiales d'un même événement diffèrent d'un référentiel à l'autre.

Remarques : 1) Le qualificatif inertiel est souvent utilisé à la place de galiléen. Certains auteurs ne font aucune différence entre les deux adjectifs. D'autres, comme nous, définissent les référentiels inertiels comme des référentiels dans lesquels le principe de l'inertie, ou première loi de Newton, peut être *concrètement réalisé*, et non en imaginant simplement l'absence de force (cf. *Mécanique*). Cette distinction apparaîtra clairement plus loin, lorsque nous analyserons les idées de la relativité générale (cf. chapitre 10). Le choix, fait ici, permet d'adopter une démarche sans rupture avec la mécanique newtonienne et d'éviter de déflorer le point central de la RG, c'est-à-dire l'analyse du rôle de la gravitation en relativité. Pour l'instant, cette discussion s'avère quelque peu académique puisque, dans la plupart des cas intéressants où des forces électromagnétiques sont présentes, la gravitation n'est pas à prendre en compte car négligeable.

2) Dans son livre « *Principia mathematica* », Newton introduisit non seulement le concept de temps absolu, mais aussi celui d'espace absolu, ce dernier à l'analyse s'avérant sans fondement, comme le firent remarquer au début des années 1900 H. Poincaré et E. Mach.

On obtient les formules réciproques donnant les coordonnées dans $\mathcal{R}'$ en fonction des coordonnées dans $\mathcal{R}$, en les permutant et en changeant v_e en $-v_e$.

$$t' = t \quad x' = x - v_e t \quad y' = y \quad \text{et} \quad z' = z$$

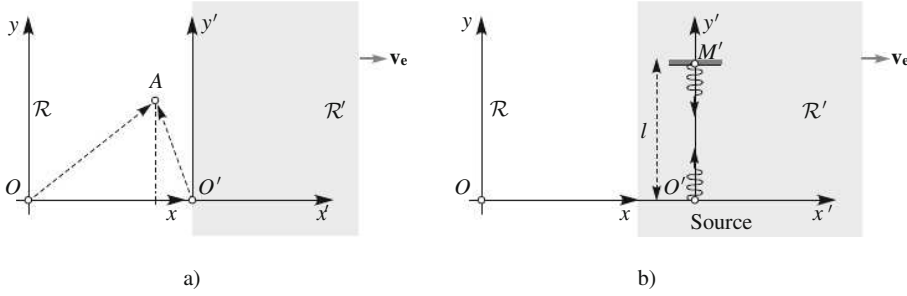


FIG. 1.2.

Exemple de transformation galiléenne des coordonnées d'événements

Une source lumineuse, placée à l'origine O' du référentiel galiléen $\mathcal{R}' = O'x'y'z'$, de vitesse d'entraînement v_e par rapport au référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, émet un rayonnement lumineux selon l'axe $O'y'$ (Fig. 1.2b).

Appelons E_1 l'événement « émission de lumière en O' », E_2 l'événement « réflexion sur un petit miroir plan M' », situé sur l'axe Oy' à la distance l , et E_3 « l'événement détection de la lumière en O' ». Les coordonnées de E_1 , E_2 et E_3 , dans $\mathcal{R}'$, sont, respectivement :

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \left| \begin{array}{l} t' = 0 \\ x' = 0 \\ y' = 0 \\ z' = 0 \end{array} \right. & E_2 & \left| \begin{array}{l} t' = l/c \\ x' = 0 \\ y' = l \\ z' = 0 \end{array} \right. & E_3 & \left| \begin{array}{l} t' = 2l/c \\ x' = 0 \\ y' = 0 \\ z' = 0 \end{array} \right. \\ \mathcal{R}' & & \mathcal{R}' & & \mathcal{R}' & \end{array}$$

Par conséquent, d'après la transformation de Galilée, on a :

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \left| \begin{array}{l} t = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. & E_2 & \left| \begin{array}{l} t = l/c \\ x = v_e l/c \\ y = l \\ z = 0 \end{array} \right. & E_3 & \left| \begin{array}{l} t = 2l/c \\ x = 2v_e l/c \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. \\ \mathcal{R} & & \mathcal{R} & & \mathcal{R} & \end{array}$$

Une telle explicitation, qui peut paraître superflue dans le cas newtonien, s'avèrera utile en relativité restreinte où l'intuition et le bon sens habituels peuvent facilement conduire à des erreurs. Dans ce contexte, il est prudent de rappeler la phrase de G. Bachelard : « En relativité restreinte, l'intuition (newtonienne) est un obstacle à la pensée scientifique ».

Notons que la durée galiléenne entre deux événements est invariante par changement de référentiel galiléen : elle vaut l/c pour E_1 et E_2 , $2l/c$ pour E_1 et E_3 , à la fois dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, conformément à l'hypothèse du temps universel. En revanche, la distance qui sépare les deux événements, elle, n'est pas invariante par changement de référentiel galiléen : pour les événements E_1 et E_2 , elle vaut respectivement, dans $\mathcal{R}'$ et dans $\mathcal{R}$:

$$d' = l \quad \text{et} \quad d = (l^2 + v_e^2 l^2 / c^2)^{1/2} = l(1 + v_e^2 / c^2)^{1/2}$$

I. 3. — Transformation galiléenne des vitesses

En dérivant par rapport au temps, paramètre universel temps ($t = t'$), les formules de transformation de Galilée, on retrouve la loi bien connue de composition des vitesses, dans le cas de la translation (cf. *Mécanique*). En effet :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt'} + v_e \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt'} \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt'}$$

puisque $dt = dt'$. Par conséquent :

$$v_x = v'_x + v_e \qquad v_y = v'_y \qquad v_z = v'_z$$

ce qui s'écrit vectoriellement :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_e$$

$\mathbf{v}_e$ étant la vitesse d'entraînement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$.

Remarques : 1) En cinématique newtonienne, la composition des vitesses ne concerne pas uniquement des référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ galiléens (cf. *Mécanique*) ; elle est établie à partir de considérations uniquement cinématiques, indépendantes de la nature galiléenne des référentiels. Ces derniers peuvent être, en effet, en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre, mais en mouvement de rotation par rapport au référentiel de Copernic. Ce résultat est directement relié à l'hypothèse newtonienne de l'universalité du temps.

2) La composition des vitesses précédentes est souvent retenue sous la forme incorrecte suivante : « vitesse absolue égale vitesse relative plus vitesse d'entraînement », car seules les vitesses relatives n'ont de sens et qu'aucun référentiel galiléen ne présente de caractère singulier.

I. 4. — Transformation galiléenne des accélérations

Dérivons par rapport au temps l'équation précédente exprimant la loi newtonienne de composition des vitesses. On trouve, à l'aide de la transformation de Galilée :

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv'_x}{dt'} + \frac{dv_e}{dt} = \frac{dv'_x}{dt'} \qquad \frac{dv_y}{dt} = \frac{dv'_y}{dt'} \qquad \frac{dv_z}{dt} = \frac{dv'_z}{dt'}$$

Ainsi, on trouve, vectoriellement $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$.

Si l'on admet l'invariance des forces (lorsqu'on change de référentiel galiléen), la loi fondamentale de la dynamique du point matériel, ou deuxième loi de Newton, s'écrit donc de la même manière dans tous les référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\mathbf{a} \quad \text{et} \quad \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}'}{dt'} = m\mathbf{a}'$$

$\mathbf{F}$ désignant la somme des forces qui s'exercent sur le point matériel, $\mathbf{p}$ et $\mathbf{p}'$ les quantités de mouvement, produit de la masse m par la vitesse $\mathbf{v}$ ou $\mathbf{v}'$ suivant le référentiel.

Aucune expérience de mécanique ne permet donc de distinguer deux référentiels galiléens. Cette analyse, qu'imposa Galilée, fut magistralement confirmée par la célèbre expérience du boulet tombant verticalement du sommet du mât d'un voilier, qui se déplace à vitesse vectorielle constante $\mathbf{v}_e$ par rapport à la Terre : dans le référentiel lié au voilier $\mathcal{R}'$, les lois de la chute libre sont les mêmes que dans le référentiel $\mathcal{R}$; le mouvement (de translation rectiligne uniforme) de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ est « comme rien » : on ne se rend compte du mouvement du voilier par rapport à $\mathcal{R}$ que si l'on regarde, depuis le voilier, le mouvement de l'eau ou le rivage ; enfermé dans une cabine sans fenêtre, un passager du voilier est totalement insensible au mouvement en translation, rectiligne, uniforme, de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$.

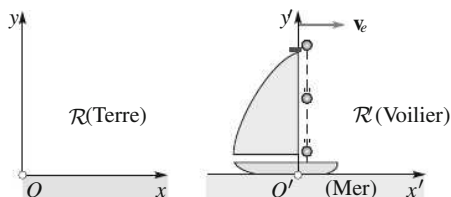


FIG. 1.3.

II. — COMPORTEMENT SINGULIER DE LA LUMIÈRE

II.1. — Aberration des étoiles de Bradley

On sait, depuis les travaux de l'astronome anglais J. Bradley, en 1729, que les étoiles lointaines présentent, pour un observateur terrestre, en mouvement annuel autour du Soleil, non seulement une anomalie de position, le défaut de parallaxe, mais aussi une anomalie de vitesse, l'aberration des étoiles. En supposant que la vitesse de la lumière est indépendante de la vitesse de l'étoile émettrice et en appliquant une simple composition newtonnienne de cette vitesse avec celle de l'observateur (cf. *Mécanique*), Bradley put obtenir la première mesure correcte de la vitesse de la lumière dans l'espace, de l'ordre de $3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

II.2. — Expérience d'Arago

En 1809, l'astronome F. Arago tente en vain de tester, sur la lumière, la composition newtonnienne des vitesses, en analysant la lumière provenant des étoiles et réfractée par un prisme, le soir à l'ouest, juste après le coucher du Soleil, puis douze heures après, juste avant son lever (Fig. 1.4). Il reprend ainsi un ancien programme expérimental, proposé plusieurs années auparavant, en 1786, par un astronome écossais R. Blair. Malheureusement, comme dans le cas de Blair, dont il ne connaît pas les travaux, la précision des mesures est insuffisante.

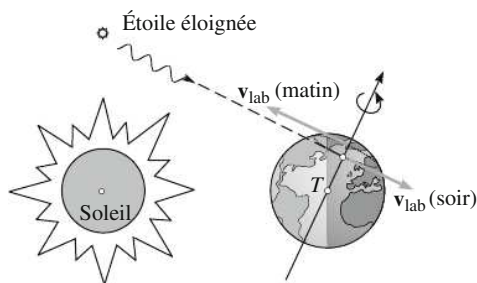


FIG. 1.4.

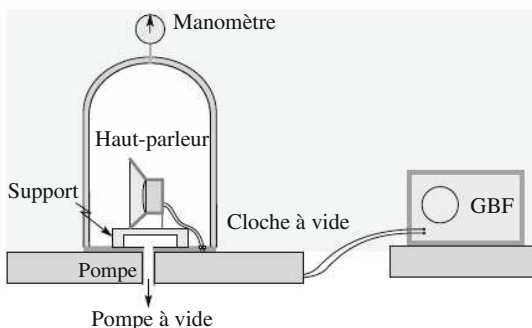


FIG. 1.5.

II.3. — Théorie ondulatoire de la lumière

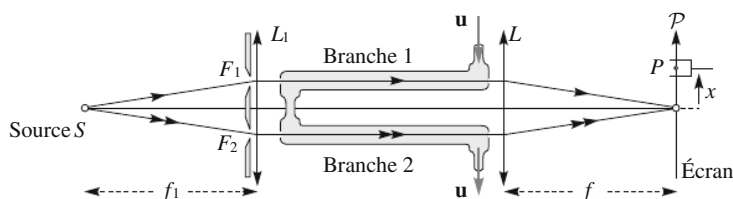
Sollicité par Arago, le physicien français A. Fresnel, adepte d'une théorie ondulatoire de la lumière, seule théorie en mesure d'expliquer les phénomènes de diffraction et d'interférence (cf. *Optique*),

interprète, d'une part le résultat de Bradley par l'indépendance de la vitesse de la lumière par rapport au mouvement de la source, d'autre part celui d'Arago comme une absence de liaison entre la réfraction et la valeur de la vitesse de la lumière. Il considère, par analogie avec le son, que la lumière est une onde qui se propage dans un certain milieu, qu'il nomme « éther » en raison des propriétés exceptionnelles que ce milieu devait posséder, notamment une vitesse aussi grande que $3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Il est alors conduit en 1818 à supposer un entraînement partiel de l'éther par les corps en mouvement, notamment la Terre, avec un facteur d'entraînement d'expression $f = 1 - 1/n^2$, n étant l'indice optique du milieu considéré.

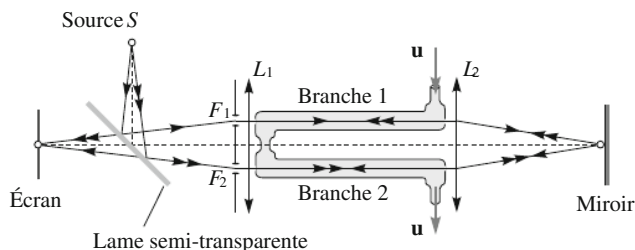
Cependant une différence importante entre le son et la lumière était déjà connue : contrairement au son, qui se propage moins bien dans les milieux dilués que dans les milieux condensés, et ne se propage pas en l'absence de matière, la lumière se propage, elle, avec une vitesse qui est maximale dans le vide. On met aisément en évidence cette différence entre le son et la lumière, à l'aide de l'expérience représentée sur la figure 1.5 : en faisant le vide dans une cloche de verre contenant une sonnette électrique, le son émis s'affaiblit jusqu'à ne plus être audible, alors que la sonnette est toujours visible.

II.4. — Expérience de Fizeau

C'est dans le but de tester expérimentalement l'hypothèse de l'entraînement de l'éther que le physicien français H. Fizeau proposa, dès 1851, une expérience consistant à étudier, à l'aide d'un système optique interférentiel, de type « fentes d'Young » (cf. *Optique*), la vitesse de la lumière dans un courant d'eau. Sur la figure 1.6a, on a représenté un tel dispositif ; en b, on rappelle le montage original utilisé et décrit par Fizeau lui-même ; grâce à une lame semi-transparente et un miroir, on double l'effet, ce qui améliore la précision, et on minimise les effets de turbulence de l'eau dans les tubes.



a)



b)

FIG. 1.6.

a) Dispositif expérimental

La première lentille L_1 (distance focale f_1) permet d'obtenir un faisceau parallèle ; avec la seconde L_2 , de distance focale f , on forme sur l'écran $\mathcal{P}$ l'image géométrique de la fente source.

En l'absence de courant d'eau, on observe en un point d'observation P , de coordonnée X du plan $\mathcal{P}$, la figure de diffraction donnée par les deux fentes diffractantes F_1 et F_2 . Si les fentes distantes de a sont très fines, on observe un réseau de franges d'interférence distantes de $\lambda f/a$, λ étant la longueur d'onde du rayonnement monochromatique.

En présence d'un courant d'eau, de vitesse $\mathbf{u}$, on constate un décalage des phénomènes d'interférence que l'on doit comparer à la prévision galiléenne.

b) Prévision galiléenne ou newtonienne

La différence de chemin optique supplémentaire ΔL_N , selon la transformation de Galilée ou la théorie de Newton, s'obtient en prenant en compte les vitesses de propagation de la lumière par rapport à l'observateur. Dans la branche 1 du tube d'amenée de l'eau, cette vitesse serait $v_1 = c/n - u$ et dans la branche 2, $v_2 = c/n + u$, puisque c/n est la vitesse de la lumière par rapport au liquide en mouvement. Par conséquent :

$$\Delta L_N = c \left(\frac{l}{c/n - u} - \frac{l}{c/n + u} \right) = \frac{2luc}{c^2/n^2 - u^2} \approx \frac{2ln^2u}{c}$$

u étant très faible devant c/n . En divisant par la longueur d'onde (dans le vide) λ_0 de la radiation utilisée, on obtient le décalage suivant des franges d'interférence :

$$\Delta p_N = \frac{\Delta L_N}{\lambda_0} \approx \frac{2ln^2u}{c\lambda_0}$$

Ordre de grandeur : dans l'expérience de Fizeau, $u = 7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $l = 1,5 \text{ m}$, $\lambda_0 = 530 \text{ nm}$ et $n = 1,33$, ce qui prédit $\Delta p_N = 0,23$, alors que l'expérience fournit une valeur proche de 0,1. Fizeau remarqua que ce résultat expérimental pouvait être retrouvé en tenant compte du facteur d'entraînement de Fresnel $1 - 1/n^2$ égal à 0,44 dans l'eau.

Remarques : 1) Dans cette expérience, délicate à reproduire, les deux tubes doivent être très proches l'un de l'autre et de faible diamètre, 5 mm environ.

2) Une version moderne de l'expérience de Fizeau a été réalisée en 2012 par T. Lahaye *et al.*

II.5. — Expérience de Michelson

Malgré l'efficacité du facteur d'entraînement de l'éther, pour retrouver les résultats expérimentaux fournis par son expérience, Fizeau, comme la plupart des physiciens, resta sceptique sur la validité théorique de l'entraînement de l'éther. Des expériences plus précises, du deuxième ordre en v_e/c apparaissaient nécessaires. Dans ce contexte, le physicien américain, A. Michelson eut l'idée, en 1880, de construire un interféromètre optique très sensible, afin d'analyser les variations de la vitesse de la lumière $\mathbf{v}_l$, par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ représentant l'éther, au cours du mouvement orbital de la Terre (Fig. 1.7). Entre $\mathbf{v}_l$ et la vitesse $\mathbf{v}_l'$ de la lumière, par rapport au référentiel $\mathcal{R}'$ du laboratoire, la composition newtonienne des vitesses s'écrit :

$$\mathbf{v}_l = \mathbf{v}_l' + \mathbf{v}_e$$

$\mathbf{v}_e$ étant la vitesse d'entraînement du laboratoire. Pendant la durée de l'expérience, les deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ peuvent être considérés comme des référentiels galiléens, avec une excellente approximation.

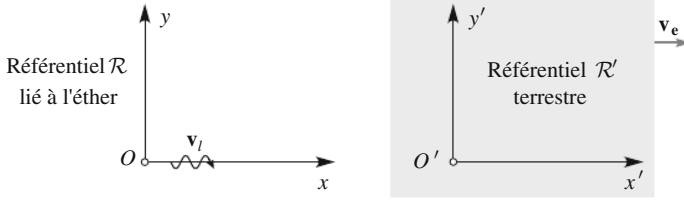


FIG. 1.7.

a) Dispositif expérimental

L'interféromètre, construit par Michelson à cette occasion, est désormais bien connu et porte depuis le nom d'interféromètre de Michelson. Il est constitué de deux miroirs M_1 , M_2 et d'une lame semi transparente L_s qui divise l'onde incidente en deux parties d'égales intensités (Fig. 1.8a). On réalise l'interférence des ondes issues de l'image S_1 de la source S , donnée par L_s et M_1 , et de l'image S_2 , donnée par M_2 légèrement incliné et L_s (cf. *Optique*).

Pour l'expérimentateur, la variation de l'éclairement au point P , où se trouve le détecteur, dépend de la différence τ des durées mises par les ondes issues de S et détectées en P ; précisément, l'aspect interférentiel dépend de la différence de phase $2\pi\nu\tau$, ν étant la fréquence du rayonnement.

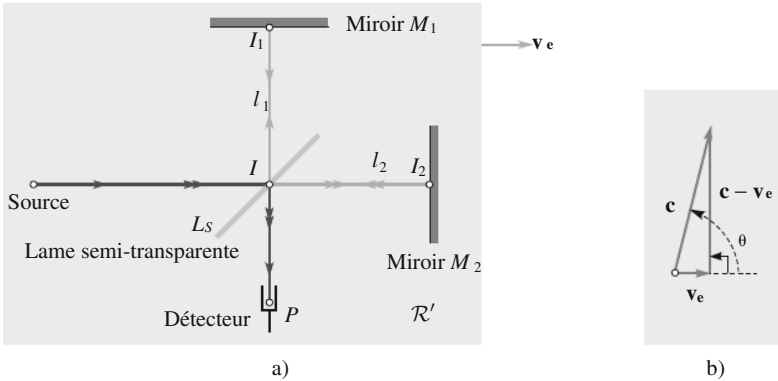


FIG. 1.8.

b) Expression de la différence de phase

Si τ_1 désigne la durée mise par la lumière pour aller de I à I_1 , puis revenir en I , et τ_2 la durée qu'elle met pour aller de I à I_2 , et revenir en I , il vient, les trajets SI et IP étant communs :

$$\tau = \tau_2 - \tau_1$$

Exprimons τ_1 et τ_2 , en fonction des longueurs l_1 et l_2 des bras de l'interféromètre ($II_1 = l_1$ et $II_2 = l_2$), de la vitesse d'entraînement $\mathbf{v}_e = v_e \mathbf{e}_x$ du laboratoire et de la vitesse de la lumière dans le vide c . On voit aisément que, selon la théorie newtonienne :

$$\tau_2 = \frac{l_2}{c - v_e} + \frac{l_2}{c + v_e} = 2l_2 \frac{c}{c^2 - v_e^2} \quad \text{soit} \quad \tau_2 = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{1 - v_e^2/c^2}$$

en posant :

$$\beta_e = \frac{v_e}{c} \quad \text{et} \quad \gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2}$$

D'autre part, comme la vitesse de la lumière dans $\mathcal{R}$ est c , la vitesse dans $\mathcal{R}'$ est $\mathbf{c} - \mathbf{v}_e$ selon la théorie newtonnienne (Fig. 1.8b). On a alors, θ étant l'angle que fait ce vecteur vitesse avec l'axe des x défini par $\mathbf{v}_e$:

$$\|\mathbf{c} - \mathbf{v}_e\| = (c^2 + v_e^2 - 2v_e c \cos \theta)^{1/2} = (c^2 - v_e^2)^{1/2}$$

puisque $\cos \theta = v_e/c$. Il en résulte que :

$$\tau_1 = \frac{2l_1}{c(1 - v_e^2/c^2)^{1/2}} \quad \text{et} \quad \tau = \tau_2 - \tau_1 = \frac{2l_2}{c} \left(\frac{1}{1 - v_e^2/c^2} \right) - \frac{2l_1}{c} \frac{1}{(1 - v_e^2/c^2)^{1/2}}$$

Comme $v_e/c \approx 10^{-4} \ll 1$, on en déduit l'expression approchée suivante de τ :

$$\tau \approx \frac{2l_2}{c} \left(1 + \frac{v_e^2}{c^2} \right) - \frac{2l_1}{c} \left(1 + \frac{v_e^2}{2c^2} \right) = \frac{2(l_2 - l_1) + (2l_2 - l_1)v_e^2/c^2}{c}$$

d'où la différence de phase :

$$\phi = 2\pi\nu\tau = \frac{2\pi}{\lambda_0} c\tau \approx \frac{2\pi}{\lambda_0} \left[2(l_2 - l_1) + (2l_2 - l_1)\frac{v_e^2}{c^2} \right]$$

en introduisant la longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = c/\nu$. Pour des bras de longueurs égales ($l_1 = l_2 = l$), on trouve :

$$\phi = 2\pi \frac{l}{\lambda_0} \frac{v_e^2}{c^2}$$

c) Échec expérimental

Techniquement, Michelson a réalisé l'expérience avec une source S quasi-monochromatique, mais étendue. En inclinant légèrement le miroir M_2 , il a observé des franges d'interférence, localisées sur M_1 , caractéristiques d'un coin d'air (cf. *Optique*).

En faisant tourner l'appareil de 90° , autour d'un axe vertical, les rôles joués par les miroirs M_1 et M_2 , relativement à la direction de $\mathbf{v}_e$, sont inversés (Fig. 1.9a). La nouvelle différence de durée τ' s'obtient à partir de la précédente, en affectant aux longueurs l_1 et l_2 des coefficients de correction en vitesse permutés :

$$\tau' \approx \frac{2l_2}{c} \left(1 + \frac{v_e^2}{2c^2} \right) - \frac{2l_1}{c} \left(1 + \frac{v_e^2}{c^2} \right) = \frac{2(l_2 - l_1) + (l_2 - 2l_1)v_e^2/c^2}{c}$$

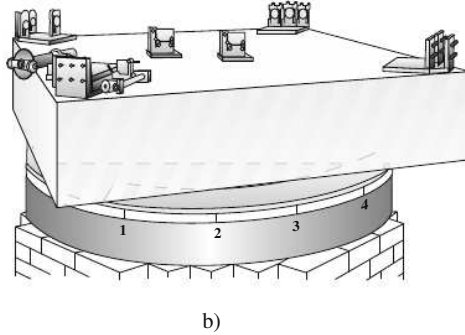
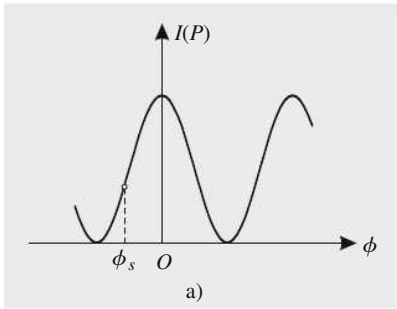
d'où la différence de phase associée :

$$\phi' = 2\pi\nu\tau' = \frac{2\pi}{\lambda_0} c\tau' \approx \frac{2\pi}{\lambda_0} \left[2(l_2 - l_1) + (l_2 - 2l_1)\frac{v_e^2}{c^2} \right]$$

Ainsi, on devrait observer au point P de l'écran, selon la théorie newtonnienne, une variation d'éclairement associée à la différence de phase supplémentaire ϕ_s du fait de la rotation de l'interféromètre :

$$\phi_s = \phi' - \phi \approx -2\pi \frac{l_1 + l_2}{\lambda_0} \frac{v_e^2}{c^2} \quad \text{soit} \quad \phi_s \approx -2\pi \frac{l}{\lambda_0} 2\frac{v_e^2}{c^2} l$$

pour $l_1 = l_2 = l$. Afin d'améliorer la précision de l'expérience, les deux faisceaux n'interféraient qu'après plusieurs réflexions sur les miroirs M_1 et M_2 , ce qui augmentait la longueur effective des bras. En outre, l'interféromètre était rendu pratiquement insensible aux vibrations parasites, durant sa rotation, grâce à un banc d'optique en pierre, flottant sur un bain de mercure. Sur la figure 1.9b, on a reproduit le schéma donné par Michelson et Morley même, dans leur publication originale de décembre 1887.



Banc d'optique utilisé par Michelson

FIG. 1.9.

Précisément, la longueur des bras était de 11 m et la longueur d'onde de la lumière utilisée de 550 nm. Par conséquent, puisque $\beta_e \approx 10^{-4}$:

$$\frac{\phi_s}{2\pi} = \frac{(2\pi/\lambda_0)2l\beta_e^2}{2\pi} = \frac{2l\beta_e^2}{\lambda_0} = \frac{2 \times 11 \times 10^{-8}}{0,55 \times 10^{-6}} = 0,4$$

Ce rapport représente le déplacement de la figure d'interférence en fraction de frange, puisqu'un déplacement d'une frange correspond à un retard de phase égal à 2π (cf. *Optique*).

Dès 1881, Michelson avait obtenu un rapport $\phi_s^{cal}/\phi_s^{obs}$, entre le retard de phase calculé et celui observé, qui était égal à 2. Il refit cette expérience de nombreuses fois, pendant plusieurs années, aidé notamment par son collaborateur E. Morley, mais, contrairement à l'attente de Michelson lui-même, ce rapport précédent ne fit qu'augmenter, avec la précision des mesures, pour atteindre 90 (!) en 1929.

En 1930, une mesure encore plus précise, effectuée par le physicien allemand G. Joos, a donné un rapport de 375. On peut donc affirmer, compte tenu de la précision des mesures, qu'*aucune différence de phase* n'a jamais pu être mise en évidence. En octobre 2003, une équipe de recherche allemande a testé, avec une précision relative de $2,6 \times 10^{-15}$, l'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide, malgré la vitesse de rotation propre de la Terre.

III. — ÉQUATIONS DE MAXWELL ET TRANSFORMATION DE GALILÉE

Nous avons vu que la transformation de Galilée respectait l'invariance de la loi fondamentale de la mécanique par changement de référentiel galiléen. La question que l'on peut alors se poser est la suivante : en est-il de même pour les lois de l'électromagnétisme et par conséquent pour les équations de Maxwell qui les expriment ? Le premier à avoir tenté de répondre à cette question est le physicien allemand, W. Voigt, à propos de l'effet Doppler-Fizeau (cf. chapitre 3) ; il suggère de garder $x' = x - v_e t$ et remplacer les autres transformations de coordonnées par, respectivement :

$$t' = t - \frac{v_e x}{c^2} \quad y' = \frac{y}{\gamma_e} \quad \text{et} \quad z' = \frac{z}{\gamma_e} \quad \text{avec} \quad \beta_e = \frac{v_e}{c} \quad \text{et} \quad \gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2}$$

mais il considère ce changement de variable comme un simple artifice de calcul. Quelques années plus tard, dans « La théorie des électrons », le physicien néerlandais H.-A. Lorentz, en tentant d'élucider l'origine physique du facteur d'entraînement de Fresnel, est conduit à utiliser un changement de variables analogue, dans la propagation de la lumière dans l'éther ; il introduit le temps t' qu'il qualifie de *local*, car il dépend de la coordonnée x , sans lui accorder de signification physique.

III. 1. — Rappel des équations de Maxwell

Les équations de Maxwell sont au nombre de quatre (cf. *Électromagnétisme*). Deux d'entre elles, de nature *structurale*, relient les vecteurs du champ électromagnétique $\mathbf{E}, \mathbf{B}$:

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \text{div } \mathbf{B} = 0$$

Les deux autres sont *conjoncturelles*, c'est-à-dire qu'elles dépendent des charges et courants ; dans le vide sans charge, elles s'écrivent respectivement :

$$\text{div } \mathbf{E} = 0 \quad \text{et} \quad \text{rot } \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) - \frac{\partial(\varepsilon_0 \mathbf{E})}{\partial t} = \mathbf{0}$$

μ_0 et ε_0 étant deux coefficients affectés au vide. La combinaison de ces équations fournit l'équation de propagation à laquelle satisfont les champs $\mathbf{E}$ ou $\mathbf{B}$ (cf. *Électromagnétisme*) :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{c^2 \partial t^2} \quad \text{en posant} \quad c = (\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2}$$

On en déduit que le champ électromagnétique se propage à la vitesse c .

Dans un autre référentiel galiléen $\mathcal{R}'$, le champ électromagnétique $(\mathbf{E}', \mathbf{B}')$ est différent, mais les relations sont analogues, les variables spatio-temporelles x, y, z, t étant remplacées par les nouvelles variables x', y', z' et t' . L'équation de propagation s'écrit donc dans $\mathcal{R}'$:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}'}{\partial z'^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}'}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}'}{c^2 \partial t'^2}$$

Il en résulte que la vitesse de propagation c des ondes électromagnétiques dans le vide est *la même* par rapport aux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. En outre, d'après ces équations, cette propagation est isotrope et indépendante du mouvement de la source à l'origine de l'émission, comme dans le cas des vibrations sonores. Rappelons cependant que, contrairement au son, la lumière peut se propager en l'absence de milieu matériel.

III. 2. — Transformation galiléenne du champ électromagnétique

Dans un référentiel galiléen, la force qui s'exerce sur une charge en mouvement peut être séparée en deux parties. L'une, indépendante de la vitesse, est une généralisation de la force électrostatique que l'on appelle la *force électrique*. L'autre dépend de la vitesse de la particule et lui est orthogonale ; c'est la *force magnétique*. Ces constatations conduisent à la définition suivante de la *force de Lorentz*, qui s'exerce sur une charge q , de vitesse $\mathbf{v}$, au point M du référentiel galiléen d'étude (cf. *Électromagnétisme*) :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

où $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ sont respectivement les champs électrique et magnétique ; l'ensemble $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ forme le *champ électromagnétique* en M .

Le champ électromagnétique $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ est une entité dont les composantes électrique et magnétique dépendent du référentiel d'analyse. En effet, considérons un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ dans lequel existent un champ électrique $\mathbf{E}$ et un champ magnétique $\mathbf{B}$ uniformes. Soit $\mathcal{R}'$ un second référentiel galiléen de vitesse $\mathbf{v}_e$ par rapport à $\mathcal{R}$. D'après la relativité galiléenne, le champ électromagnétique est défini dans $\mathcal{R}'$ par l'équation :

$$\mathbf{F}' = q'(\mathbf{E}' + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}')$$

dans laquelle $\mathbf{E}'$ et $\mathbf{B}'$ sont les champs électrique et magnétique observés dans $\mathcal{R}'$. Les deux référentiels étant en translation, rectiligne uniforme, l'un par rapport à l'autre, on a : $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_e$. En outre, la charge est supposée *invariante* (par changement de référentiels), $q = q'$, et, en relativité galiléenne, la force l'est aussi : $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$. Par conséquent :

$$q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q[\mathbf{E}' + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_e) \times \mathbf{B}']$$

ce qui doit être vérifié, quelle que soit la valeur de $\mathbf{v}$. Aussi, obtient-on, en égalant les termes dépendants de la vitesse $\mathbf{v}$ et de ceux indépendants de $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}' \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}'$$

Ainsi, deux observateurs qui se déplacent l'un par rapport à l'autre n'attribuent pas la même valeur à la partie électrique de l'interaction : les champs électrique et magnétique sont liés et ne se transforment pas indépendamment l'un de l'autre, lorsqu'on change de référentiel.

III. 3. — Non-invariance de toutes les équations de Maxwell par transformation de Galilée

Les équations de Maxwell ne sont pas toutes invariantes par changement de référentiel galiléen, dans la transformation de Galilée. Montrons-le, dans le cas simple de la première équation conjonctuelle dans le vide, sans charge, $\text{div } \mathbf{E} = 0$. Cette équation s'explicite selon :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

Or, d'après ce qui précède, on a $\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}'$ (Fig 1.7), ce qui s'explicite selon :

$$E_x = E'_x \quad E_y = E'_y + v_e B'_z \quad E_z = E'_z - v_e B'_y$$

Établissons les relations entre les dérivées partielles, à partir de la transformation de Galilée :

$$t' = t \quad x' = x - v_e t \quad y' = y \quad \text{et} \quad z' = z$$

Il vient, pour la coordonnée spatiale longitudinale et pour le temps :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial ct'} \frac{\partial ct'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \quad \frac{\partial}{\partial ct} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial ct} + \frac{\partial}{\partial ct'} \frac{\partial ct'}{\partial ct} = -\beta_e \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial ct'}$$

Pour les coordonnées spatiales transversales, on a simplement :

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}$$

Il en résulte que :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E'_x}{\partial x'} \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + v_e \frac{\partial B'_z}{\partial y'} \quad \text{et} \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E'_z}{\partial z'} - v_e \frac{\partial B'_y}{\partial z'}$$

En ajoutant membre à membre ces trois équations, on voit que :

$$\text{div } \mathbf{E} = \text{div}' \mathbf{E}' + v_e \left(\frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} \right)$$

La forme de l'équation $\text{div } \mathbf{E} = 0$ n'est donc pas invariante de forme par changement de référentiel galiléen. En revanche, l'équation structurelle $\text{div } \mathbf{B} = 0$, elle, l'est. En effet, elle s'explicite selon :

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

Or, d'après l'égalité des champs magnétiques $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$, on a, en tenant compte de la transformation de Galilée :

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\partial B'_x}{\partial x'} \quad \frac{\partial B_y}{\partial y} = \frac{\partial B'_y}{\partial y'} \quad \text{et} \quad \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial B'_z}{\partial z'}$$

d'où, en ajoutant membre à membre : $\text{div } \mathbf{B} = \text{div}' \mathbf{B}' = 0$.

Remarque : Le comportement des deux autres équations de Maxwell (loi d'induction et théorème d'Ampère) est analysé en exercice (cf. Exercices).

III. 4. — Transformation de Lorentz-Poincaré

C'est en 1905 que le savant français H. Poincaré énonça, à l'Académie des Sciences de Paris, la nouvelle transformation des coordonnées, par changement de référentiel galiléen, sous sa forme définitive, en lui accordant une importance physique et en en attribuant élégamment la paternité à Lorentz :

$$t = \gamma_e \left(t' + \beta_e \frac{x'}{c} \right) \quad x = \gamma_e (x' + \beta_e c t') \quad y = y' \quad z = z'$$

avec :

$$\beta_e = \frac{v_e}{c} \quad \text{et} \quad \gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2}$$

Il montre alors que cette transformation laisse invariante la forme quadratique $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$ et qu'elle a une structure mathématique de groupe, c'est-à-dire que le produit de deux transformations de Lorentz est encore une transformation de Lorentz.

Sur la figure 1.10, on a représenté la variation du facteur relativiste γ_e en fonction de β_e ; on voit que γ_e varie entre 1 et l'infini lorsque β_e passe de 0 à 1.

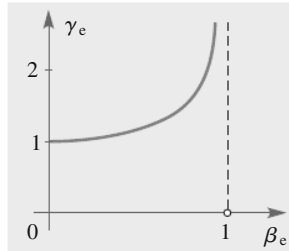


FIG. 1.10.

Comme pour la transformation de Galilée, les origines des durées et des espaces sont supposées les mêmes pour les deux référentiels.

Selon cette transformation, le temps n'apparaît plus comme un paramètre universel. Nous reviendrons plus loin sur les implications de ce résultat qui surprit les physiciens de l'époque et dérouta encore les débutants.

IV. — PRINCIPE DE RELATIVITÉ DE POINCARÉ-EINSTEIN

Avant d'énoncer le principe de relativité de Poincaré-Einstein, il n'est pas sans intérêt de rappeler une expérience historique qui souligne l'échec, non de la composition newtonienne des vitesses, comme dans les expériences de Fizeau ou de Michelson, mais de la loi fondamentale de la dynamique newtonienne.

IV.1. — Expérience de Kaufmann

En 1901, le physicien allemand W. Kaufmann tenta de vérifier expérimentalement la relation newtonienne entre la quantité de mouvement $\mathbf{p}$ d'un électron rapide et le rayon de courbure R de sa trajectoire dans un champ magnétique $\mathbf{B}$. On sait, en effet, que la trajectoire d'une particule chargée (charge q), dans un champ magnétique constant $\mathbf{B}$, est un cercle, si sa vitesse initiale est perpendiculaire au champ (cf. *Mécanique*). Entre R , p et B , on a la relation newtonienne suivante :

$$R = \frac{p}{qB} = \frac{mv}{qB} = \frac{\beta mc}{qB} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Il constata que R n'était pas proportionnel à β , mais à $\gamma\beta$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ étant le facteur relativiste associé à β , introduit dès 1895 par Lorentz. Sur la figure 1.11, on a représenté le graphe établissant expérimentalement la relation de proportionnalité entre R et $\gamma\beta$; la pente de la droite dépend évidemment du champ magnétique, lequel était d'environ 17 mT.

Comme nous le verrons ultérieurement (cf. chapitres 6 et 7), ce résultat expérimental s'interprète aisément à l'aide de la loi fondamentale de la dynamique d'Einstein, appliquée au mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique.

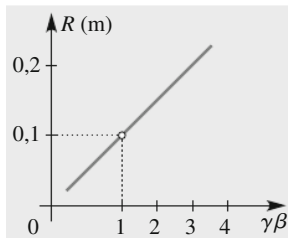


FIG. 1.11.

IV.2. — Énoncé du principe

L'extension du principe de relativité newtonien à *tous* les phénomènes physiques, notamment lumineux, fut proposée, pour la première fois, par le mathématicien et physicien français H. Poincaré, dans sa conférence de Saint Louis, aux États-Unis, le 24 septembre 1904 :

Toutes les lois de la physique sont invariantes par changement de référentiel galiléen.

Il en résulte que les lois de la dynamique, ainsi que celles de l'électromagnétisme contenues dans les équations de Maxwell, doivent s'exprimer de la même façon dans deux référentiels galiléens.

Dans cette conférence, Poincaré y développe ce qu'il a déjà écrit deux ans plus tôt, dans un livre célèbre « La Science et l'hypothèse », principalement l'inexistence d'un temps absolu ; en outre, il y voit la possibilité d'éviter les onze hypothèses qui ont permis à Lorentz de justifier son interprétation de l'invariance des équations de Maxwell.

Quelques mois plus tard, le 30 juin 1905, un jeune physicien allemand, inconnu, A. Einstein, publie, dans la revue *Annalen der Physik*, en même temps que trois autres articles décisifs en physique, un texte sur le même sujet, intitulé « Sur l'électrodynamique des corps en mouvement ». Il y énonce clairement l'extension du principe de relativité et y interprète physiquement, avec simplicité et élégance, toutes les conséquences, notamment l'invariance des équations de Maxwell et le résultat négatif de l'expérience de Michelson.

Remarque : Dans les énoncés originaux du principe de relativité donnés par Poincaré et d'Einstein, le qualificatif *rectiligne*, qu'on lit habituellement dans les ouvrages de base (cf. *Mécanique*), n'est pas mentionné. La raison en est simple : le mot *uniforme* est pris au sens vectoriel, ce qui évite de préciser davantage.

IV.3. — Invariance de la vitesse de la lumière

D'après l'énoncé précédent, appliqué aussi aux lois de l'électromagnétisme et donc à la propagation de la lumière dans le vide, sous forme d'onde, le champ électromagnétique doit se propager à la même vitesse c , invariante par changement de référentiel galiléen. Dans ce nouveau contexte, c n'est pas seulement la vitesse de la lumière dans le vide, mais bien plus largement une constante universelle de la physique, qu'on appellera dans la suite *constante d'Einstein*.

Dans sa publication originale, Einstein, contrairement à Poincaré, introduisit un second principe sur la vitesse de la lumière. Ce dernier est superflu, si l'on ne tient pas compte de la théorie électromagnétique de Maxwell, établie dès 1876, selon laquelle la lumière se propage dans le vide sous forme d'onde, l'invariance de la vitesse de la lumière par changement de référentiel galiléen découlant du principe de relativité de Poincaré-Einstein. Dans une note envoyée un peu plus tard au directeur de la publication, Einstein admet lui-même que ce second principe est naturellement contenu dans les équations de Maxwell.

La contribution de Poincaré fut remarquable à la fois dans la mise en forme définitive de l'écriture de la transformation de Lorentz-Poincaré, et dans l'extension du principe de Relativité. Cependant, elle est moins précise et moins développée que celle d'Einstein, lequel envisage précisément la dilatation des durées totalement ignorée par Poincaré.

Remarques : 1) Certains auteurs n'ont pas hésité à affaiblir la contribution d'Einstein à la relativité restreinte, jusqu'à mettre en doute son intégrité, en le soupçonnant de plagiat. Nous conseillons au lecteur intéressé par cette polémique de se référer aux publications originales de ces deux grands scientifiques, ou plus simplement à la comparaison exhaustive de leurs contributions respectives faite récemment par le physicien français T. Damour. Il n'est pas inutile de rappeler que, dans leurs notes, Lorentz et Poincaré ont rendu un hommage appuyé au talent d'Einstein.

2) De façon anecdotique, Lorentz appela β le rapport v_e/c , alors que Poincaré le désignait par ε ; tous deux notent k la quantité γ_e . Quant à Einstein, il n'attribue pas de lettre au rapport v_e/c et appelle β ce qu'on appelle actuellement γ_e !

IV.4. — Interprétation de l'expérience de Michelson-Morley

Le principe de relativité, ainsi généralisé aux phénomènes électromagnétiques, permet d'interpréter l'expérience de Michelson et Morley de façon très simple : comme la vitesse de la lumière dans le vide est aussi égale à c , par rapport au référentiel du laboratoire, τ_1 vaut $2l/c$ ainsi que τ_2 . Par conséquent, $\tau = \tau_2 - \tau_1$ est nul au point d'observation P . Le concept d'éther ne présente alors aucun intérêt.

IV.5. — Écriture condensée de la transformation de Lorentz-Poincaré

Il est commode de réécrire la transformation de Lorentz Poincaré en substituant ct à la variable t et ct' à la variable t' , c étant un invariant :

$$ct = \gamma_e(ct' + \beta_e x') \quad x = \gamma_e(x' + \beta_e ct') \quad y = y' \quad z = z'$$

avec $\beta_e = v_e/c$ et $\gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2}$.

IV.6. — Universalité de la théorie de la relativité

Contrairement à ce que pourrait laisser supposer son nom, la théorie de la relativité restreinte n'est pas une traduction scientifique d'un éventuel relativisme philosophique, doctrine selon laquelle, par opposition à l'universalisme, rien n'est immuable et tout change selon le point de vue, ce que le sens commun résume efficacement par un « Tout est relatif ». À l'analyse, cette théorie se présente finalement, au contraire, comme la recherche de ce qui est *invariant* par changement de référentiel galiléen et donc de ce qui est universel. Notons que l'universalité porte essentiellement sur la *forme* des lois et non sur les grandeurs qui apparaissent dans ces lois. On dit aussi que ces lois sont *covariantes*. Par exemple, on écrira, par rapport à $\mathcal{R}$ et par rapport à $\mathcal{R}'$, respectivement :

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad \text{et} \quad \mathbf{F}' = \frac{d\mathbf{p}'}{dt'}$$

Remarque : La confusion et l'ambiguïté provoquées dans l'esprit du grand public par le nom de relativité sont telles, aujourd'hui, que certains auteurs ont proposé d'abandonner cette terminologie, en proposant à la place « Théorie de l'invariance ».

IV.7. — Invariance des équations de Maxwell par transformation de Lorentz-Poincaré

On montre que les *quatre* équations de Maxwell sont invariantes par transformation de Lorentz-Poincaré, pourvu que les champs se transforment, par changement de référentiel galiléen, selon (cf. chapitre 9) :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{//} &= \mathbf{E}'_{//} & \mathbf{B}_{//} &= \mathbf{B}'_{//} \\ \mathbf{E}_{\perp} &= \gamma_e(\mathbf{E}'_{\perp} - \boldsymbol{\beta}_e \times \mathbf{B}'_{\perp} c) & \mathbf{B}_{\perp} &= \gamma_e(\mathbf{B}'_{\perp} c + \boldsymbol{\beta}_e \times \mathbf{E}'_{\perp}) \end{aligned} \quad \text{et}$$

dans lesquelles on a séparé les champ longitudinaux (parallèles à la direction $\mathbf{v}_e$) et les champs transversaux (perpendiculaires à $\mathbf{v}_e$).

Pour vérifier cette invariance, on doit, en outre, s'appuyer sur les relations entre les dérivations issues de la transformation inverse de Lorentz-Poincaré :

$$ct' = \gamma_e(ct - \beta_e x) \quad x' = \gamma_e(x - \beta_e ct) \quad y' = y \quad z' = z$$

Pour les coordonnées spatiales transversales, on a encore :

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}$$

En revanche, pour la coordonnée temporelle et la coordonnée spatiale longitudinale, on doit utiliser les relations suivantes de dérivation :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial ct'} \frac{\partial ct'}{\partial x} = \gamma_e \frac{\partial}{\partial x'} - \gamma_e \beta_e \frac{\partial}{\partial ct'} \quad \frac{\partial}{\partial ct} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial ct} + \frac{\partial}{\partial ct'} \frac{\partial ct'}{\partial ct} = -\gamma_e \beta_e \frac{\partial}{\partial x'} + \gamma_e \frac{\partial}{\partial ct'}$$

Remarque : En faisant $\beta_e \ll 1$ dans les formules de transformation des champs, on restitue évidemment l'approximation newtonienne :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{//} &= \mathbf{E}'_{//} & \mathbf{B}_{//c} &= \mathbf{B}'_{//c} \\ \mathbf{E}_{\perp} &\approx \mathbf{E}'_{\perp} - \boldsymbol{\beta}_e \times \mathbf{B}'_{\perp c} & \mathbf{B}_{\perp c} &\approx \mathbf{B}'_{\perp c} \end{aligned} \quad \text{et}$$

soit : $\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}'$ et $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$. Notons que, dans ces dernières formules, la symétrie entre le champ électrique et le champ magnétique a disparu.

CONCLUSION

Retenons les résultats essentiels de ce chapitre introductif à la relativité.

1) Le principe de relativité de Poincaré-Einstein est une extension, à tous les phénomènes physiques, de l'invariance des lois de la mécanique newtonienne par changement de référentiel galiléen, en particulier à ceux concernant la lumière. Comme les équations de Maxwell s'écrivent de la même façon dans de tels référentiels, la vitesse c des ondes électromagnétiques qui se propagent dans le vide est la même dans différents référentiels galiléens.

2) Ce principe permet d'expliquer rationnellement l'absence de déplacement de franges d'interférence dans l'expérience historique de Michelson et Morley.

3) Ses conséquences sont considérables, car les formules de transformation galiléenne des coordonnées d'un événement, repéré dans deux référentiels galiléens, sont impropres à exprimer l'invariance de c par changement de référentiel galiléen. Il est donc indispensable de substituer à la transformation de Galilée une nouvelle transformation, précisément la transformation de Lorentz-Poincaré que nous retiendrons désormais sous la forme :

$$ct = \gamma_e(ct' + \beta_e x') \quad x = \gamma_e(x' + \beta_e ct') \quad y = y' \quad z = z'$$

avec $\beta_e = v_e/c$ et $\gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2}$.

La relativité (restreinte ou générale) est encore aujourd'hui soumise à des tests de validité très contraignants, sous forme d'expériences réalisées avec des précisions extrêmes. Jusqu'à maintenant, malgré tous ces efforts, aucun de ces tests n'a pu mettre en défaut cette théorie.

EXERCICES ET PROBLÈMES

P1– 1. Principe de l'inertie en mécanique de Newton

Dans le *Dialogue des deux mondes*, Galilée pose la question suivante : quel est le point de chute d'un boulet abandonné au sommet du mât vertical d'un voilier, qui se déplace à vitesse (vectorielle) constante par rapport au référentiel terrestre, lorsqu'on néglige l'influence du vent (Fig. 1.3) ? Le point situé au bas du mât, en avant ou en arrière ? Justifier votre réponse.

P1– 2. Mesure de la vitesse de la lumière par Roemer et Huygens

En 1676, l'astronome danois O. Roemer prouva, pour la première fois, que la vitesse de la lumière avait une valeur finie, en notant les instants d'éclipses de Io, satellite naturel de Jupiter, lesquelles se produisent toutes les 42 h environ (Fig. 1.12) ; des cinq satellites de Jupiter, Io est le plus proche, à

une distance de 412 600 km du centre de la planète. Roemer constata un retard maximal de 22 min entre deux observations d'éclipses à six mois d'intervalle, ce que C. Huygens attribua aux positions diamétralement opposées de la Terre sur son orbite autour du Soleil, et ainsi à la distance supplémentaire égale au diamètre D de l'orbite terrestre que la lumière devait parcourir avec une vitesse finie.

Sachant que les mesures précises actuelles de ce retard donnent 16,5 min, quelle était l'estimation de la vitesse de la lumière faite par Huygens ?

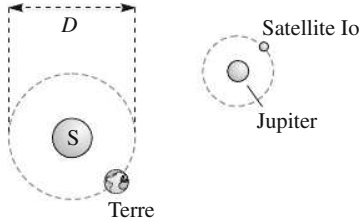


FIG. 1.12.

P1– 3. Propagation du son

La vitesse de propagation du son dans un milieu isotrope a pour expression : $c_s = (\rho \kappa_s)^{-1/2}$, ρ étant la masse volumique du milieu et κ_s le coefficient de compressibilité isentropique (cf. *Thermodynamique*).

1. Calculer la vitesse de propagation du son, dans le dioxygène et dans le diazote, à 300 K, sachant que ces gaz sont des gaz parfaits diatomiques, de facteur thermodynamique $\gamma = 1,4$. On donne leurs masses molaires respectives $32 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

2. Quelle est la valeur de c_s dans le benzène : $\rho = 879 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $\kappa_s = 0,73 \times 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$?

3. Même question dans une roche : $\rho = 2500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $\kappa_s = 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$?

P1– 4. Invariance de l'équation de Maxwell-Faraday dans la transformation de Galilée

Montrer que l'équation structurelle de Maxwell-Faraday, traduisant la loi de l'induction, est invariante par transformation de Galilée.

P1– 5. Non-invariance de l'équation de Maxwell-Ampère dans la transformation de Galilée

Prouver que l'équation non structurelle de Maxwell-Ampère, traduisant le théorème d'Ampère généralisé, n'est pas invariante par transformation de Galilée.

P1– 6. Non-invariance du dalembertien dans la transformation de Galilée

On appelle dalembertien l'opérateur qui apparaît dans l'équation de propagation d'une onde électromagnétique dans le vide le long de la direction Ox (cf. chapitre 9) :

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

1. Établir que l'opérateur $\square$ n'est pas invariant, par changement de référentiel galiléen, pour le groupe de transformation de Galilée.

2. Vérifier qu'il est, en revanche, invariant par changement de référentiel galiléen, pour la transformation de Lorentz-Poincaré.

P1– 7. Invariance du caractère conservatif de la charge dans la transformation de Galilée

L'équation locale $\partial\rho/\partial t = -\operatorname{div} \mathbf{J}$ traduit le caractère conservatif de la charge électrique (cf. *Électromagnétisme*). Établir son invariance par changement de référentiel galiléen, dans la transformation de Galilée.

P1– 8. Vitesse de propagation d'ondes électromagnétiques dans différents milieux

Sachant que l'indice optique du verre et celui de l'eau valent respectivement 1,5 et 1,33, pour la longueur d'onde optique $\lambda = 550 \text{ nm}$, calculer la vitesse de propagation de ces ondes dans ces milieux.

P1– 9. Coordonnées d'événements en cinématique galiléenne

On considère, dans le référentiel $\mathcal{R}'$, les événements E_1 « émission de lumière en O' », E_2 « réflexion de la lumière sur le miroir M' , » situé à la distance $l = 0,5 \text{ m}$ sur l'axe Oy' , et E_3 « réception de la lumière en O' » (Fig. 1.2).

1. Écrire, dans le cadre de la cinématique galiléenne, les coordonnées de ces trois événements dans les référentiels galiléens $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}$, sachant que $\beta_e = v_e/c = 0,2$.

2. En déduire, en fonction de l et β_e , la durée et la distance qui séparent E_1 et E_2 d'une part, et E_1 et E_3 d'autre part. Quels sont les invariants ?

P1– 10. Variante de l'expérience de Fizeau

Une variante de l'expérience de Fizeau a été réalisée à l'aide du montage représenté sur la figure 1.13. Le rayonnement émis par un laser dans des directions opposées est astreint, grâce à quatre miroirs, à se propager dans un tube contenant de l'eau en mouvement. Lorsque l'eau est au repos, la longueur d'onde λ_0 dans le vide, émise par le laser, est telle que le chemin optique, le long du trajet en anneau $M_1M_2M_3M_4M_1$, soit égal à un nombre entier de longueurs d'onde.

1. L'eau étant mise en mouvement, dans le tube AB de longueur l , à la vitesse u , calculer, selon la cinématique galiléenne, la variation de chemin optique pour le rayonnement se propageant dans le sens AB . Même question pour le rayonnement se propageant dans le sens BA .

2. Trouver, en fonction de l , u et de l'indice n de l'eau, la variation de chemin optique ΔL , entre les deux faisceaux émis par le laser, dans des directions opposées. Application numérique : calculer le rapport ΔL sur la longueur d'onde dans le vide du rayonnement du laser, qui vaut $\lambda_0 = 632,8 \text{ nm}$, pour $u = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $n = 1,33$ et $l = 2 \text{ m}$.

P1– 11. Effet Doppler-Fizeau optique en cinématique galiléenne

L'effet Doppler-Fizeau optique est la variation de fréquence que l'on observe lorsque la source et le récepteur sont en mouvement relatif (cf. *Mécanique* et chapitre 3). Pour établir la formule caractéristique, on considère deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ de vitesse $\mathbf{v}_e = v_e \mathbf{e}_x$ par rapport à $\mathcal{R}$. Une source située en O' , origine de $\mathcal{R}' = O'x'y'z'$, émet une onde lumineuse monochromatique plane, de pulsation ω_s et de vecteur d'onde $\mathbf{k}_s$ dans $\mathcal{R}'$ (Fig. 1.14). Le récepteur est lié à $\mathcal{R}$.

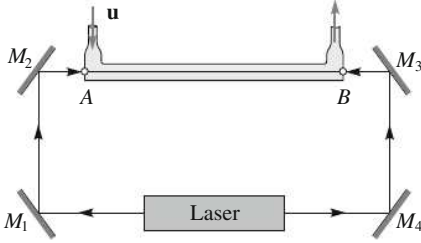


FIG. 1.13.

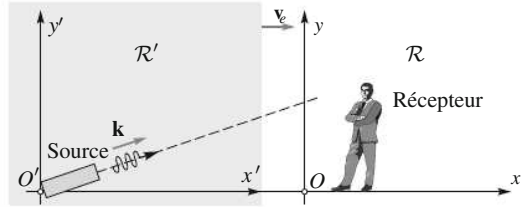


FIG. 1.14.

1. La phase $\Phi = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ est invariante par changement de référentiel galiléen. Trouver, en utilisant la transformation de Galilée, l'expression de la fréquence reçue ν_r en fonction de la fréquence émise ν_s , du rapport $\beta_e = v_e/c$ et de l'angle θ_r que fait la direction de l'onde émise avec l'axe Ox du mouvement.

2. Que devient l'expression précédente pour $\theta_r = \pi/2$ et pour $\theta_r = 0$? Dans ce dernier cas, représenter ν_r en fonction de la position de la coordonnée de la source dans $\mathcal{R}$.

3. Calculer la variation relative de longueur d'onde, définie par $\lambda = c/\nu$, $(\lambda_s - \lambda_r)/\lambda_s$ en fonction de β_e , dans le cas où $\beta_e \ll 1$ et où la source s'éloigne. Application pour $\lambda_s = 656,468 \text{ nm}$ (raie H_α de l'atome d'hydrogène) et $v_e = 2900 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

P1– 12. Variation du facteur relativiste

1. Calculer les valeurs de γ_e correspondant aux valeurs suivantes de β_e :

0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9

Tracer le graphe correspondant. Pour quelles valeurs de β_e , γ_e est-il égal à 5 et à 10 ?

2. Pour quelles valeurs de β_e , le facteur relativiste γ_e est-il égal à $1 + \beta^2/2$ avec une précision meilleure qu'un pour mille ?

P1– 13. Transformation du champ électromagnétique produit par un fil chargé

Un fil rectiligne, uniformément chargé, est fixe par rapport au référentiel $\mathcal{R}'$, lequel est en mouvement de translation rectiligne uniforme, à la vitesse $\mathbf{v}_e = v_e \mathbf{e}_x$, par rapport au référentiel galiléen du laboratoire $\mathcal{R}$. On désigne par Λ_0 la charge linéique mesurée dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}'$.

1. Déterminer, en point M du plan Oxy , situé à la distance r de l'axe Ox du fil, les champs électrique et magnétique $\mathbf{E}', \mathbf{B}'$ créés par le fil dans $\mathcal{R}'$. Calculer ces champs dans le cas où $\Lambda_0 = 0,2 \text{ nC} \cdot \text{m}^{-1}$, $r = 10 \text{ cm}$ et $v_e = 0,5 c$.

2. À l'aide des formules de transformation des champs, en théorie newtonienne, trouver les champs $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ créés par le fil dans $\mathcal{R}$. Établir l'expression de $\mathbf{B}$ par une méthode directe. Calculer sa valeur et la comparer au champ magnétique terrestre qui est de l'ordre de $30 \mu\text{T}$. Conclure.

3. Quels sont les champs $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ obtenus en utilisant les formules de transformation des champs de la théorie einsteinienne.

2

Transformation de Lorentz-Poincaré. Intervalle entre deux événements

La transformation spéciale de Lorentz-Poincaré a été introduite par Lorentz et Poincaré pour satisfaire à l'invariance des équations de Maxwell par changement de référentiel galiléen. En étendant le principe de relativité à tous les phénomènes physiques, électromagnétisme compris, Poincaré puis Einstein réussirent, du même coup, à lever la crise provoquée par les résultats de l'expérience de Michelson et Morley.

Nous nous proposons ici d'établir la transformation de Lorentz à partir de considérations physiques et d'analyser ses propriétés. Ensuite, nous introduirons le concept d'intervalle entre deux événements, lequel joue un rôle essentiel en raison de son invariance par changement de référentiel galiléen, le temps d'un référentiel n'étant plus le paramètre d'évolution universel.

I. — TRANSFORMATION DE LORENTZ-POINCARÉ

I. 1. — Rappel de l'expression de la transformation de Lorentz-Poincaré

Soient deux référentiels galiléens, l'un $\mathcal{R}$ et l'autre $\mathcal{R}'$ se déplaçant par rapport à $\mathcal{R}$ à la vitesse $\mathbf{v}_e = v_e \mathbf{e}_x$, dirigée suivant l'axe Ox . On sait que les coordonnées spatio-temporelles d'un même événement dans ces deux référentiels sont reliées par les équations :

$$ct = \gamma_e(ct' + \beta_e x') \quad x = \gamma_e(x' + \beta_e ct') \quad y = y' \quad z = z'$$

si les origines des durées dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont prises lorsque les origines de l'espace coïncident.

Exemple : Reprenons l'exemple d'une source lumineuse placée à l'origine O' du référentiel $\mathcal{R}' = O'x'y'z'$, de vitesse d'entraînement $\beta_e c$ selon Ox , par rapport à $\mathcal{R} = Oxyz$ (Fig. 2.1).

Les coordonnées dans $\mathcal{R}'$ des événements E_1 , « émission de lumière en O' », E_2 « réflexion sur le petit miroir plan M' », situé sur l'axe Oy' à la distance l , et E_3 « détection de la lumière en O' », sont respectivement, ct étant la première d'entre elles :

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \left| \begin{array}{l} ct' = 0 \\ x' = 0 \\ y' = 0 \\ z' = 0 \end{array} \right| & \mathcal{R}' \\ E_2 & \left| \begin{array}{l} l \\ 0 \\ l \\ 0 \end{array} \right| & \mathcal{R}' \\ E_3 & \left| \begin{array}{l} 2l \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right| & \mathcal{R}' \end{array}$$

On en déduit, par transformation de Lorentz-Poincaré, les coordonnées de ces mêmes événements dans $\mathcal{R}$.

$$\begin{array}{c} E_1 \\ \mathcal{R} \end{array} \left| \begin{array}{l} ct = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} E_2 \\ \mathcal{R} \end{array} \left| \begin{array}{l} \gamma_e l \\ \gamma_e \beta_e l \\ l \\ 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} E_3 \\ \mathcal{R} \end{array} \left| \begin{array}{l} 2\gamma_e l \\ 2\gamma_e \beta_e l \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

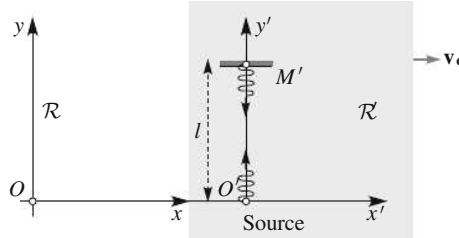


FIG. 2.1.

I. 2. — Établissement de la transformation de Lorentz-Poincaré

Considérons un signal lumineux émis suivant Ox par le point O , à un instant pris comme origine dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$; à cet instant, O et O' coïncident. Notons que, l'entraînement se faisant suivant la direction des x ou x' , les coordonnées transversales sont inchangées : $y = y'$ et $z = z'$.

a) Linéarité

D'après le principe de relativité, un point matériel isolé a un mouvement rectiligne uniforme par rapport aux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. On a donc, pour un tel mouvement suivant l'axe d'entraînement Ox :

$$x = vt + x_0 \quad \text{et} \quad x' = v't' + x'_0$$

Comme les formules de transformation entre les coordonnées spatio-temporelles doivent transformer la deuxième équation en la première, elles sont *linéaires*, c'est-à-dire que la transformation de x', t' en x, t se met sous la forme :

$$x = Ax' + Bt' \quad \text{et} \quad t = Cx' + Dt'$$

b) Réciprocité

Exprimons que l'origine O' de $\mathcal{R}'$, de coordonnée $x' = 0$ dans $\mathcal{R}'$, a pour coordonnée spatiale $x = v_e t$ dans $\mathcal{R}$, et que réciproquement l'origine O de $\mathcal{R}$, de coordonnée $x = 0$ dans $\mathcal{R}$, a pour coordonnée spatiale $x' = -v_e t'$ dans $\mathcal{R}'$. Il vient, d'une part :

$$x = A \times 0 + Bt' = v_e t \quad \text{et} \quad t = C \times 0 + Dt' \quad \text{d'où} \quad Bt' = v_e Dt' \quad \text{et donc} \quad B = v_e D$$

D'autre part $x = 0 = A \times (-v_e t') + Bt'$, d'où $B = v_e A$. On en déduit $A = D$, $B = v_e A$ et par conséquent :

$$x = A(x' + v_e t') \quad \text{et} \quad t = At' + Cx'$$

c) Équation d'onde

Pour déterminer A et C , considérons, à l'instant initial, l'émission d'une onde lumineuse sphérique en O et donc aussi en O' . Cette onde atteint un détecteur situé au point P , d'abscisse x_p sur l'axe d'entraînement dans $\mathcal{R}$, à l'instant t_p ; dans $\mathcal{R}'$, elle atteint ce point P d'abscisse x'_p , à l'ins-

tant t'_p . On a donc :

$$x_p^2 = c^2 t_p^2 \quad \text{et} \quad x_p'^2 = c^2 t_p'^2$$

La première équation s'écrit aussi :

$$A^2 (x'_p + v_e t'_p)^2 = c^2 (A t'_p + C x'_p)^2$$

soit, en développant :

$$(A^2 - C^2 c^2) x_p'^2 - A^2 t_p'^2 (c^2 - v_e^2) - 2A x'_p t'_p (C c^2 - v_e A) = 0$$

En identifiant à $x_p'^2 = c^2 t_p'^2$, on obtient :

$$A^2 - C^2 c^2 = 1 \quad C c^2 = v_e A \quad \text{d'où} \quad A^2 (1 - \beta_e^2) = 1 \quad \text{et} \quad A = (1 - \beta_e^2)^{-1/2} = \gamma_e$$

Finalement, on trouve bien :

$$x = \gamma_e (x' + v_e t') \quad \text{et} \quad t = \gamma_e \left(t' + \frac{v_e x'}{c^2} \right) \quad \text{avec} \quad \beta_e = \frac{v_e}{c} \quad \text{et} \quad \gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2}$$

Remarque : On montre que l'on peut établir la structure de la transformation de Lorentz-Poincaré, à partir des seules propriétés de réciprocité et de transitivité des transformations linéaires entre trois référentiels $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}''$. Évidemment, une constante s'introduit naturellement que l'on identifie à la constante d'Einstein c , après application de cette transformation aux ondes lumineuses. Dans ce contexte, un astrophysicien français L. Nottale a utilisé la structure de la transformation de Lorentz-Poincaré pour effectuer des transformations d'échelle et tenter ainsi d'établir des liens entre la physique microscopique et la physique macroscopique.

I. 3. — Autres écritures de la transformation de Lorentz-Poincaré

a) Écriture vectorielle

Les formules de transformation de Lorentz-Poincaré, entre les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, peuvent se mettre sous forme vectorielle, en introduisant les vecteurs positions :

$$\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z \quad \mathbf{r}' = x' \mathbf{e}_x + y' \mathbf{e}_y + z' \mathbf{e}_z \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\beta}_e = \frac{\mathbf{v}_e}{c}$$

En effet, puisque $v_e = c \boldsymbol{\beta}_e \cdot \mathbf{e}_x$, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}' + (\gamma_e - 1) (\boldsymbol{\beta}_e \cdot \mathbf{r}') \frac{\boldsymbol{\beta}_e}{\beta_e} + \gamma_e \boldsymbol{\beta}_e c t' \\ c t &= \gamma_e (c t' + \boldsymbol{\beta}_e \cdot \mathbf{r}') \end{aligned}$$

b) Écriture hyperbolique

On exprime souvent les formules de la transformation de Lorentz-Poincaré entre les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, à l'aide du seul paramètre r_e défini par :

$$\tanh r_e = \frac{\exp r_e - \exp(-r_e)}{\exp r_e + \exp(-r_e)} = \frac{v_e}{c} \quad \text{soit} \quad r_e = \arg \tanh \beta_e$$

Le facteur relativiste $\gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2}$ s'écrit alors :

$$\gamma_e = \left\{ 1 - \left[\frac{\exp r_e - \exp(-r_e)}{\exp r_e + \exp(-r_e)} \right]^2 \right\}^{-1/2} = \frac{\exp r_e + \exp(-r_e)}{2} = \cosh r_e$$

On en déduit :

$$\gamma_e \beta_e = \cosh r_e \times \tanh r_e = \frac{\exp r_e - \exp(-r_e)}{2} = \sinh r_e$$

Finalement :

$$\begin{aligned} ct &= ct' \cosh r_e + x' \sinh r_e \\ x &= x' \cosh r_e + ct' \sinh r_e \end{aligned}$$

L'argument r_e , sans dimension, est parfois appelé la *rapidité*. On voit que cette quantité tend vers l'infini lorsque la vitesse d'entraînement tend vers c . Ce nouveau concept présente l'avantage de souligner l'inaccessibilité de la vitesse de la lumière pour des particules de masse non nulle. Sur la figure 2.2, on a représenté la rapidité r_e de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$, en fonction de $\beta_e = v_e/c$.

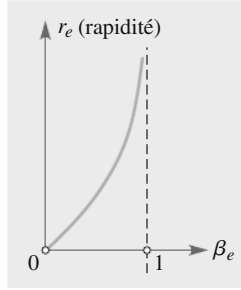


FIG. 2.2.

I. 4. — Propriétés de la transformation de Lorentz-Poincaré

Les propriétés de la transformation de Lorentz-Poincaré découlent de ce qui précède.

(1) Les formules de transformation de x', y', z', ct' en x, y, z, ct sont linéaires.

(2) Elles sont réciproques, ce qui exprime l'équivalence physique des référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, et donc l'impossibilité de hiérarchiser $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. On passe de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$ en permutant les coordonnées et en changeant v_e en $-v_e$:

$$ct' = \gamma_e(ct - \beta_e x) \quad x' = \gamma_e(x - \beta_e ct) \quad y' = y \quad z' = z$$

(3) La constante d'Einstein c apparaît comme une *vitesse limite*, puisque γ_e n'est réel que si $v_e < c$.

Ce résultat a été vérifié expérimentalement à de multiples reprises, notamment par le physicien américain W. Bertozzi en 1964, avec des électrons issus d'un accélérateur linéaire ; la tension d'accélération V_a était celle fournie par une machine électrostatique de type van de Graff (cf. *Électromagnétisme*). Sur la figure 2.3a, on a représenté le dispositif utilisé ; pour chaque valeur de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_k$ des électrons, laquelle vaut eV_a , on mesure la durée τ qui sépare le passage des électrons, d'abord en un point A , puis au point B , où se trouve le détecteur, lequel est situé à une distance L de A . Sur un graphe, on a porté v^2/c^2 avec $v = L/\tau$, en fonction de $\mathcal{E}_k/(m_e c^2)$; on constate que v^2/c^2 atteint pratiquement la valeur asymptotique 1, lorsque la tension V_a est supérieure à une di-

zaine de kilovolts (Fig. 2.3b) ; pour $L = 8,4$ m et $\mathcal{E}_k = 1$ MeV, la durée de parcours est d'environ 0,30 ns.

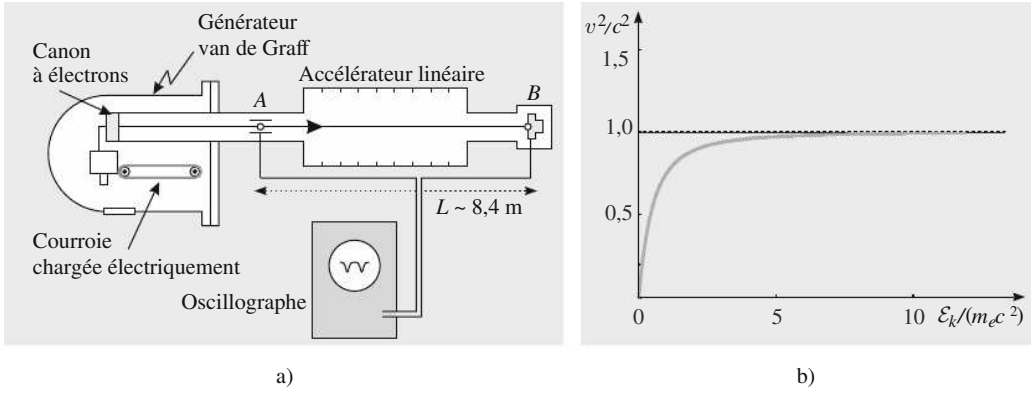


FIG. 2.3.

(4) La transformation de Lorentz-Poincaré restitue la transformation de Galilée entre deux référentiels galiléens pour $\beta_e \ll 1$. En effet, γ_e est alors sensiblement égal à 1, d'où $\beta_e x \ll ct$ et donc $ct' \approx ct$, encore faut-il dans ce cas que les valeurs de x ne soient pas trop grandes : $x \ll ct/\beta_e$.

(5) Elle réalise l'invariance de la quantité $s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$. En effet, en remplaçant, dans le premier membre, ct , x , y et z par les expressions fournies par la transformation, on a :

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \gamma_e^2 (ct' + \beta_e x')^2 - \gamma_e^2 (x' + \beta_e ct')^2 - y'^2 - z'^2 = \gamma_e^2 c^2 t'^2 (1 - \beta_e^2) - \gamma_e^2 x'^2 (1 - \beta_e^2) - y'^2 - z'^2$$

puisque les doubles produits s'éliminent. Comme $1 - \beta_e^2 = 1/\gamma_e^2$, on en déduit :

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

Nous analyserons ultérieurement la signification de cette invariance (cf. chapitre 3).

I. 5. — Vitesses supraluminiques

On dit qu'une vitesse est supraluminique lorsqu'elle est supérieure à la constante d'Einstein c .

a) Vitesse de phase en électromagnétisme

La vitesse de phase v_φ d'un groupe d'ondes électromagnétiques qui se propagent dans un milieu conducteur, est supraluminique, car on a, ω_p étant la pulsation plasma (cf. *Électromagnétisme*) :

$$v_\varphi = c \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)^{-1/2} > c$$

alors que la vitesse de groupe, qui est la vitesse avec laquelle le groupe d'ondes se déplace, est, elle, inférieure à c , puisqu'on a, dans ce cas :

$$v_g = \frac{c^2}{v_\varphi} < c$$

C'est ce que l'on constate dans un guide d'ondes centimétriques, vide, à l'intérieur duquel se propage une onde transverse électrique de mode $(1, 0)$. Cependant, cette vitesse de phase, qui est la vitesse avec laquelle la *phase* du groupe d'ondes se propage, n'est pas celle d'un objet physique.

b) Vitesse supraluminique de la projection d'une source lumineuse

En astronomie, on introduit parfois la vitesse supraluminique avec laquelle la projection radiale d'une source lumineuse se déplace lorsque cette dernière tourne sur elle-même. Par exemple, lorsque la source effectue une rotation complète en une minute, à la manière d'un phare, la vitesse de sa projection radiale, à une distance $d = 1$ parsec ($1 \text{ parsec} \approx 3 \times 10^{16} \text{ m}$), est, en désignant par Ω la vitesse de rotation :

$$v_p = \Omega d = \frac{2\pi}{60} \times 3 \times 10^{16} \approx 3,14 \times 10^{15} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{soit} \quad v_p \approx 10^7 c$$

Cette valeur énorme ne contredit pas la théorie d'Einstein, car la vitesse de la projection radiale n'est pas celle d'un objet matériel.

c) Vitesse de groupe supérieure à c

Depuis quelques années, précisément 1990, les physiciens étudient la propagation de la lumière dans des matériaux de dispersion lumineuse *anormale*, c'est-à-dire tels que l'indice n ne diminue pas avec la longueur d'onde λ dans le vide, selon la loi bien connue de Cauchy $n = n_0 + A/\lambda^2$, mais augmente. Rappelons la formule de J. Rayleigh reliant vitesse de phase et vitesse de groupe pour une onde lumineuse (cf. *Électromagnétisme*) :

$$v_g = \frac{v_\varphi}{1 - (\lambda/n) \, dn/d\lambda} = \frac{c}{n - \lambda \, dn/d\lambda}$$

puisque $v_\varphi = c/n$. On voit que :

$$v_g > c \quad \text{si} \quad n - \lambda \frac{dn}{d\lambda} < 1 \quad \text{soit} \quad \frac{dn}{d\lambda} > \frac{n-1}{\lambda} > 0$$

Cependant, de telles vitesses de groupe dans ces milieux matériels particuliers, à dispersion *anormale*, ne contredisent pas la théorie d'Einstein, car elles n'impliquent *ni transfert d'énergie ni transfert d'information* (cf. *Thermodynamique*).

d) Tachyons

Dans les années 1970, certains physiciens ont imaginé l'existence de particules se déplaçant à des vitesses supérieures à la vitesse de la lumière, auxquelles ils ont donné le nom de *tachyons* (prononcer taquion) ; ce mot vient du grec $\tau\alpha\chi\upsilon\zeta$ qui signifie rapide. Pour ces particules, on a :

$$\gamma = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = \frac{1}{i(v^2/c^2 - 1)^{1/2}} = -i\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)^{-1/2} > 0$$

Ces particules n'ont jamais pu être mises en évidence. Récemment, on en a reparlé à propos de la publication, en septembre 2011, de l'expérience OPERA, relative à des neutrinos, qui auraient parcouru une distance de 730 km à une vitesse supérieure à c ! Comme la relativité restreinte est fondée sur de solides bases épistémologiques (symétrie des lois) et expérimentales (précision relative de l'ordre de 10^{-10}), la confirmation de ces résultats par d'autres voies s'impose avant tout. En effet, trois mois suffiront à déceler plusieurs anomalies expérimentales qui conduiront au retrait de l'annonce.

II. — INTERVALLE ENTRE DEUX ÉVÉNEMENTS

II.1. — Définition et intérêt

Nous avons vu que l'intervalle de temps qui sépare deux événements E_1 et E_2 n'était plus un invariant, en cinématique einsteinienne :

$$t'_2 - t'_1 \neq t_2 - t_1$$

La question qui se pose alors est la recherche d'un nouvel invariant.

En utilisant les formules de la transformation de Lorentz-Poincaré, on montre aisément que :

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2$$

Il suffit, pour le prouver, d'utiliser les formules de transformation de Lorentz :

$$(ct_2 - ct_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = [\gamma_e(ct'_2 - ct'_1) + \gamma_e\beta_e(x'_2 - x'_1)]^2 - [\gamma_e(x'_2 - x'_1) + \gamma_e\beta_e(ct'_2 - ct'_1)]^2$$

Il vient, en effectuant, en ordonnant et en simplifiant les doubles produits :

$$(ct_2 - ct_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = \gamma_e^2(ct'_2 - ct'_1)^2(1 - \beta_e^2) - \gamma_e^2(x'_2 - x'_1)^2(1 - \beta_e^2)$$

On en déduit l'invariance recherchée. Aussi introduit-on le concept d'*intervalle entre deux événements*, de coordonnées spatio-temporelles respectives x_1, y_1, z_1, t_1 et x_2, y_2, z_2, t_2 , défini par la quantité s_{12} telle que :

$$s_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

Dans ce contexte, l'invariance de la quantité $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ traduit celle du carré de l'intervalle entre l'événement générique E , de coordonnées x, y, z, t , et de l'événement origine, de coordonnées nulles :

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2(t - 0)^2 - (x - 0)^2 - (y - 0)^2 - (z - 0)^2$$

On voit que s_{12}^2 s'écrit aussi :

$$s_{12}^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta l^2 \quad \text{en posant} \quad \Delta t = t_2 - t_1 \quad \text{et} \quad \Delta l = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}$$

Si, dans l'intervalle, la contribution temporelle est supérieure à la contribution spatiale, $s_{12}^2 > 0$ et s_{12} est un nombre réel ; l'intervalle est du *genre temps* car $c^2\Delta t^2 > \Delta l^2$.

Si la contribution spatiale est supérieure à la contribution temporelle spatiale, $s_{12}^2 < 0$ et s_{12} est un nombre imaginaire ; l'intervalle est du *genre espace* car $\Delta l^2 > c^2\Delta t^2$. Pour de tels événements, il ne peut y avoir de relation de causalité, puisque :

$$\Delta l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 > c^2(t_2 - t_1)^2$$

Si les contributions temporelle et spatiale sont égales, $s_{12}^2 = 0$ ainsi que s_{12} : l'intervalle est du *genre lumière*.

Notons que cette classification est invariante par changement de référentiel galiléen, et par conséquent présente un caractère universel.

Entre deux événements infiniment *voisins*, l'intervalle élémentaire est tel que :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Le carré ds^2 de l'intervalle définit une métrique de l'*espace-temps* à quatre dimensions, le temps et les trois dimensions spatiales.

Dans l'approximation newtonienne, on obtient :

$$ds^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2} \right) \approx c^2 dt^2$$

On retrouve bien l'invariance du temps, c'est-à-dire son universalité, caractéristique de la mécanique newtonienne.

Remarque : Certains auteurs, et non des moindres puisque Poincaré et Minkowski furent de ceux-là, ont défini le carré de l'intervalle par la quantité *opposée* à celle que nous avons adoptée. Bien que les deux définitions soient d'une même efficacité mathématique, nous avons choisi celle adoptée par Einstein dans sa publication de 1916, laquelle privilégie les phénomènes présentant entre eux une relation de causalité, puisque dans l'expression de l'intervalle on affecte d'un signe positif le terme temporel et de signes négatifs les termes spatiaux. Cependant l'argument décisif en faveur de la convention d'Einstein, qui est celle que nous avons choisie, est le suivant : l'intervalle est le concept qui se substitue au temps newtonien universel, et non à la distance qui sépare deux événements, laquelle n'est pas invariante par changement de référentiel galiléen, même en cinématique newtonienne (chapitre 1). En bref, contrairement à ce que dit Newton lui-même, l'espace en mécanique newtonienne n'est pas universel mais relatif ; seul le temps newtonien est universel.

Exemple : Calculons l'intervalle entre les deux événements suivants E_1 et E_2 , de coordonnées respectives :

$$\begin{array}{l|l} E_1 & \begin{array}{l} t_1 = 3 \text{ ns} \\ x_1 = 0,2 \text{ m} \end{array} \\ \mathcal{R} & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} E_2 & \begin{array}{l} t_2 = 6 \text{ ns} \\ x_2 = 0,8 \text{ m} \end{array} \\ \mathcal{R} & \end{array}$$

Comme $ct_1 = 0,9 \text{ m}$ et $ct_2 = 1,8 \text{ m}$, il vient :

$$s_{12}^2 = 0,9^2 - 0,6^2 = 0,45 \quad \text{d'où} \quad s_{12} = 0,67 \text{ m}$$

Cet intervalle est du genre temps.

II. 2. — Ligne d'Univers. Cône de lumière

Il est naturel de représenter le mouvement rectiligne d'une particule sur un axe Ox , O étant l'endroit où elle se trouvait à l'instant pris comme origine dans le système de coordonnées (x, ct) . La trajectoire du point représentatif Q , ou ligne d'Univers dans l'*espace-temps*, est forcément contenue dans une certaine région du plan (x, ct) , définie par $|x| < c|t|$, puisque c est une vitesse limite indépassable. On distingue ainsi trois zones (Fig. 2.4a).

(1) La zone pour laquelle $|x| < |ct|$ correspond à des intervalles du genre temps. Suivant le signe de t , l'événement se produit dans le passé ou dans le futur.

(2) Celle pour laquelle $|x| > |ct|$ est relative à des intervalles du genre espace.

(3) Enfin, celle pour laquelle $|x| = |ct|$ définit des intervalles du genre lumière.

Les droites $x = ct$ et $x = -ct$, appelées droites de lumière, forment un cône plat, appelé *cône de lumière*. Elles définissent l'horizon des événements perçus par un observateur situé en O .

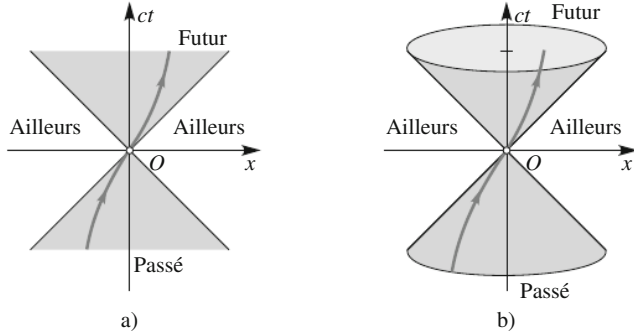


FIG. 2.4.

À trois dimensions x, y, ct , les intervalles du genre espace sont caractérisés par l'équation :

$$x^2 + y^2 \leq c^2 t^2$$

Le cas limite définit une surface ayant la forme d'un cône ; aussi l'appelle-t-on *cône de lumière* (Fig. 2.4b). À quatre dimensions x, y, z, ct , c'est un hypercône d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq c^2 t^2$$

II. 3. — Géométrie dans l'espace-temps

On peut établir un parallèle entre la géométrie habituelle des *points* du plan cartésien Oxy et la géométrie des événements qui s'impose en relativité à deux dimensions (x, ct).

Dans le premier cas, bien connu (Fig. 2.5a), la représentation des points du plan s'appuie sur l'invariance de la distance l entre deux points A et B , de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) :

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l^2$$

Dans le plan (x, y) , tout élément curviligne ds est plus long que les éléments correspondants dx et dy :

$$dl^2 = dx^2 + dy^2$$

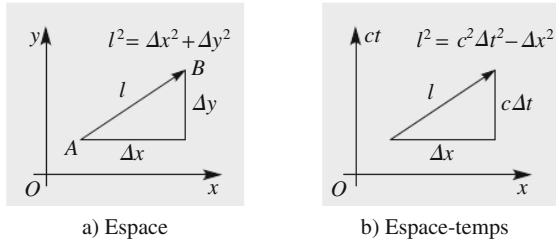


FIG. 2.5.

En géométrie de l'espace-temps (Fig. 2.5b), la représentation des événements s'appuie, elle, sur l'invariance du carré de l'intervalle entre *deux* événements E_1 et E_2 :

$$(ct_2 - ct_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = s_{12}^2$$

Dans le plan (x, ct) , tout élément d'intervalle ds est plus *court* (!) que $c dt$:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2$$

La géométrie des événements de l'espace-temps n'est donc pas intuitive.

II.4. — Ensemble des référentiels associés à un intervalle

Soient deux événements E_1 et E_2 , de coordonnées respectives $x_1, 0, 0, ct_1$ et $x_2 > x_1, 0, 0, ct_2 > ct_1$, dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Dans le système d'axes orthonormés où l'on porte $x_2 - x_1$ et $c(t_2 - t_1)$, l'origine représente l'événement E_1 , alors qu'un point du plan désigne l'événement E_2 . L'ensemble des points caractérisés par une valeur déterminée du carré de l'intervalle entre E_1 et E_2 appartient aux hyperboles d'équations :

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = s^2$$

Notons que chaque point sur une hyperbole correspond à un référentiel déterminé.

Si les intervalles sont du genre temps, $s^2 > 0$; les courbes sont les hyperboles H_t de la figure 2.6. En revanche, s'ils sont du genre espace, $s^2 < 0$; les courbes sont les hyperboles H_e .

(1) Lorsque l'intervalle est du genre *temps*, il existe un référentiel galiléen particulier pour lequel les deux événements se produisent en un même point de l'espace : point T_1 sur la figure puisque $t_2 > t_1$.

Exemple : Si $ct_1 = 0,4$ m, $x_1 = 1$ m, $ct_2 = 1,6$ m, $x_2 = 2$ m, alors $s_{12}^2 = (1,2)^2 - 1^2 = 0,44$ m² et :

$$x'_2 - x'_1 = \gamma_e[(x_2 - x_1) - \beta_e(ct_2 - ct_1)] = 0 \quad \text{si} \quad v_e = c \frac{x_2 - x_1}{ct_2 - ct_1} = 0,83c$$

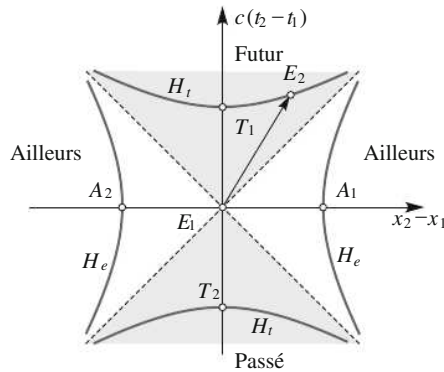


FIG. 2.6.

(2) Lorsque l'intervalle est du genre *espace*, il existe un référentiel galiléen particulier dans lequel les deux événements sont simultanés : point A_1 sur la figure, puisque $x_2 > x_1$. On peut déterminer aisément ce référentiel $\mathcal{R}'$, comme le montre l'exemple qui suit.

Si $x_1 = 1$ m, $ct_1 = 0,4$ m, $x_2 = 2$ m, $ct_2 = 0,8$ m, alors $s_{12}^2 = (0,4)^2 - 1^2 = -0,84$ m² et :

$$c(t'_2 - t'_1) = \gamma_e[c(t_2 - t_1) - \beta_e(x_2 - x_1)] = 0 \quad \text{d'où} \quad v_e = c \frac{ct_2 - ct_1}{x_2 - x_1} = 0,4c$$

III. — FORMALISME QUADRIDIMENSIONNEL

Ce formalisme, introduit par le mathématicien balte H. Minkowski, permet de développer techniquement un calcul vectoriel adapté à l'espace-temps de la relativité restreinte. Il s'appuie évidemment sur l'invariance du carré s_{12}^2 de l'intervalle qui sépare deux événements.

III.1. — Quadrivecteur

On appelle *quadrivecteur* un vecteur, noté $4-x$, dont les quatre composantes x_0, x_1, x_2, x_3 , de même dimension physique, se transforment dans un changement de référentiel galiléen de la même façon que ct, x, y et z . Par conséquent :

$$x_0 = \gamma_e(x'_0 + \beta_e x'_1) \quad x_1 = \gamma_e(x'_1 + \beta_e x'_0) \quad x_2 = x'_2 \quad x_3 = x'_3$$

Ces relations linéaires peuvent être écrites sous forme matricielle en introduisant la matrice suivante de Lorentz-Poincaré :

$$L = \begin{bmatrix} \gamma_e & \gamma_e \beta_e & 0 & 0 \\ \gamma_e \beta_e & \gamma_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En effet, on a :

$$4-x = L\{4-x'\} \quad \text{soit explicitement} \quad \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_e & \gamma_e \beta_e & 0 & 0 \\ \gamma_e \beta_e & \gamma_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}$$

Le déterminant de la matrice L vaut 1, car lorsqu'on le développe par la ligne 4, il s'explique selon :

$$\det L = 1 \times \det \begin{bmatrix} \gamma_e & \gamma_e \beta_e & 0 \\ \gamma_e \beta_e & \gamma_e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \times 1 \times \det \begin{bmatrix} \gamma_e & \gamma_e \beta_e \\ \gamma_e \beta_e & \gamma_e \end{bmatrix} = \gamma_e^2(1 - \beta_e^2) = 1$$

Il est souvent commode d'introduire la matrice carrée relative aux seules coordonnées intéressantes x_0 et x_1 . La relation matricielle précédente se réduit alors à :

$$2-x = L_r\{2-x'\} \quad \text{avec} \quad L_r = \begin{bmatrix} \gamma_e & \gamma_e \beta_e \\ \gamma_e \beta_e & \gamma_e \end{bmatrix}$$

Cette relation s'explique alors selon :

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_e & \gamma_e \beta_e \\ \gamma_e \beta_e & \gamma_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{bmatrix}$$

Exemple : les coordonnées d'un événement E_1 dans $\mathcal{R}$ sont, en mètre : $ct = 1$; $x = 0,6$; $y = 2$; $z = 1,5$. Dans $\mathcal{R}'$, tel que $v_e = 0,6c$, soit $\beta_e = 0,6$, $\gamma_e = 1,25$ et $\gamma_e \beta_e = 0,75$, les

coordonnées de ce même événement s'obtiennent à partir de l'équation matricielle $4 - x' = L' \{4 - x\}$ où L' est la matrice *inverse* de L , que l'on obtient en changeant β_e en $-\beta_e$:

$$\begin{bmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,25 & -0,75 & 0 & 0 \\ -0,75 & 1,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,6 \\ 2 \\ 1,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0 \\ 2 \\ 1,5 \end{bmatrix}$$

On en déduit aisément le carré de l'intervalle qui sépare E_1 de l'événement origine E_0 :

$$s_{01/\mathcal{R}'}^2 = 0,8^2 - 2^2 - 1,5^2 = -5,61 \text{ m}^2 \quad \text{ou} \quad s_{01/\mathcal{R}}^2 = 1^2 - 0,6^2 - 2^2 - 1,5^2 = -5,61 \text{ m}^2$$

III. 2. — Forme métrique de l'espace-temps

L'invariance du carré de l'intervalle suggère de définir le produit scalaire de deux quadrivercteurs $4 - a$ et $4 - b$ comme suit :

$$(4 - a \cdot 4 - b) = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3$$

On en déduit la *pseudo-norme* du quadrivercteur $4 - a$:

$$\|4 - a\|^2 = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2$$

Le carré ds^2 de l'intervalle élémentaire, entre deux événements voisins, s'identifie à la pseudo-norme du quadrivercteur élémentaire espace-temps :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \|d(4 - x)\|^2$$

Plus généralement, on l'écrit :

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dx_i dx_j$$

i et j étant des nombres pouvant prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, avec $g_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, et :

$$g_{00} = 1 \quad g_{11} = -1 \quad g_{22} = -1 \quad g_{33} = -1$$

De même que $d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ est appelé la forme métrique associée à l'espace euclidien habituel, ds^2 est la forme métrique de l'espace-temps pseudo-euclidien de la relativité restreinte. La relation entre ces deux formes est immédiate :

$$ds^2 = c^2 d\ell^2 - d\ell^2$$

On caractérise souvent la forme métrique ds^2 par sa *signature*, c'est-à-dire l'ensemble des quatre signes $+$ $-$ $-$ $-$ des facteurs g_{ij} . Cette forme métrique, directement liée au carré de l'intervalle élémentaire, qui est *positive* lorsque l'intervalle est du genre *temps*, est celle qui est le plus souvent adoptée.

Remarques : 1) Comme on l'a déjà dit, la forme métrique *opposée*, c'est-à-dire $d\ell^2 - c^2 dt^2$, de signature $+$ $+$ $-$ $-$, initialement introduite par Poincaré et Minkowski, est de nos jours délaissée au profit de celle que nous avons adoptée, conformément au choix d'Einstein. Actuellement, l'argument avancé par ses adeptes est généralement d'ordre pédagogique : « elle est un prolongement de la forme métrique euclidienne à trois dimensions $d\ell^2$ », disent-ils. Dans ce contexte, la liaison est souvent poussée encore plus loin en introduisant la variable complexe $\sigma = ict$ avec $i^2 = -1$; on obtient alors $ds^2 = d\ell^2 + d\sigma^2$. C'est ce que l'on peut lire dans la publication originale de Poincaré, dans laquelle c est pris égal à l'unité (cf. bibliographie). Nous n'avons pas été sensibles à ces arguments pour plusieurs raisons :

- i) Ce choix laisse supposer que l'intervalle spatio-temporel serait la généralisation de l'intervalle spatial dl , lequel, rappelons-le, pour deux événements, n'est pas un invariant, car, même en cinématique newtonienne, l'espace est relatif : seul le temps est universel !
- ii) L'introduction du « temps complexe » ict risque d'encombrer inutilement une discipline déjà largement éprouvée par l'irrationnalisme.
- iii) Enfin, en relativité générale, l'argument précédent s'effondre, puisque les facteurs $g_{\mu\nu}$ n'ont plus les valeurs simples ± 1 .
- 2) En langage tensoriel on écrit préférentiellement

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dx^i dx^j \quad \text{ou mieux} \quad ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

en désignant par dx^i (i étant un indice et non une puissance) les différentielles des coordonnées ct, x, y, z , et en adoptant la convention d'Einstein sur les sommations (cf. Annexe 2).

III. 3. — Diagramme espace-temps bidimensionnel de Minkowski

Le diagramme espace-temps bidimensionnel a été proposé par Minkowski en 1908. Il consiste à représenter, dans un même plan, les coordonnées spatio-temporelles (x, ct) et (x', ct') d'un même événement dans les référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ en mouvement le long de l'axe Ox de $\mathcal{R}$, à la vitesse v_e .

Dans le système d'axes orthonormés (x, ct) associé à $\mathcal{R}$, un événement est représenté par un point Q . Cherchons le nouveau système d'axes (x', ct') , associé au référentiel $\mathcal{R}'$, dans lequel le même événement est représenté par le même point Q (Fig. 2.7). Pour cela, utilisons les formules de transformation de Lorentz :

$$ct' = \gamma_e(ct - \beta_e x) \quad \text{et} \quad x' = \gamma_e(x - \beta_e ct)$$

Les points de l'axe x' sont définis par $ct' = 0$; par conséquent, cet axe a pour équation :

$$ct - \beta_e x = 0 \quad \text{soit} \quad ct = \beta_e x$$

De même, les points de l'axe ct' sont définis par $x' = 0$, d'où l'équation de cet axe :

$$x - \beta_e ct = 0 \quad \text{soit} \quad ct = \frac{x}{\beta_e}$$

Notons que les axes Ox' et Oct' ne sont pas orthonormés, puisque le produit des pentes de ces axes n'est pas égal à -1 , mais à 1 :

$$\beta_e \times \frac{1}{\beta_e} = 1$$

Si $\beta_e > 0$, les deux axes sont dans le premier quadrant du plan (x, ct) , le premier Ox' dans la première moitié, le second Oct' dans la deuxième moitié.

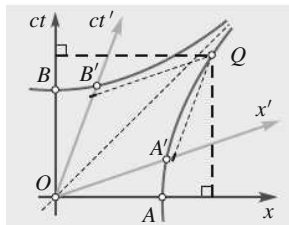


FIG. 2.7.

Il est judicieux de tracer les hyperboles d'équations :

$$c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2 = -1 \quad \text{et} \quad c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2 = 1$$

Elles donnent l'unité de longueur qui est relative à chaque système d'axes (Fig. 2.7). Cette unité est représentée par les longueurs OA et OB dans le système (x, ct) , et par les longueurs OA' et OB' dans le système (x', ct') . On voit que le référentiel $\mathcal{R}'$ a ses axes d'autant plus proches de la diagonale du premier quadrant que la vitesse d'entraînement est plus grande.

Ce diagramme est parfois utilisé en cinématique relativiste, lorsqu'on souhaite « visualiser » les transformations des durées et des longueurs, mais sa lecture n'est pas commode, en raison des unités de longueur différentes sur les axes correspondants.

III. 4. — Groupe de transformation de Lorentz-Poincaré

C'est Poincaré qui souligna, le premier, la structure de groupe de la transformation de Lorentz-Poincaré. La propriété essentielle de la structure de groupe est la loi dite de composition interne, selon laquelle, entre trois référentiels $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}''$, la transformation de $\mathcal{R}''$ à $\mathcal{R}$, qui résulte des deux transformations de Lorentz-Poincaré successives, de $\mathcal{R}''$ à $\mathcal{R}'$ puis de $\mathcal{R}'$ à $\mathcal{R}$, est aussi une transformation de Lorentz-Poincaré (Fig. 2.8). Pour établir ce résultat, effectuons le produit matriciel de ces transformations, en désignant par $v_e = \beta_e c$ la vitesse de translation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ et par $v'_e = \beta'_e c$ la vitesse d'entraînement de $\mathcal{R}''$ par rapport à $\mathcal{R}'$; γ_e et γ'_e sont les facteurs relativistes correspondants. Il vient, en adoptant l'écriture réduite :

$$2 - x = L_r \{2 - x'\} \quad \text{et} \quad 2 - x' = L'_r \{2 - x''\} \quad \text{et} \quad 2 - x = L_r L'_r \{2 - x''\}$$

avec :

$$L_r = \begin{bmatrix} \gamma_e & \gamma_e \beta_e \\ \gamma_e \beta_e & \gamma_e \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad L'_r = \begin{bmatrix} \gamma'_e & \gamma'_e \beta'_e \\ \gamma'_e \beta'_e & \gamma'_e \end{bmatrix}$$

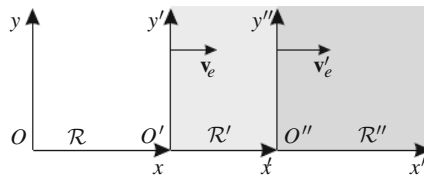


FIG. 2.8.

Calculons le produit des deux matrices $L_r L'_r$:

$$L_r L'_r = \begin{bmatrix} \gamma_e & \gamma_e \beta_e \\ \gamma_e \beta_e & \gamma_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma'_e & \gamma'_e \beta'_e \\ \gamma'_e \beta'_e & \gamma'_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_e \gamma'_e (1 + \beta_e \beta'_e) & \gamma_e \gamma'_e (\beta_e + \beta'_e) \\ \gamma_e \gamma'_e (\beta_e + \beta'_e) & \gamma_e \gamma'_e (1 + \beta_e \beta'_e) \end{bmatrix}$$

ce qui peut se mettre sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \gamma''_e & \gamma''_e \beta''_e \\ \gamma''_e \beta''_e & \gamma''_e \end{bmatrix}$$

si on pose $\gamma''_e = \gamma_e \gamma'_e (1 + \beta_e \beta'_e)$ soit :

$$1 - \beta_e''^2 = \frac{(1 - \beta_e^2)(1 - \beta_e'^2)}{(1 + \beta_e \beta'_e)^2} = \frac{(1 + \beta_e \beta'_e)^2 - (\beta_e + \beta'_e)^2}{(1 + \beta_e \beta'_e)^2} = 1 - \left(\frac{\beta_e + \beta'_e}{1 + \beta_e \beta'_e} \right)^2$$

Il en résulte la relation suivante entre β_e'' , β_e' et β_e :

$$\beta_e'' = \frac{\beta_e + \beta_e'}{1 + \beta_e \beta_e'} \quad \text{d'où} \quad v_e'' = \frac{v_e' + v_e}{1 + v_e v_e' / c^2}$$

Cette relation exprime la composition des vitesses, selon l'axe commun Ox , appliquée à l'origine O'' de $\mathcal{R}''$, entre les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ (cf. chapitre 4).

Remarques : 1) Les permutations de β_e et β_e' , ainsi que de γ_e et γ_e' , montrent que la composition de deux transformations de Lorentz-Poincaré, le long d'un même axe, est commutative. Il n'en est pas de même, lorsque cette composition s'effectue selon des axes différents.

2) Une deuxième loi caractéristique de la structure de groupe, qui a déjà été vue, est celle sur l'existence de la transformation de Lorentz-Poincaré inverse, laquelle s'obtient en changeant β_e en $-\beta_e$. On vérifie aisément que $L_e L_e^{-1} = 1$:

$$\begin{bmatrix} \gamma_e & \gamma_e \beta_e \\ \gamma_e \beta_e & \gamma_e \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \gamma_e & -\gamma_e \beta_e \\ -\gamma_e \beta_e & \gamma_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

CONCLUSION

Retenons les points essentiels.

(1) La transformation de Lorentz-Poincaré est la transformation de coordonnées qui laisse invariantes les équations de Maxwell de l'électromagnétisme. Elle s'écrit :

$$ct = \gamma_e(ct' + \beta_e x') \quad x = \gamma_e(x' + \beta_e ct') \quad y = y' \quad z = z'$$

avec $\beta_e = v_e/c$ et $\gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2}$, v_e étant la vitesse d'entraînement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$.

(2) L'intervalle s_{12} entre deux événements est une quantité invariante par changement de référentiel galiléen, défini par :

$$s_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

Les intervalles du genre temps sont tels que $s_{12}^2 > 0$, alors que les intervalles du genre espace sont caractérisés par $s_{12}^2 < 0$, ce qui exclut toute relation de causalité entre les deux événements considérés.

(3) Le concept d'espace-temps à quatre dimensions s'introduit naturellement, d'où l'intérêt d'un formalisme quadridimensionnel adapté avec des quadrivecteurs $4-x$ dont les composantes se transforment selon :

$$x_0 = \gamma_e(x'_0 + \beta_e x'_1) \quad x_1 = \gamma_e(x'_1 + \beta_e x'_0) \quad x_2 = x'_2 \quad x_3 = x'_3$$

Nous verrons ultérieurement comment l'analyse faite par Einstein des concepts de temps et d'espace, essentiellement accessibles par leurs mesures, a pu être décisive dans le succès de cette théorie, et cela indépendamment de l'interprétation simple et élégante de l'expérience de Michelson et Morley.

EXERCICES ET PROBLÈMES

P2– 1. Transformations des coordonnées d'un événement

Un événement se produit au point de coordonnées $x' = 0,8 \text{ m}$, $y' = 0,1 \text{ m}$, $z' = 0$ et à l'instant $t' = 2 \text{ ns}$, dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}'$, en mouvement de translation rectiligne uniforme, à la vitesse de $0,8c$, par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ selon l'axe Ox .

1. Trouver les coordonnées de cet événement dans $\mathcal{R}$, sachant que les origines d'espace et de temps coïncident.

2. Calculer l'intervalle entre cet événement et l'événement origine. Quel est le genre de l'intervalle ?

P2– 2. Intervalle entre deux événements

On considère un événement de coordonnées, dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$: $t = 4 \text{ ns}$, $x = 0,1 \text{ m}$, $y = 0,5 \text{ m}$ et $z = 0,2 \text{ m}$. Un autre événement se produit au point de coordonnées $t' = 3 \text{ ns}$, $x' = 0,8 \text{ m}$, $y' = 0,1 \text{ m}$, $z' = 0,1 \text{ m}$, dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}'$, en mouvement de translation rectiligne uniforme, à la vitesse de $0,5c$, par rapport à $\mathcal{R}$.

1. Calculer les coordonnées de E_1 dans $\mathcal{R}'$ et les coordonnées de E_2 dans $\mathcal{R}$.

2. En déduire l'intervalle entre ces deux événements.

P2– 3. Événement-rencontre de deux particules

Deux particules A_1 et A_2 se déplacent, par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$, avec les vitesses respectives $v_1 = c/2$ suivant $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{v}_2$ inconnue. Les particules A_1 et A_2 sont initialement situées respectivement en O et en $B(0,1)$, l'unité étant le mètre. Elles se rencontrent au point C de l'axe Ox tel que $\mathbf{OC} = 2\mathbf{e}_x$. La vitesse $\mathbf{v}_2$ est constante.

1. Trouver $\mathbf{v}_2$ ainsi que les coordonnées de l'événement rencontre dans $\mathcal{R}$.

2. Quelles sont les coordonnées de ce même événement dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ par rapport auquel A_1 est fixe ?

P2– 4. Train ultra-rapide d'Einstein

Trois personnes se trouvent dans un train qui se déplace, par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}$, à la vitesse $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_x$ avec $u = 0,6c$. L'une T est en tête de train, une autre M au milieu, la troisième Q est en queue du train. La longueur du train mesurée par ces personnes est $L = 100 \text{ m}$. À l'instant où la personne M passe devant un observateur O de $\mathcal{R}$, elle reçoit simultanément les signaux émis par T et Q .

1. Trouver les coordonnées spatio-temporelles des événements E_1 « émission en T » et E_2 « émission en Q », dans $\mathcal{R}'$ lié au train et dans $\mathcal{R}$, sachant que les coordonnées de l'événement « réception en M » dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont nulles.

2. Quelle est la durée qui sépare les événements E_1 et E_2 dans $\mathcal{R}'$ et dans $\mathcal{R}$? Calculer le carré de cet intervalle. Applications numériques.

P2– 5. Rapidité d'entraînement d'un référentiel

Les coordonnées spatio-temporelles d'un événement sont respectivement dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$:

$$x = 1,5 \text{ m} \quad t = 2 \text{ ns} \quad \text{et} \quad x' = 1,7 \text{ m} \quad t' = -3,3 \text{ ns}$$

Calculer la rapidité d'entraînement r_e de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$.

P2– 6. Tiges glissant l'une sur l'autre

On considère deux tiges identiques, AB et $A'B'$, de longueur l , la règle $A'B'$ glissant sur AB à la vitesse $\mathbf{v}_e$ (Fig. 2.9). On s'intéresse aux deux événements suivants : E_1 « A et B' coïncident » et E_2 « B et A' coïncident. » Pour cela, on introduit les deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ respectivement liés aux règles AB et $A'B'$.

1. Écrire les coordonnées de E_1 et E_2 à la fois dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$.
2. En déduire l'intervalle de temps entre E_1 et E_2 .
3. Vérifier l'invariance du carré de l'intervalle. Quel est le genre de l'intervalle ? Calculer sa valeur en mètre pour $l = 1 \text{ m}$ et $v_e = 0,8c$.

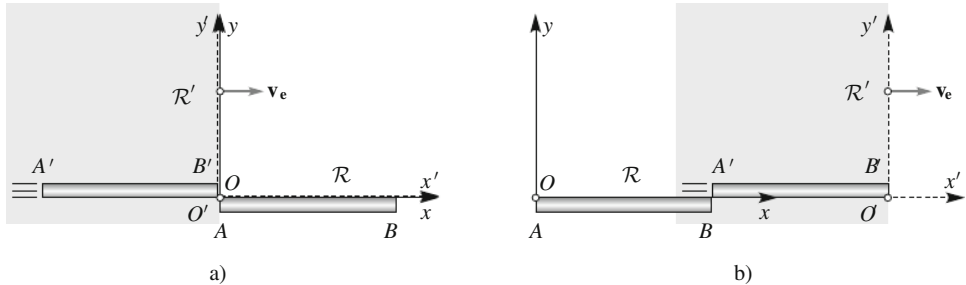


FIG. 2.9.

P2– 7. Événements non causaux

Deux événements E_1 et E_2 ont pour coordonnées spatio-temporelles respectives :

$$x_1 = 3 \text{ m} \quad y_1 = 0 \quad z_1 = 0 \quad t_1 = 10 \text{ ns} \quad \text{et} \quad x_2 = 6 \text{ m} \quad y_2 = 0 \quad z_2 = 0 \quad t_2 = 5 \text{ ns}$$

1. Calculer le carré de l'intervalle entre ces deux événements. Quelle est la vitesse du référentiel $\mathcal{R}'$ dans lequel ces deux événements sont simultanés ?
2. À quel instant t' de $\mathcal{R}'$, ces événements se produisent-ils simultanément ?

P2– 8. La transformation de Lorentz-Poincaré considérée comme une rotation complexe

On caractérise un événement par les coordonnées x, y, z et $\sigma = ict$ ($i^2 = -1$) dans un référentiel $\mathcal{R}$. Dans $\mathcal{R}'$ en translation, suivant l'axe des x , à la vitesse $\mathbf{v}_e$ par rapport à $\mathcal{R}$, ses coordonnées sont x', y', z' et σ' .

1. Montrer que l'opposé de l'intervalle qui sépare cet événement de l'origine O peut être représenté par la norme d'un même vecteur dans les deux plans complexes (x, σ) et (x', σ') . En déduire que la transformation de Lorentz est caractérisée géométriquement par une rotation d'angle complexe.

2. Dans cette représentation, on désigne par α l'angle que font entre eux les axes Ox et Ox' . Établir les relations entre les coordonnées (x, σ) et (x', σ') .

3. À l'aide de la transformation de Lorentz-Poincaré, montrer que α s'écrit $\alpha = i\theta$, θ étant le nombre réel, que l'on exprimera en fonction de $\beta_e = v_e/c$ et dont on calculera la valeur pour $\beta_e = 0,4$.

P2– 9. Groupe de transformation de Lorentz-Poincaré

1. Montrer, à l'aide de l'écriture hyperbolique de la transformation de Lorentz-Poincaré, que le produit de deux transformations est aussi une transformation de Lorentz-Poincaré. On désignera par r_{01} la rapidité d'entraînement de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}_0$ et par r_{12} celle relative au mouvement de $\mathcal{R}_2$ par rapport à $\mathcal{R}_1$.

2. À quelle condition sur r_{01} et r_{12} le produit de deux transformations de Lorentz-Poincaré se réduit-il à la transformation unité ?

P2– 10. Approximation à l'ordre un de la transformation de Lorentz-Poincaré

1. Écrire la transformation de Lorentz-Poincaré pour les faibles vitesses d'entraînement, jusqu'au deuxième ordre en $\beta_e = v_e/c$. Montrer que l'approximation, au deuxième ordre près, ne restitue pas la transformation de Galilée relative au temps.

2. Sachant que $\beta_e = 0,1$, trouver l'erreur commise sur la position dans l'approximation au deuxième ordre près. Quel doit-être le rapport des coordonnées x'/ct' pour que l'erreur relative sur le temps soit égale au double de la précédente ?

P2– 11. Valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de Lorentz

On considère la transformation de Lorentz entre les coordonnées (x, ct) dans $\mathcal{R}$ d'un événement et celles (x', ct') dans $\mathcal{R}'$ du même événement.

1. Expliciter, en fonction de γ_e et β_e , les quatre éléments a, b, c', d de la matrice de Lorentz réduite L_r associée aux deux coordonnées x et ct . Quel est le déterminant de cette matrice ?

2. On appelle vecteurs propres d'une matrice tout vecteur $\mathbf{V}$ tel que $L\{\mathbf{V}\} = \lambda\mathbf{V}$, λ étant un nombre réel appelé la valeur propre correspondante. Montrer que les valeurs propres de L satisfont à l'équation du deuxième degré suivante :

$$\lambda^2 - \lambda(a + d) + (ad - bc') = 0$$

En déduire les valeurs propres de L .

3. Quelles sont les pentes des vecteurs propres de L correspondants ? Commenter physiquement.

P2– 12. Différents événements dans l'expérience de Michelson- Morley

On se propose d'analyser les différents événements qui doivent être pris en compte dans l'expérience de Michelson-Morley (Fig. 2.10). Le référentiel $\mathcal{R}' = \mathcal{O}'x'y'z'$, dans lequel est fixé l'interféromètre, est le référentiel terrestre qui se déplace à la vitesse $v_e = 0,624 c$, par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ de Copernic. La source de lumière S est située en O' et les miroirs M_1 et M_2 sont placés sur les axes $\mathcal{O}'x'$ et $\mathcal{O}'y'$ à la même distance $l = 3$ m de S . On suppose que $\mathcal{R}'$ est lui-aussi galiléen. On considère les cinq événements suivants :

E_0 est l'émission du signal lumineux vers M_1 et M_2 ,

E_1 est l'arrivée du signal sur M_1 ,

E_2 est l'arrivée du signal sur M_2 ,

E_3 est le retour en S du signal réfléchi par M_1 ,

E_4 est le retour en S du signal réfléchi par M_2 .

1. Sachant qu'à l'instant initial les origines O et O' de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ coïncident, écrire, en fonction de l , β_e et γ_e , les coordonnées spatio-temporelles de ces événements.

2. Quels sont les carrés des intervalles entre E_0 et E_1 , entre E_0 et E_2 , entre E_1 et E_2 , entre E_3 et E_4 .

3. Les événements E_1 et E_2 sont-ils simultanés, dans $\mathcal{R}$, dans $\mathcal{R}'$? Même question pour les événements E_3 et E_4 . Préciser par un calcul numérique. Commenter.

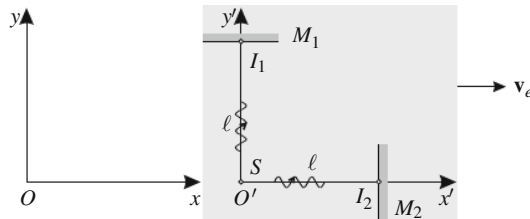


FIG. 2.10.

3

Fondements de la cinématique einsteinienne

En dehors de l'interprétation simple et élégante de l'expérience de Michelson et Morley, par la seule extension du principe de relativité à tous les phénomènes physiques, le mérite de Poincaré et surtout celui d'Einstein fut d'analyser et d'objectiver les concepts de temps, d'espace et de simultanéité. En soulignant la nécessité de préciser les conditions de la mesure des durées et des longueurs, Poincaré et Einstein ont fait de la cinématique, qui est l'étude du mouvement des corps, indépendamment des causes physiques qui en sont à l'origine, une discipline relevant désormais de la physique essentiellement. Les conséquences immédiates les plus surprenantes de la transformation de Lorentz sont connues sous les noms de *dilatation des durées* et de *contraction des longueurs*. La signification de ces expressions est délicate au point que ces conséquences sont souvent présentées sous forme de paradoxes.

I. — MESURE DES DURÉES ET DES LONGUEURS

Rappelons que toute mesure d'une durée ou d'une longueur se ramène à la comparaison à un étalon.

i) Pour une durée, l'étalon peut être, par exemple, la période d'un pendule dont on admet l'isochronisme des oscillations (Fig. 3.1a).

ii) Pour une longueur, c'est par exemple une règle dont on admet la rigidité (Fig. 3.1b).

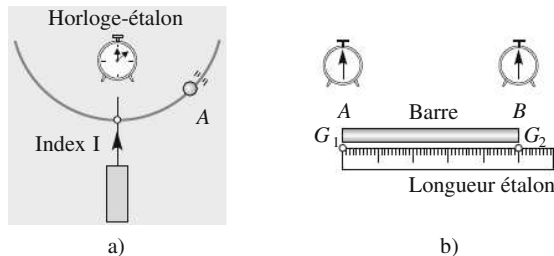


FIG. 3.1.

I. 1. — Simultanéité

Une analyse attentive du processus de mesure montre que la comparaison précédente des grandeurs spatio-temporelles aux étalons suppose implicitement acquise la notion de simultanéité.

En effet, mesurer la durée qui sépare deux passages, dans le même sens, d'un pendule simple, devant un index I situé à sa position d'équilibre, c'est constater deux simultanités : la première entre le premier passage et la position angulaire de l'aiguille du chronomètre, la seconde entre le second passage et la nouvelle position angulaire de l'aiguille (Fig. 3.1a).

De même, mesurer la longueur d'une barre AB , c'est constater la simultanéité de la coïncidence de l'extrémité A avec une graduation G_1 d'une règle-étalon et de la coïncidence de l'autre extrémité B avec une seconde graduation G_2 de la règle-étalon (Fig. 3.1b).

Il convient alors de définir avec soin la simultanéité de deux événements, qui ne se produisent pas en un même lieu, car nous aurons à comparer des durées perçues par des observateurs différents en mouvement les uns par rapport aux autres. Pour cela, il est nécessaire de synchroniser préalablement des horloges placées en des lieux distincts, c'est-à-dire de contrôler *l'identité de leur marche* ainsi que celle de *l'origine des durées*.

Notons que, même en cinématique newtonienne, ces précautions ne sont pas superflues, lorsqu'on veut effectuer des mesures reproductibles précises et comparer les résultats obtenus par deux observateurs éloignés d'un même référentiel. Cependant, elles apparaissent moins cruciales, car l'hypothèse intuitive de l'universalité du temps, faite par Newton, exclut d'emblée la non-invariance de la durée qui sépare deux événements lorsqu'on change de référentiel.

a) Synchronisation des horloges

La synchronisation est réalisée à l'aide de signaux lumineux ou plus largement électromagnétiques. Donnons le procédé de synchronisation de deux horloges H_1 et H_2 situées en deux points différents A_1 et A_2 (Fig. 3.2).

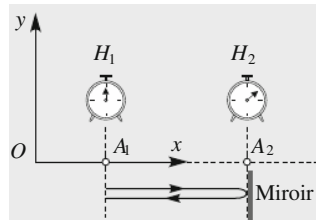


FIG. 3.2.

i) Contrôle de la même marche

À l'instant t_1 de H_1 , A_1 envoie un signal vers A_2 qui le reçoit à t_2 de H_2 (3.2). À l'instant $t_1 + T$ de H_1 , A_1 envoie un second signal vers A_2 qui doit le recevoir à $t_2 + T$ de H_2 .

ii) Contrôle de la même origine

À l'instant t_1 de H_1 , A_1 envoie un signal vers A_2 qui le réfléchit vers A_1 (3.2). Ce dernier le reçoit à l'instant $t_1 + T$. L'origine des temps des deux horloges est la même si A_2 a reçu le signal à l'instant $t_1 + T/2$.

Le temps unique ainsi associé à tous les points d'un même repère d'espace est le *temps du repère*.

b) Définition de la simultanéité

Deux événements sont *simultanés* si des horloges *synchronisées*, placées aux points où ils se produisent, donnent la *même* indication.

Dans le diagramme de Minkowski (x, ct) , deux événements simultanés sont représentés par des points d'Univers situés sur une droite parallèle à l'axe Ox (3.3a).

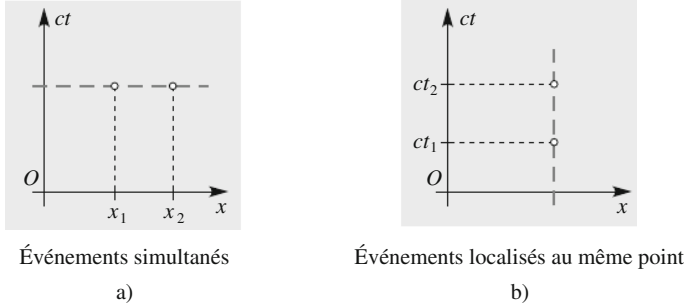


FIG. 3.3.

I. 2. — Relativité de la simultanéité

Considérons deux événements E_1 et E_2 , décrits dans un référentiel $\mathcal{R}$, par les coordonnées respectives suivantes : t_1, x_1, y_1, z_1 , et t_2, x_2, y_2, z_2 .

Supposer que E_1 et E_2 soient *simultanés* dans $\mathcal{R}$ (Fig. 3.3a), c'est imposer dans les différentes expressions : $t_1 = t_2$. Le sont-ils aussi dans $\mathcal{R}'$, en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}$, c'est-à-dire avons-nous aussi dans $\mathcal{R}'$ $t'_1 = t'_2$, comme en mécanique newtonienne ?

Pour répondre à cette question, évaluons la durée qui sépare E_1 et E_2 dans $\mathcal{R}'$:

$$ct'_2 - ct'_1 = \gamma_e(ct_2 - \beta_e x_2) - \gamma_e(ct_1 - \beta_e x_1) = -\gamma_e \beta_e (x_2 - x_1)$$

Ainsi, deux événements, simultanés dans $\mathcal{R}$, ne sont simultanés dans $\mathcal{R}'$ que s'ils sont localisés en des points de *même* abscisse. La simultanéité ne présente donc pas de caractère universel.

Remarque : On retrouve le caractère universel de la simultanéité en faisant tendre $\beta_e = v_e/c$ vers 0 :

$$c(t'_2 - t'_1) = -\gamma_e \beta_e (x_2 - x_1) = 0$$

Ainsi, l'universalité de la simultanéité, admise en cinématique newtonienne, revient à considérer que c est infiniment grand devant toute autre vitesse.

I. 3. — Relativité de la localisation

Deux événements E_1 et E_2 sont localisés en un même endroit dans $\mathcal{R}$: $x_1 = x_2$ (3.3b). Ces deux événements ne sont pas localisés au même endroit dans $\mathcal{R}'$, puisque :

$$x'_2 - x'_1 = \gamma_e(x_2 - \beta_e ct_2) - \gamma_e(x_1 - \beta_e ct_1) = -\gamma_e \beta_e (ct_2 - ct_1) = -\gamma_e v_e (t_2 - t_1)$$

Ils ne seront localisés au même point dans $\mathcal{R}'$ que si, en outre, ils sont simultanés dans $\mathcal{R}$.

Remarque : En cinématique newtonienne, on obtient un résultat analogue, mais quantitativement différent, puisque : $x'_2 - x'_1 \approx -v_e (t_2 - t_1)$.

II. — DILATATION DES DURÉES

II. 1. — Durée propre. Référentiel propre

Le temps d'un référentiel n'étant plus un paramètre universel en cinématique einsteinienne, existe-t-il un paramètre universel qui jouerait le rôle qu'avait ce temps en cinématique newtonienne ? C'est la

question que s'est posé Einstein, à laquelle il a répondu par l'affirmative, en s'appuyant sur le concept d'intervalle.

Considérons deux événements E_1 et E_2 , dont l'intervalle s_{12} est du genre temps ($s_{12}^2 > 0$), avec E_2 postérieur à E_1 . Cet intervalle s'écrit, en fonction des coordonnées spatio-temporelles de E_1 et E_2 dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$:

$$s_{12} = [c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2]^{1/2}$$

La *durée propre* entre ces deux événements est, par définition, la quantité suivante :

$$T_p = \frac{s_{12}}{c}$$

homogène à une durée et invariante par changement de référentiel galiléen, puisque s_{12} et c le sont.

Cette durée T_p s'identifie à celle $t'_2 - t'_1$ qui sépare E_1 et E_2 dans le référentiel $\mathcal{R}'$ dans lequel les deux événements sont localisés au *même point*. En effet :

$$t'_2 - t'_1 = T_p \quad \text{si} \quad x'_1 = x'_2 \quad y'_1 = y'_2 \quad \text{et} \quad z'_1 = z'_2$$

Le référentiel $\mathcal{R}'$ est alors appelé le *référentiel propre* pour les deux événements localisés au même point. Toute autre durée, mesurée dans tout autre référentiel, est par opposition qualifiée d'impropre.

II. 2. — Relation entre durée propre et durée impropre

Pour deux événements, on peut établir la relation entre la durée propre dans le référentiel propre et la durée mesurée dans tout autre référentiel. Il suffit, pour cela, d'imposer, dans les formules de transformation de Lorentz-Poincaré entre les deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, la condition $x'_2 = x'_1$ si $\mathcal{R}'$ est référentiel propre :

$$ct_1 = \gamma_e(ct'_1 + \beta_e x'_1) \quad ct_2 = \gamma_e(ct'_2 + \beta_e x'_2) \quad \text{ce qui donne} \quad t_2 - t_1 = \gamma_e(t'_2 - t'_1)$$

Il en résulte la relation suivante entre la durée propre $T_p = t'_2 - t'_1$, dans le référentiel propre $\mathcal{R}'$, et la durée $T_i = t_2 - t_1$ qui sépare les deux événements dans tout autre référentiel galiléen $\mathcal{R}$:

$$T_i = \gamma_e T_p \quad \text{avec} \quad \gamma_e = \left(1 - \frac{v_e^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

La durée entre deux événements dépend donc du mouvement de l'observateur. Elle est *minimale* dans le *référentiel propre*, qui est celui dans lequel les événements se produisent au même point. On dit qu'il y a *dilatation de la durée* qui sépare deux événements dans tout référentiel autre que le référentiel propre. On dit parfois aussi que les *horloges mobiles* du référentiel propre *retardent* pour tout autre référentiel.

Il convient de souligner que cette dilatation des durées n'est pas subjective mais objective ; c'est un effet réel, mais de perspective, qui apparaît lorsqu'on mesure la durée qui sépare deux événements dans un référentiel où ces événements ne se produisent pas au même point, seule la durée propre ayant une signification universelle.

Exemple : Soit à mesurer la durée séparant deux passages successifs, dans le même sens, d'un pendule devant un index (Fig. 3.4). Pour l'observateur de $\mathcal{R}'$, lié au bâti et à l'index, la durée mesurée est par exemple $T_p = 2$ s. Pour un observateur de $\mathcal{R}$, par rapport auquel $\mathcal{R}'$ a une vitesse v_e telle que $\gamma_e = 3$, la durée mesurée est $\gamma_e T_p = 6$ s.

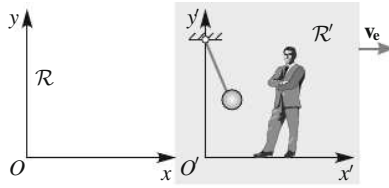


FIG. 3.4.

Remarques : 1) Il n'est pas inutile de préciser que deux observateurs, A et B , transportant avec eux des pendules identiques, mesurent chacun de leur côté la même valeur de la période de leur pendule, puisque ces périodes sont des durées propres dans les deux cas. La dilatation est constatée par A lorsqu'il mesure la période du pendule que transporte B , et par B lorsqu'il mesure la période du pendule que transporte A .

2) En faisant $\gamma_e = 1$, on obtient évidemment le résultat newtonien $T_i = T_p$: en cinématique newtonienne, la durée d'un phénomène ne dépend pas du référentiel lié à l'observateur.

3) La relation de dilatation des durées peut être obtenue aussi à partir de l'invariance du carré de l'intervalle élémentaire. En effet, si les coordonnées spatiales d'un événement sont fixées dans $\mathcal{R}'$, on a :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = c^2 dt'^2$$

d'où :

$$dt = dt' \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2}$$

Il en résulte la relation $dt = \gamma dt'$ avec $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ entre la durée propre dt' et la puissance impropre dt .

II.3. — Preuves expérimentales et applications

La première preuve expérimentale de l'effet de dilatation des durées fut obtenue par Ives et Stilwell en 1938 en étudiant l'effet Doppler-Fizeau transversal essentiellement relativiste (cf. paragraphe IV).

a) Relativité de la durée d'un phénomène

Considérons deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ de vitesse v_e par rapport $\mathcal{R}$. Une source lumineuse située en O' émet, dans la direction de l'axe $O'y'$, un signal qui est réfléchi vers O' par un miroir plan placé au point M' de l'axe $O'y'$, à la distance l (Fig. 3.5a).

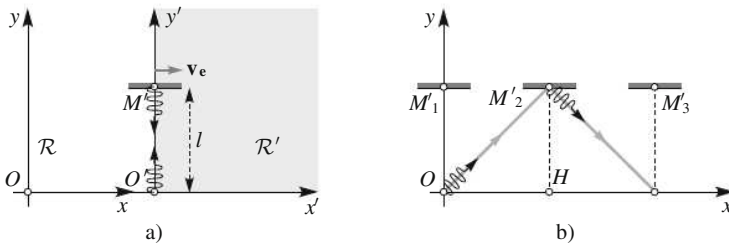


FIG. 3.5.

Dans $\mathcal{R}'$, la durée T' qui sépare l'événement E_1 « émission de lumière en O' » et l'événement E_2 « réception de lumière en O' » est $2l/c$:

$$E_1 \left| \begin{array}{l} ct' = 0 \\ x' = 0 \end{array} \right|_{\mathcal{R}'} \quad E_2 \left| \begin{array}{l} T' = 2l/c \\ 0 \end{array} \right|_{\mathcal{R}'}$$

Dans $\mathcal{R}$, la durée entre ces deux événements s'obtient en prenant en compte le mouvement du miroir. Sur la figure 3.5b, on voit bien que T doit être tel que :

$$OM_2'^2 = OH^2 + M_2'H^2 \quad \text{soit} \quad \left(\frac{cT}{2} \right)^2 = l^2 + \left(\frac{v_e T}{2} \right)^2$$

Par conséquent :

$$T^2 = \frac{4l^2}{c^2 - v_e^2} \quad \text{et} \quad T = \frac{2l}{c} \gamma_e = \gamma_e T'$$

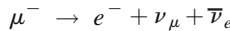
Ce résultat s'obtient directement à partir de la transformation de Lorentz-Poincaré :

$$E_1 \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right|_{\mathcal{R}} \quad E_2 \left| \begin{array}{l} T = \gamma_e T' = 2\gamma_e l/c \\ x = \gamma_e \beta_e c T' = 2\gamma_e \beta_e l = 2(\gamma_e^2 - 1)^{1/2} l \end{array} \right|_{\mathcal{R}}$$

b) Parcours des muons dans l'atmosphère

Les rayons cosmiques qui traversent l'atmosphère terrestre sont constitués notamment de mésons μ ou muons qui sont des particules chargées, de charge $-e$ ou e , dont la masse est environ 207 fois celle de l'électron. Ces particules furent découvertes séparément et indépendamment par C. Anderson et S. Neddermeyer d'une part, par J. Street et E. Stevenson d'autre part, en 1937, alors qu'ils étudiaient le rayonnement cosmique.

Les muons négatifs subissent des collisions au cours desquelles ils cèdent de l'énergie en se désintégrant en un électron, un neutrino mésique ν_μ et un antineutrino électronique $\bar{\nu}_e$, selon la réaction (cf. chapitres 7 et 8) :



La désintégration des muons se fait selon la loi exponentielle suivante :

$$N(t) = N(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

dans laquelle $N(t)$ est le nombre de muons à l'instant t et τ une durée appelée la durée de vie des muons. On introduit souvent la demi-vie des muons qui est la durée $T_{1/2}$ au bout de laquelle $N(T_{1/2}) = N(0)/2$; $T_{1/2}$ et τ sont reliés par :

$$N(T_{1/2}) = N(0) \exp\left(-\frac{T_{1/2}}{\tau}\right) = \frac{N(0)}{2} \quad \text{d'où} \quad T_{1/2} = \tau \ln 2$$

La durée de vie propre τ_p des muons, est mesurée en laboratoire, dans le référentiel terrestre, lorsque le muon est au repos, à partir de la loi de désintégration donnant la décroissance d'un flux n de muons. On obtient, en fonction du temps propre t_p (Fig. 3.6a) :

$$n(t_p) = n(0) \exp\left(-\frac{t_p}{\tau_p}\right) \quad \text{avec} \quad \tau_p = 2,2 \times 10^{-6} \text{ s} \quad \text{ou} \quad T_{p,1/2} = 2,2 \times 10^{-6} \times 0,69 = 1,5 \times 10^{-6} \text{ s}$$

En 1941, B. Rossi et D. Hall ont observé un tel phénomène, alors qu'ils étudiaient, dans la région de Denver, dans le Colorado, la désintégration des muons qui composent le rayonnement cosmique tombant sur la Terre.

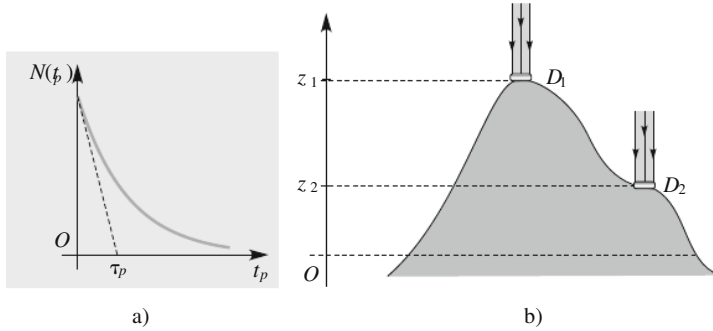


FIG. 3.6.

En 1963, les physiciens américains D. Frisch et J. Smith ont repris l'expérience de Rossi et Hall en la simplifiant (Fig. 3.6b) ; ils ont mesuré le flux de muons, de vitesse $v = 0,992 c$, à des altitudes différentes, en plaçant un premier détecteur, au sommet du Mont Washington (New Hampshire), à 1910 m d'altitude et un second à seulement 3 m d'altitude. Ils trouvèrent respectivement, par heure, 563 ± 10 et 408 ± 9 muons.

La décroissance radioactive du flux étant exponentielle, il vient, en désignant par t_1 et t_2 les instants de détection :

$$n_1 = n(0) \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) \quad n_2 = n(0) \exp\left(-\frac{t_2}{\tau}\right) \quad \text{d'où} \quad \ln\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = -\frac{t_2 - t_1}{\tau}$$

On en déduit, puisque $t_2 - t_1 = (z_1 - z_2)/v$:

$$\tau = -\frac{z_1 - z_2}{v \ln(n_2/n_1)} = -\frac{1910 - 3}{0,992 \times 3 \times 10^8 \times (408/563)} = 19,89 \mu\text{s}$$

Il vient donc :

$$\frac{\tau}{\tau_p} \approx \frac{19,89}{2,21} = 9 \quad \text{à comparer à} \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = 7,92$$

Compte tenu de la précision expérimentale, la dilatation des durées est bien vérifiée.

En 1976, au CERN (Centre Européen pour la Recherche Nucléaire), on a pu comparer, avec précision, la durée de vie propre des muons à celle des muons en mouvement, à la vitesse $0,9994 c$, dans un accélérateur. On a trouvé pour τ la valeur de $63,8 \mu\text{s}$, ce qui satisfait bien à la relation :

$$\frac{\tau}{\tau_p} \approx \gamma \quad \text{puisque} \quad \frac{\tau}{\tau_p} \approx 29 \quad \text{et} \quad \gamma = (1 - 0,9994^2)^{-1/2} \approx 29$$

Remarque : Les rayons cosmiques, qui sont constitués de particules connues, comme des noyaux, des neutrinos, des photons, des muons, etc., font encore l'objet de recherche, car l'origine de leur énergie considérable, de l'ordre d'un million de fois les énergies les plus grandes obtenues dans les accélérateurs, reste un mystère.

c) Correction de la relativité restreinte du GPS

L'objectif de la radionavigation par satellites est de connaître avec précision la position d'un objet (navire, avion, automobile, piéton) dans l'espace, au voisinage de la Terre. Son fonctionnement est basé sur la réception, par cet objet, muni d'un récepteur portatif, des signaux électromagnétiques émis par des satellites de la Terre en orbite circulaire.

Le système GPS (pour *Global Positioning System*) est un dispositif récent, conçu par l'armée américaine dans les années 1990, à des fins militaires, pour localiser les différents véhicules de l'armée et les troupes au sol.

Depuis 1995, une version du GPS à performances limitées a été rendue accessible à la communauté internationale. Certains véhicules sont déjà équipés d'un tel système, ce qui permet au conducteur de se repérer sur Terre avec suffisamment de précision.

Ce système utilise en tout 31 satellites, la plupart groupés par quatre, orbitant sur des trajectoires circulaires, à une altitude de 20 200 km (Fig. 3.7). Les satellites d'un même groupe se trouvent dans des plans inclinés de 55° par rapport à l'équateur, qui font entre eux des angles de 60° . Leur vitesse est de $v_s = (GM^T/r)^{1/2} \approx 3,88 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ car $r \approx 20\,200 + 6\,400 = 26\,600 \text{ km}$, leur révolution dure 12 h et ils émettent des signaux, de fréquence $f = 1,57542 \text{ GHz}$ ($\lambda \approx 19 \text{ cm}$), avec un éclairement de $30 \text{ fW} \cdot \text{m}^{-2}$, soit $30 \times 10^{-15} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.

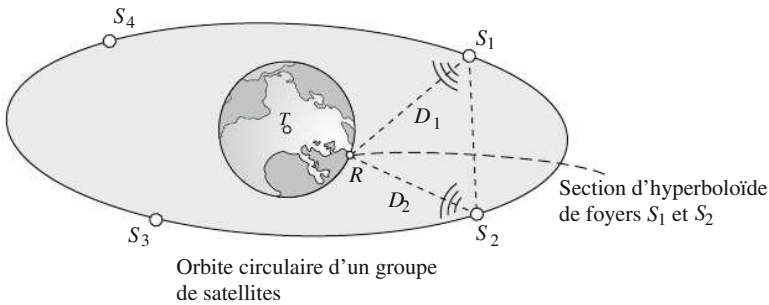


FIG. 3.7.

Si D_1 et D_2 désignent les distances S_1R et S_2R qui séparent deux des quatre satellites du récepteur R et si t_1 et t_2 sont les instants indiqués par les horloges synchronisées transportées par les satellites S_1 et S_2 lors de l'émission des signaux, on a, en notant t_r le temps donné par l'horloge du récepteur :

$$D_1 = c(t_r - t_1) \quad \text{et} \quad D_2 = c(t_r - t_2) \quad \text{d'où} \quad D_1 - D_2 = c(t_2 - t_1)$$

On en déduit donc $D_1 - D_2$, ce qui situe R sur l'une des deux nappes d'un hyperboloïde de révolution dont les deux foyers sont occupés par les satellites (cf. *Optique*). En procédant avec trois autres couples de satellites du même groupe, on parvient à localiser R .

La localisation du récepteur exige que les instants d'émission soient connus avec une excellente précision. En effet, une erreur maximale de 3 cm sur D_1 ou D_2 exige que les temps t_1 ou t_2 soient déterminés avec une précision meilleure que :

$$\Delta t = \frac{\Delta D}{c} = \frac{3 \times 10^{-2}}{3 \times 10^8} = 10^{-10} \text{ s} \quad \text{soit} \quad \Delta t = 0,1 \text{ ns}$$

Cette précision est à comparer à l'erreur que l'on commettrait en ignorant le ralentissement des horloges mobiles, à bord des satellites ; calculons l'erreur relative associée :

$$\frac{T_0 - T}{T} = \frac{1}{\gamma} - 1 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1 \approx -\frac{v^2}{2c^2} \quad \text{soit} \quad \frac{T_0 - T}{T} \approx -\frac{1}{2} \left(\frac{3,88 \times 10^3}{3 \times 10^8}\right)^2 = -0,83 \times 10^{-10}$$

pour une vitesse des satellites par rapport à la Terre de $3,88 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Pour des durées de l'ordre d'une minute, nécessaires à l'enregistrement des données, l'écart que provoquerait l'ignorance de la dilatation relativiste des durées atteindrait 5 ns et serait donc intolérable.

Remarques : 1) On tient compte du mouvement de l'objet à positionner en mesurant sa vitesse par effet Doppler-Fizeau (cf. paragraphe IV), c'est-à-dire par la variation de la fréquence de l'onde incidente réfléchie vers le satellite.

2) Dans le calcul précédent, on devrait prendre en compte aussi le mouvement de rotation propre de la Terre ; le terme correctif est $v_e^2/2c^2$, v_e étant la vitesse d'entraînement d'un point de la Terre ; à l'équateur $v_e \approx 465 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (cf. *Mécanique*). Une autre source d'erreur est l'influence de la variation du potentiel gravitationnel produit par la Terre (cf. chapitre 10). Finalement, cette technique de la radionavigation par satellite n'a pu se développer qu'en s'appuyant sur la relativité restreinte (retard des horloges en mouvement), sur la relativité générale (avance des horloges en altitude), et aussi sur la quantique, laquelle est à l'origine de la construction d'horloges atomiques extrêmement précises (cf. *Quantique*).

3) L'Europe se dotera d'ici 2020 d'un système analogue, Galileo, constitué de 30 satellites, situés à une altitude d'environ 24 000 km. Par rapport à ses concurrents, il sera plus précis et uniquement civil.

II. 4. — Paradoxe des jumeaux de Langevin

Dans le but de populariser les idées d'Einstein en France et de préciser la modification considérable qu'apporte sur les temps l'analyse einsteinienne, le physicien français P. Langevin a posé, vers 1911, le problème suivant, appelé depuis le *paradoxe des jumeaux de Langevin*. Le premier des jumeaux, Albert (première lettre A comme Astronaute), quitte la Terre à bord d'une fusée pour un voyage interplanétaire et revient à son point de départ au bout d'une durée T_A mesurée par ses horloges. Pendant ce voyage, son frère Gaspard (première lettre G de Gaia, déesse Terre) est constamment resté sur Terre ; la durée affichée par les horloges de Gaspard, entre le départ et l'arrivée d'Albert est T_G (Fig. 3.8a).

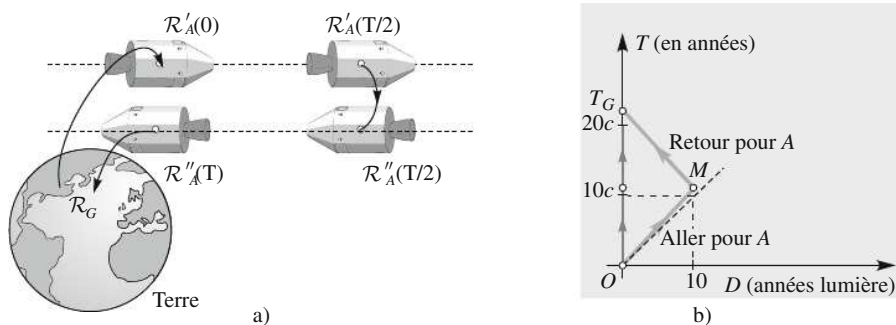


FIG. 3.8.

Selon la cinématique newtonnienne, qui postule l'universalité du temps, évidemment $T_A = T_G$. Mais qu'en est-il selon la cinématique einsteinienne ?

On a objecté à Langevin que les durées T_A et T_G devaient aussi être identiques dans la théorie relativiste, car les signes des vitesses de déplacement d'Albert par rapport à Gaspard et de Gaspard par rapport à Albert étaient opposés, et par conséquent le facteur relativiste de dilatation γ_e inchangé.

En fait, ce raisonnement est erroné, car il suppose que les rôles d'Albert et de Gaspard sont symétriques, ce qui est incorrect comme le montre une analyse attentive ; alors que Gaspard sur Terre n'a subi aucune accélération pendant la durée du voyage, Albert a dû supporter trois fortes accélérations, la première pour sauter dans une première fusée s'éloignant de la Terre, la deuxième à la fin de l'aller pour embarquer dans une seconde fusée se dirigeant vers la Terre, enfin la troisième pour atterrir au retour.

Aussi répond-on convenablement à la question de Langevin, en introduisant les trois référentiels suivants (Fig. 3.8a) :

- i) $\mathcal{R}_G$ lié à la Terre,
- ii) $\mathcal{R}'_A$ lié à une première fusée transportant Albert à l'aller, de vitesse $\mathbf{v}_e$ par rapport à $\mathcal{R}_G$,
- iii) $\mathcal{R}''_A$ lié à une seconde fusée le transportant au retour, de vitesse $-\mathbf{v}_e$ par rapport à $\mathcal{R}_G$.

Pour les intervalles *aller* et *retour*, de même durée, Gaspard ne peut guère revendiquer le rôle d'observateur propre, contrairement à Albert. Par conséquent, la durée de l'aller étant $T_G/2$ pour Gaspard, elle vaut $T'_A = T_G/(2\gamma_e)$ pour Albert dans $\mathcal{R}'_A$. De même, pour le retour, $T''_A = T_G/(2\gamma_e)$.

Il en résulte, en négligeant la durée des transferts pour $\mathcal{R}_G$ (montée dans $\mathcal{R}'_A$, passage de $\mathcal{R}'_A$ à $\mathcal{R}''_A$, descente de $\mathcal{R}''_A$), que la durée du voyage pour Albert est reliée à celle de Gaspard par l'équation :

$$T_A \approx T'_A + T''_A = \frac{T_G}{\gamma_e}$$

Ainsi, une analyse rationnelle commune aux deux jumeaux conduit à une durée T_A pour l'astronaute *inférieure* à la durée T_G pour le jumeau resté sur Terre. Retenons que le temps s'écoule plus lentement pour l'astronaute Albert que pour le terrien Gaspard. Le paradoxe est donc levé.

Exemple : Pour effectuer le trajet aller et retour vers une étoile située à la distance $D = 10$ a.l (année-lumière) de la Terre, à la vitesse $u = 0,9c$, les durées de l'aller et du retour, pour Gaspard, sont respectivement :

$$T_{G,a} = \frac{D}{u} = \frac{10 \times c \times 1}{0,9c} \approx 11,1 \text{ an} \quad \text{et} \quad T_{G,r} = \frac{D}{u} = \frac{10 \times c \times 1}{0,9c} \approx 11,1 \text{ an}$$

d'où la durée totale du voyage pour Gaspard :

$$T_G = T_{G,a} + T_{G,r} = \frac{2D}{u} \approx 22,2 \text{ an}$$

Comme $\gamma_e = (1 - u^2/c^2)^{-1/2} = 2,294$, les durées de l'aller et du retour, pour Albert, sont respectivement :

$$T_{A,a} = \frac{T_{G,a}}{\gamma_e} = \frac{D}{\gamma_e u} \approx 4,84 \text{ an} \quad \text{et} \quad T_{A,r} = \frac{T_{G,r}}{\gamma_e} = \frac{D}{\gamma_e u} \approx 4,84 \text{ an}$$

d'où la durée totale du voyage pour Albert :

$$T_A = T_{A,a} + T_{A,r} = \frac{2D}{\gamma_e u} \approx 9,68 \text{ an}$$

Ainsi le temps s'écoule plus lentement pour le nomade Albert que pour le sédentaire Gaspard dans le rapport 2,294.

Sur la figure 3.8b, on a représenté ce résultat dans le diagramme espace-temps (x, ct) associé au référentiel $\mathcal{R}$. La trajectoire traduisant l'immobilité de Gaspard sur Terre est le segment OT_G sur l'axe Oct . Dans ce même référentiel $\mathcal{R}$, celle d'Albert est formée de deux segments OM et MT_G dont les pentes ont une même valeur absolue supérieure à un, puisque $u < c$, et des signes opposés en raison de l'opposition des vitesses à l'aller et au retour. La longueur du segment OT_G donne la durée qui s'écoule pour Gaspard, entre le départ et l'arrivée d'Albert. La durée, plus faible pour Albert, se calcule le long de sa trajectoire, c'est-à-dire sur l'axe Oct' défini par OM , puis sur l'axe Mct'' défini par MT_G :

$$T_p = \frac{1}{c} \int_{OM} ds + \frac{1}{c} \int_{MT_G} ds = \frac{2}{c} \int_{OM} ds$$

puisque les durées sont indentiques et que l'on néglige les durées de changement de référentiel en O , en M et en T . Il vient :

$$T_p = \frac{2}{c} \int_{OM} (c^2 dt^2 - dx^2)^{1/2} = 2 \int_{OM} dt(1 - \beta_e^2)^{1/2} = 2(1 - \beta_e^2)^{1/2} \int_0^{T/2} dt = (1 - \beta_e^2)^{1/2} T = \frac{T}{\gamma_e}$$

Avec une vitesse plus élevée $u = (1 - 5 \times 10^{-5})c$, pour laquelle $\gamma_e \approx 100$, un voyage interstellaire aller et retour, qui ne durerait que 2 ans pour l'astronaute, exigerait que Gaspard, sur Terre, attende deux siècles pour revoir son frère. Albert ne retrouverait donc pas Gaspard, mais découvrirait des habitants inconnus vivant sur une Terre vieillie de deux siècles (!). Soulignons qu'il ne s'agit pas d'un effet apparent mais objectif, même si chacun des jumeaux ne ressent aucune perturbation du temps biologique défini par son propre métabolisme. La seule hypothèse admise est qu'Albert soit capable de supporter physiquement les accélérations subies, comme le sont une particule physique ou un instrument de mesure.

Remarques : 1) Parfois, des auteurs prennent une précaution inutile avant d'étudier le paradoxe des jumeaux de Langevin : un tel problème devrait être rigoureusement traité dans le cadre de la Relativité Générale (RG) disent-ils. Il n'en est rien car la RG est essentiellement la prise en compte du caractère singulier de la gravitation dans la théorie de la relativité restreinte (cf. chapitre 10).

2) Même si la réalisation de telles vitesses pour des voyages interstellaires d'humains donnant lieu à des ralentissements d'horloges significatifs n'est pas envisageable pour le moment, cette prime accordée aux voyageurs les plus téméraires, sous la forme d'un ralentissement de leur vieillesse, est bien réelle. C'est ce qu'illustre le fim « Interstellar », réalisé en 2014 par C. Nolan ; après un voyage interstellaire, le héros assiste à la mort de sa fille devenue une très vieille dame, bien plus âgée que lui !

a) Visualisation de la dilatation des durées sur le diagramme de Minkowski

Sur le diagramme bidimensionnel de Minkowski de la figure 3.9, le point A' sur l'axe Oct' représente Albert puisque le lieu où se trouve l'horloge qui l'accompagne demeure à $x' = 0$. Son référentiel est donc référentiel propre au cours de l'aller. Pour déterminer la durée de l'aller selon son jumeau Gaspard, il suffit de considérer la projection A de A' sur l'axe Oct : on constate que le référentiel de Gaspard n'est pas référentiel propre puisque la projection sur Ox n'est pas nulle et que la durée OA , malgré les apparences, est supérieure à OA' , cette dernière durée se retrouvant en OH sur l'axe Oct , H étant le point où l'hyperbole $c^2 t^2 - x^2 = \text{Cte}$, passant par A' , coupe l'axe Oct .

Pour le retour, il suffit de tracer les axes Oct'' et Ox'' respectivement symétriques des axes Oct' et Ox' par rapport aux axes Oct et Ox , car la vitesse du nouveau référentiel $\mathcal{R}''$ a changé de sens. Le point A'' représente Albert au retour dans $\mathcal{R}''$. Comme précédemment, ce référentiel est référentiel propre pour le retour. En raison de la symétrie, la projection de A'' sur Oct coïncide avec H .

b) Ralentissement d'horloges mobiles

En 1971, on a embarqué des horloges atomiques au césium à bord d'avions de ligne (Concorde et Boeing 707). Après un tour du monde, à la même latitude, on a comparé leurs indications à celles données par des horloges témoins laissées sur Terre. Une fois prise en compte l'influence du champ de pesanteur sur leur période (cf. chapitre 10), on a décelé un retard des horloges en mouvement en accord avec le retard prédit par la relativité restreinte.

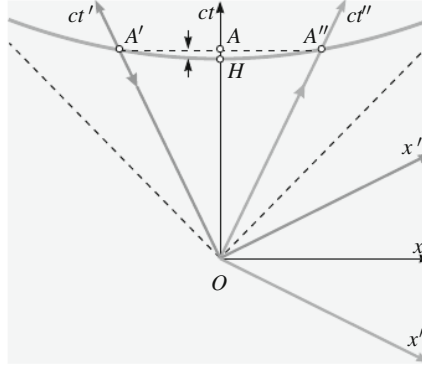


FIG. 3.9.

La relation entre la période propre T_p donnée par les horloges aéroportées et celle T indiquée par les horloges au sol est, puisque la vitesse d'entraînement est faible ($v_e \ll c$) et les référentiels sensiblement galiléens :

$$T = \gamma_e T_p \quad \text{avec} \quad \gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{\beta_e^2}{2}$$

Or, suivant que le vol, qui s'effectue à la vitesse v par rapport à la Terre le long d'une trajectoire circulaire, à la distance R de l'axe de rotation de la Terre, est orienté vers l'ouest ou vers l'est, les vitesses d'entraînement à considérer sont respectivement :

$$v_e = v + \Omega R \quad v_e = v - \Omega R$$

où $\Omega = 2\pi/(24 \times 3600) \approx 7,3 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ est la vitesse de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles.

La différence relative de la période T_w donnée par une horloge transportée par un avion qui se déplace vers l'ouest (*west* en anglais) vaut donc :

$$\frac{T_w - T_p}{T_p} \approx \frac{\beta_e^2}{2} = \frac{(v + R\Omega)^2}{2c^2} \approx \frac{v(v + 2R\Omega)}{c^2} \quad \text{puisque} \quad \beta_e = \frac{v + R\Omega}{c}$$

Pour un avion se dirigeant vers l'est, on a :

$$\frac{T_e - T_p}{T_p} \approx \frac{\beta_e^2}{2} = \frac{(v - R\Omega)^2}{2c^2} \approx \frac{v(v - 2R\Omega)}{c^2} \quad \text{puisque} \quad \beta_e = \frac{v - R\Omega}{c}$$

Les dérives observées, de 275 ns pour le déplacement vers l'ouest et de 40 ns pour le déplacement vers l'est, sont en accord avec les prévisions théoriques.

III. — CONTRACTION DES LONGUEURS

III. 1. — Longueur propre et référentiel propre

Soit une barre rigide AB , fixe dans le référentiel $\mathcal{R}'$, en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Sa longueur dans ce référentiel $\mathcal{R}'$ s'obtient en évaluant la différence $x'_2 - x'_1$ des abscisses des deux événements suivants :

- i) première coïncidence de l'extrémité B avec la graduation G'_2 d'une règle-étalon (Fig. 3.10a),
- ii) seconde coïncidence de l'autre extrémité A avec la graduation G'_1 de cette même règle-étalon.

Notons que les coïncidences « $A-G'_1$ » et « $B-G'_2$ » étant *stationnaires*, c'est-à-dire indépendantes du temps dans $\mathcal{R}'$, la mesure de la longueur AB de la barre donne le même résultat, même si les deux événements ne sont pas simultanés.

On appelle *longueur propre* L_p d'une barre la longueur mesurée par un observateur *fixe* par rapport à la barre. Par conséquent :

$$L_p = x'_2 - x'_1$$

le référentiel $\mathcal{R}'$, par rapport auquel la barre est fixe, est le *référentiel propre*. La longueur d'une barre mesurée par un observateur en *mouvement* par rapport à cette barre est dite, par opposition, longueur impropre.

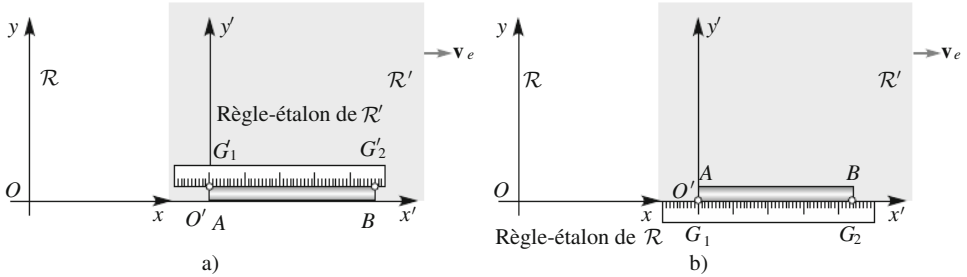


FIG. 3.10.

III. 2. — Relation entre longueur propre et longueur impropre

Pour comparer longueur propre et longueur impropre, la procédure de mesure de la longueur d'une barre doit être universelle. Aussi adopte-t-on la définition suivante : la longueur d'une barre est la différence des abscisses $x_2 - x_1$ obtenues en notant, *au même instant* du référentiel $\mathcal{R}$ de l'observateur, la coïncidence des extrémités A et B de la barre avec les graduations G_1 et G_2 d'une règle-étalon fixe dans $\mathcal{R}$ (Fig. 3.10b).

Notons que cette définition est compatible avec celle de longueur propre, puisque, la barre étant dans ce cas fixe par rapport à l'observateur, la contrainte de simultanéité est superflue. En revanche dans $\mathcal{R}$, en mouvement par rapport à la barre, la coïncidence des extrémités A et B , respectivement avec les graduations G_1 et G_2 de $\mathcal{R}$, n'est pas stationnaire.

Pour une barre AB , en mouvement de translation rectiligne uniforme, à la vitesse $\mathbf{u} = u \mathbf{e}_x$ par rapport à un observateur du référentiel $\mathcal{R}$, écrivons les coordonnées des événements-coïncidences, dans $\mathcal{R}$, puis dans $\mathcal{R}'$ lié à la barre, en utilisant la transformation de Lorentz-Poincaré. Il vient, en introduisant $\beta_e = u/c$ et γ_e :

$$\begin{array}{cc} E_1 \Big|_{\mathcal{R}} \begin{array}{l} ct_1 \\ x_1 \end{array} & E_2 \Big|_{\mathcal{R}} \begin{array}{l} ct_2 \\ x_2 \end{array} & E_1 \Big|_{\mathcal{R}'} \begin{array}{l} ct'_1 = \gamma_e(ct_1 - \beta_e x_1) \\ x'_1 = \gamma_e(x_1 - \beta_e ct_1) \end{array} & E_2 \Big|_{\mathcal{R}'} \begin{array}{l} ct'_2 = \gamma_e(ct_2 - \beta_e x_2) \\ x'_2 = \gamma_e(x_2 - \beta_e ct_2) \end{array} \end{array}$$

puisque la mesure faite par l'observateur de $\mathcal{R}$ implique $t_1 = t_2$. On en déduit :

$$x'_2 - x'_1 = \gamma_e (x_2 - x_1) \quad \text{avec} \quad \gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2} \quad \text{et} \quad \beta_e = \frac{u}{c}$$

On retient la relation suivante, entre la longueur propre $L_p = x'_2 - x'_1$, mesurée dans $\mathcal{R}'$ où la barre est fixe, et la longueur impropre $L_i = x_2 - x_1$, mesurée dans $\mathcal{R}$:

$$L_i = \frac{L_p}{\gamma_e} \quad \text{avec} \quad \gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2}$$

Ainsi, les longueurs d'une même barre, mesurées dans le référentiel propre $\mathcal{R}'$ et dans tout autre référentiel $\mathcal{R}$, par rapport auquel $\mathcal{R}'$ est en mouvement à la vitesse $\mathbf{u} = u \mathbf{e}_x$, sont différentes. Elles sont dans le rapport γ_e , la valeur la *plus grande* étant mesurée dans le référentiel propre. Ce résultat est connu sous le nom de *contraction des longueurs*.

Ici aussi, il faut souligner que cette contraction des longueurs n'est pas subjective mais objective ; c'est un effet réel de perspective qui apparaît lorsqu'on mesure la distance qui sépare deux événements dans un référentiel où ces événements ne se produisent pas au même instant.

En faisant $\gamma_e = 1$, on trouve le cas newtonien dans lequel la mesure de la longueur d'une barre ne dépend pas de son état de mouvement par rapport à l'observateur.

Remarques : 1) Les coordonnées perpendiculaires à la direction de la vitesse $\mathbf{u}$ sont inchangées. Par conséquent, la longueur d'une barre qui se déplace perpendiculairement à sa direction n'est pas affectée par le mouvement.

2) Il n'est pas inutile de préciser que les longueurs de deux règles *identiques* mesurées par deux observateurs A et B , respectivement fixes par rapport à chacune d'elles, sont égales, puisque ces observateurs comparent les longueurs propres de deux règles identiques. La contraction est constatée lorsque A mesure la longueur de la règle accompagnant B ou lorsque B mesure la longueur de la règle fixe par rapport à A .

III.3. — Exemples

a) Vitesse associée à une contraction donnée

Calculons la vitesse u d'un observateur pour laquelle la longueur de la barre qu'il mesure soit égale au tiers de la longueur propre. Comme $\gamma_e = 3$, il vient :

$$u = \left(1 - \frac{1}{\gamma_e^2}\right)^{1/2} c = \frac{2\sqrt{2}}{3} c = 0,94 c$$

b) Paradoxe de la barre et de l'ouverture

Une barre AB , de longueur propre $L = 1,1 \text{ m}$, se déplace, à la vitesse $\mathbf{u} = u \mathbf{e}_x$, avec $u = 0,5 c$, par rapport au référentiel du laboratoire $\mathcal{R} = Oxyz$, le long de l'axe horizontal Ox (Fig. 3.11). Sur cet axe de $\mathcal{R}$, on a ménagé une ouverture OP de diamètre propre plus petit, $D = 1 \text{ m}$.

D'après la contraction des longueurs, la longueur de la barre mesurée par un observateur de $\mathcal{R}$ est :

$$\frac{L}{\gamma_e} \approx 95,3 \text{ cm} \quad \text{puisque} \quad \gamma_e = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx 1,1547$$

De même, la longueur OP paraît contractée pour un observateur de $\mathcal{R}'$: $D/\gamma_e \approx 86,6 \text{ cm}$.

Il est instructif de comparer les abscisses des points B et P , lorsque A et O coïncident (Fig. 3.11a), et les abscisses de A et O lorsque B et P coïncident (Fig. 3.11b).

(1) Événement E_1 : A et O coïncident.

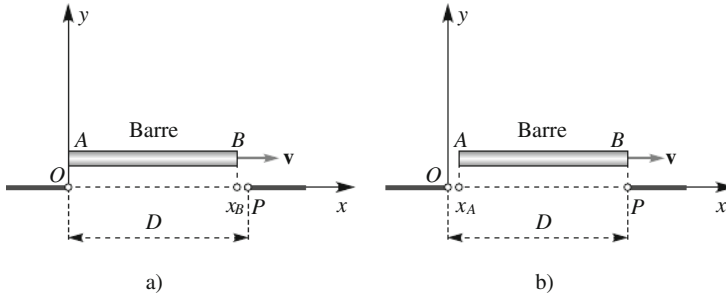


FIG. 3.11.

Adoptons comme origine cet événement :

$$E_1 \left| \begin{array}{l} ct = 0 \\ x = 0 \end{array} \right|_{\mathcal{R}} \quad E_1 \left| \begin{array}{l} ct' = 0 \\ x' = 0 \end{array} \right|_{\mathcal{R}'}$$

Écrivons successivement, dans $\mathcal{R}'$ et dans $\mathcal{R}$, les coordonnées spatiales de l'extrémité B de la barre, à l'instant $t = 0$ de $\mathcal{R}$. Il vient :

$$x_B = \gamma_e(x'_B + \beta_e ct'_B) \quad \text{et} \quad ct_B = 0 = \gamma_e(ct'_B + \beta_e x'_B) \quad \text{avec} \quad x'_B = L$$

On en déduit :

$$ct'_B = -\beta_e x'_B = -\beta_e L \quad \text{et} \quad x_B = \gamma_e(L - \beta_e^2 L) = \frac{L}{\gamma_e}$$

Ainsi :

$$x_B = \frac{L}{\gamma_e} = 95,3 \text{ cm} \quad ct_B = 0 \quad x'_B = L = 110 \text{ cm} \quad \text{et} \quad ct'_B = -\beta_e L = -55 \text{ cm}$$

La valeur de x_B confirme le résultat relatif à la contraction des longueurs. Lorsque les extrémités gauches A et O de la barre et de l'ouverture coïncident, l'extrémité B de la barre a une abscisse x_B inférieure à celle du point P de l'ouverture : la barre est contenue dans l'ouverture OP .

Remarque : Notons que, si les horloges de $\mathcal{R}$ et de $\mathcal{R}'$, situées respectivement aux origines O et A des deux référentiels, donnent toutes deux la même indication 0 lorsque ces deux points coïncident, elles ne donnent pas la même indication 0 au point B , car ce dernier ne coïncide pas avec O : $ct_B = 0$ alors que $ct'_B = -\beta_e L$.

(2) Événement E_2 : B et P coïncident.

Les coordonnées spatio temporelles de cet événement, dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$ sont :

$$E_2 \left| \begin{array}{l} ct = c\tau \\ x = D \end{array} \right|_{\mathcal{R}} \quad E_2 \left| \begin{array}{l} ct' = \gamma_e(c\tau - \beta_e L) \\ x' = L = \gamma_e(D - \beta_e c\tau) \end{array} \right|_{\mathcal{R}'}$$

On en déduit aisément $c\tau$, en fonction de D et L :

$$c\tau = \frac{D}{\beta_e} - \frac{L}{\gamma_e \beta_e} \quad \text{soit} \quad c\tau = 9,47 \text{ cm}$$

Écrivons successivement, dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$, les coordonnées spatiales de l'extrémité A , à l'instant $t = \tau$ pour $\mathcal{R}$, lorsque B et P coïncident. Il vient :

$$x_A = \gamma_e(x'_A + \beta_e ct'_A) \quad ct_A = c\tau \quad \text{avec} \quad x'_A = 0 = \gamma_e(x_A - \beta_e ct_A) \quad \text{et} \quad ct'_A = \gamma_e(ct_A - \beta_e x_A)$$

On en déduit :

$$x_A = \beta_e c\tau = 4,74 \text{ cm} \quad \text{et} \quad ct'_A = \gamma_e(c\tau - \beta_e x_A) = \gamma_e c\tau(1 - \beta_e^2) = \frac{c\tau}{\gamma_e} = 8,20 \text{ cm}$$

Ainsi, lorsque les extrémités droites de la barre et de l'ouverture coïncident, A est à droite de O .

En résumé, bien que plus longue de 10 cm, la barre en mouvement est toujours contenue dans l'ouverture. C'est ce résultat, surprenant dans le contexte newtonien, qui constitue le paradoxe.

Il est intéressant de calculer le carré de la pseudo-norme de l'intervalle entre les événements E_1 « A et O coïncident » et E_2 « B et P coïncident » :

$$s_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = c^2\tau^2 - D^2 = \left(\frac{D}{\beta_e} - \frac{L}{\gamma_e\beta_e}\right)^2 - D^2 = 9,47^2 - 100^2 = -9,910 \text{ cm}^2$$

L'intervalle entre les événements E_1 et E_2 est donc du genre espace : il n'y a pas de relation de causalité entre eux.

III. 4. — Visualisation de la contraction des longueurs sur le diagramme de Minkowski

Traçons, sur le diagramme de Minkowski, l'hyperbole H_s d'équation $c^2t^2 - x^2 = -1$ (Fig. 3.12). Désignons par A_1 et A_2 les points représentant les deux événements E_1 et E_2 qui se produisent, au même instant ct dans $\mathcal{R}$, aux points de coordonnées respectives x_1 et x_2 . Les droites parallèles à l'axe Oct , passant par A_1 et A_2 , coupent l'axe Oct' aux points A'_1 et A'_2 .

La longueur propre entre ces deux événements est donnée par le rapport : A_1A_2/OA puisque, A étant l'intersection de H_s avec l'axe Ox , OA représente l'unité de longueur dans $\mathcal{R}$. Quant à la longueur impropre, elle est représentée par le rapport $A'_1A'_2/OA'$, A' étant le point d'intersection de l'axe Ox' avec l'hyperbole H_s et OA' l'unité de longueur selon l'axe Ox' , puisque :

$$c^2t'^2 - x'^2 = -1 \quad \text{donne} \quad x' = 1 \quad \text{pour} \quad t' = 0$$

À l'aide du diagramme, on voit que, si K' est le point d'intersection de la parallèle menée de A à l'axe Oct avec l'axe Ox' , et si α est l'angle que fait Ox' avec Ox , on a :

$$\frac{A_1A_2}{OA} = \frac{A_1A_2/\cos\alpha}{OA/\cos\alpha} = \frac{A'_1A'_2}{OK'} \geq \frac{A'_1A'_2}{OA'} \quad \text{soit} \quad L \leq L_p$$

puisque $OK' \leq OA'$. Le rapport OK'/OA' est le facteur de contraction. Pour montrer qu'il vaut $1/\gamma_e$, exprimons séparément OK' et OA' en fonction de OA . On a :

$$OK' = \frac{OA}{\cos\alpha} = OA(1 + \beta_e^2)^{1/2} \quad \text{puisque} \quad \tan\alpha = \beta_e \quad \text{et} \quad \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$$

On obtient OA' en exprimant que A' est l'intersection de l'axe Ox' avec l'hyperbole H_s ; ses coordonnées satisfont aux deux équations :

$$ct = \tan\alpha x = \beta_e x \quad \text{et} \quad c^2t^2 - x^2 = -OA^2$$

On en déduit :

$$OA' = (c^2t^2 + x^2)^{1/2} = (1 + \beta_e^2)^{1/2}x = OA \left(\frac{1 + \beta_e^2}{1 - \beta_e^2} \right)^{1/2} \quad \text{d'où} \quad \frac{OK'}{OA'} = (1 - \beta_e^2)^{1/2} = \frac{1}{\gamma_e}$$

Le facteur de contraction vaut donc bien $1/\gamma_e$.

IV.2. — Quadrivecteur d'onde

L'onde lumineuse monochromatique plane est caractérisée, en notation complexe, par la fonction d'onde Ψ (cf. *Optique*) :

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = A \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] = A \exp[i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)]$$

où $\omega = 2\pi\nu$ est la pulsation et $\mathbf{k}$ le vecteur d'onde de composantes k_x , k_y et k_z . La partie imaginaire de l'argument de l'exponentielle peut être considérée comme le produit scalaire, changé de signe, de deux quadrivecteurs : $4\text{-}x = (ct, \mathbf{r})$ et $4\text{-}k = (\omega/c, \mathbf{k})$, appelé *quadrivecteur d'onde* :

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = A \exp[-i(4\text{-}k \cdot 4\text{-}x)] \quad \text{avec} \quad 4\text{-}k = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right)$$

Cette définition du quadrivecteur d'onde a un sens car le produit scalaire, $4\text{-}x \cdot 4\text{-}k$, est un invariant par changement de référentiel galiléen. Pour s'en convaincre, il suffit de rappeler que les phénomènes d'interférence de deux ondes planes (cf. *Optique*), qui sont déterminés par la différence de phase entre ces ondes, sont invariants dans ce changement.

IV.3. — Formules de l'effet Doppler-Fizeau

Les formules de l'effet Doppler-Fizeau découlent de la transformation de Lorentz entre le référentiel de la source $\mathcal{R}$ et celui du récepteur $\mathcal{R}'$:

$$\omega/c = \gamma_e(\omega'/c + \beta_e k'_x) \quad k_x = \gamma_e(k'_x + \beta_e \omega'/c) \quad k_y = k'_y \quad k_z = k'_z$$

Puisque $k'_x = k' \cos \theta' = (2\pi\nu'/c) \cos \theta'$, cette dernière équation donne :

$$\nu = \gamma_e(\nu' + \beta_e \nu' \cos \theta') \quad \text{soit} \quad \nu' = \nu \frac{1}{\gamma_e(1 + \beta_e \cos \theta')}$$

En utilisant les indices s et r pour la source et le récepteur respectivement, on retient l'expression explicite suivante :

$$\nu_r = \nu_s \frac{1}{\gamma_e(1 + \beta_e \cos \theta_r)}$$

IV.4. — Effet Doppler-Fizeau longitudinal

a) Définition et expression

L'effet Doppler-Fizeau est longitudinal lorsque l'angle que fait la direction de l'onde avec l'axe du mouvement est nul : $\theta_r = 0$. La formule précédente se réduit, dans ce cas, à :

$$\nu_r = \nu_s \frac{(1 - \beta_e^2)^{1/2}}{1 + \beta_e} \quad \text{soit} \quad \nu_r = \nu_s \left(\frac{1 - \beta_e}{1 + \beta_e} \right)^{1/2}$$

Dans le cas fréquent où $\beta_e \ll 1$, on obtient la formule approchée suivante :

$$\nu_r \approx \nu_s (1 - \beta_e) \quad \text{ou} \quad \frac{\nu_r - \nu_s}{\nu_s} = \frac{\Delta\nu}{\nu_s} \approx -\frac{v_e}{c} \quad \text{avec} \quad \Delta\nu = \nu_r - \nu_s$$

On retient souvent ce dernier résultat en fonction de la longueur d'onde ($\lambda = c/\nu$). Comme on a, en différentiant, $d\nu/\nu + d\lambda/\lambda = 0$, il vient :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_s} \approx \frac{v_e}{c} \quad \text{avec} \quad \Delta\lambda = \lambda_r - \lambda_s$$

v_e étant la vitesse d'éloignement du récepteur.

Si le récepteur s'éloigne de la source ($v_e > 0$), la fréquence reçue est *plus faible* que la fréquence émise, alors que, s'il s'en rapproche ($v_e < 0$), cette fréquence est *plus grande*.

b) Application à l'astrophysique

L'effet Doppler-Fizeau est utilisé en astrophysique pour déterminer la vitesse des étoiles et des galaxies, lesquelles émettent de la lumière dans toutes les directions. La différence de longueur d'onde $\Delta\lambda$, entre les ondes émises dans le sens de l'éloignement et celles émises dans le sens du rapprochement, est, dans l'approximation des *faibles vitesses*, telle que :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx 2 \frac{v_e}{c}$$

Si, pour $\lambda = 500 \text{ nm}$, l'écart spectral $\Delta\lambda$ est de 1 nm , on trouve $\beta_e = 10^{-3}$ et $v_e = 3 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Cette dernière formule approchée ne convient pas pour les quasars (contraction de *quasi stellar radio-sources*) qui sont des objets stellaires pouvant se déplacer à très grande vitesse. Par exemple, l'onde émise par un quasar, de longueur d'onde $\lambda = 121,6 \text{ nm}$ (raie Lyman α), est observée avec une longueur d'onde $\lambda' = 586 \text{ nm}$. La formule exacte de l'effet Doppler-Fizeau donne alors :

$$\frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{\lambda} \left(\frac{1 - \beta_e}{1 + \beta_e} \right)^{1/2} \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{\lambda'}{\lambda} \right)^2 = \frac{1 + \beta_e}{1 - \beta_e} \quad \text{et} \quad \beta_e = 0,917$$

Remarque : Le décalage spectral vers le rouge du rayonnement émis par les galaxies, ou *redshift*, fut interprété par l'astrophysicien E. Hubble comme un effet Doppler-Fizeau. Après analyse, la contribution majeure au décalage observé est due à l'expansion de l'Univers qui induit un effet Doppler-Fizeau apparent (cf. chapitre 10).

c) Application au radar de contrôle de vitesse

Le RADAR, acronyme de l'expression anglaise *Radio Detecting And Ranging*, est une source d'ondes électromagnétiques permettant la détection et la mesure de la distance d'objets en mouvement. Dans le radar utilisé pour le contrôle de la vitesse des véhicules sur route, la source immobile envoie une onde, de fréquence ν_s , vers le véhicule qui se rapproche de la source, avec une vitesse v ; l'onde reçue par le véhicule, avec une fréquence ν_r , est alors réfléchiée vers la source, puis détectée par cette dernière avec une fréquence ν'_r (Fig. 3.14). De l'écart relatif $(\nu'_r - \nu_s)/\nu_s$, on déduit la vitesse du véhicule.

D'après les résultats de l'effet Doppler longitudinal, on peut écrire les deux relations suivantes :

i) Entre ν_r et ν_s , on a :

$$\nu_r = \nu_s \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^{1/2}$$

puisque $v = \beta c$ est une vitesse de rapprochement.

ii) Entre ν'_s , qui est la fréquence ν_r réfléchiée par le véhicule, et ν'_r , on a, de façon analogue, v étant toujours une vitesse de rapprochement :

$$\nu'_r = \nu'_s \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^{1/2}$$

Il en résulte :

$$\nu'_r = \nu_s \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \quad \text{soit} \quad \nu'_r \approx \nu_s(1 + 2\beta) \quad \text{et} \quad v \approx \frac{\nu'_r - \nu_s}{\nu_s} \frac{c}{2}$$

Ordre de grandeur : avec une source laser émettant dans le domaine infrarouge une onde, de longueur d'onde $\lambda_s = 3 \mu\text{m}$ soit de fréquence $\nu_s = c/\lambda = 10^{14} \text{ Hz}$, on a détecté un écart spectral de 27,5 MHz en mesurant la vitesse v d'un véhicule. Par conséquent :

$$v \approx 1,5 \times 10^8 \frac{27,5 \times 10^6}{10^{14}} = 41,25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{soit} \quad 41,25 \times 3600 = 148,5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$



FIG. 3.14.

IV . 5 . — Effet Doppler-Fizeau transversal

C'est un effet essentiellement relativiste, car il est directement relié à la dilatation des durées. Sur la figure 3.13, supposons que le rayonnement électromagnétique soit émis dans la direction qui fait un angle droit avec l'axe du mouvement : $\theta_r = \pi/2$. La formule générale traduisant l'effet Doppler-Fizeau donne :

$$\nu_r = \frac{\nu_s}{\gamma_e} = \nu_s(1 - \beta_e^2)^{1/2}$$

Cet effet est difficile à observer, car il est en général masqué par l'effet Doppler-Fizeau longitudinal. Il a cependant été mis en évidence par H. Ives et G. Stilwell en 1938, sur des ions H_2^+ . Ces deux physiciens se sont affranchis de l'effet longitudinal en faisant la moyenne des fréquences des rayonnements observés dans les directions opposées $\theta_r = 0$ et $\theta_r = \pi$. D'après ce qui précède, cette moyenne vaut :

$$\nu_{r,m} = \frac{\nu_r(0) + \nu_r(\pi)}{2} = \frac{\nu_s}{2\gamma_e(1 + \beta_e)} + \frac{\nu_s}{2\gamma_e(1 - \beta_e)} \quad \text{soit} \quad \nu_{r,m} = \gamma_e \nu_s$$

en effectuant et en simplifiant. On en déduit :

$$\frac{\nu_{r,m} - \nu_s}{\nu_s} = \gamma_e - 1$$

En cinématique newtonienne, le décalage spectral entre $\nu_{r,m}$ et ν_s est donc nul, ce qui souligne le caractère essentiellement relativiste de l'effet Doppler-Fizeau transversal.

Lorsque les vitesses des particules, qui émettent le rayonnement, sont faibles, comme c'est le cas ici, on obtient la formule approchée suivante :

$$\Delta\nu = \frac{\nu_{r,m} - \nu_s}{\nu_s} = \frac{\beta_e^2}{2} \quad \text{ce qui s'écrit aussi} \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda_{r,m} - \lambda_s}{\lambda_s} = -\frac{\beta_e^2}{2}$$

en introduisant les longueurs d'onde $\lambda_s = c/\nu_s$ et $\lambda_{r,m} = c/\nu_{r,m}$. Dans l'expérience de Ives et Stilwell, le déplacement spectral par effet Doppler-Fizeau transversal de la raie H_β , pour les ions H_2^+ , de longueur d'onde 481,6 nm, était de 2 pm. Notons que le déplacement spectral par effet Doppler-Fizeau longitudinal était, lui, de 1 500 pm.

Remarque : La lecture de la publication de Ives et Stilwell est instructive, car ces auteurs n'étaient pas initialement des supporters inconditionnels de la théorie d'Einstein, au contraire.

IV.6. — Aberration de l'émission lumineuse

Les formules spatiales issues de la transformation du quadrivecteur d'onde donnent :

$$k' \cos \theta' = \gamma_e \left(k \cos \theta - \beta_e \frac{\omega}{c} \right) \quad \text{et} \quad k' \sin \theta' = k \sin \theta$$

Comme $k = 2\pi\nu/c$ et $k' = 2\pi\nu'/c$, il en résulte que :

$$\nu' \cos \theta' = \gamma_e \nu (\cos \theta - \beta_e)$$

soit, en tenant compte de l'effet Doppler et en adoptant des notations explicites :

$$\cos \theta_r = \frac{\cos \theta_s - \beta_e}{1 - \beta_e \cos \theta_s} \quad \text{et} \quad \sin \theta_r = \frac{\sin \theta_s}{\gamma_e (1 - \beta_e \cos \theta_s)}$$

Pour $\theta_s = 0$, on retrouve $\theta_r = 0$. En revanche, pour $\theta_s = \pi/2$, on obtient :

$$\cos \theta_r = -\beta_e \quad \text{et} \quad \sin \theta_r = \frac{1}{\gamma_e} \quad \text{d'où} \quad \tan \theta_r = -\frac{1}{\gamma_e \beta_e}$$

Il en résulte, en introduisant l'angle algébrique $\alpha_r = \theta_r - \pi/2$:

$$\tan \alpha_r = -\frac{1}{\tan \theta_r} = \gamma_e \beta_e$$

IV.7. — Aberration des étoiles

Le cas où $\theta_s = -\pi/2$ est historiquement très intéressant car il correspond à l'émission d'une onde lumineuse émise par une étoile dans le sens opposé à l'axe Oy . L'angle θ_r sous lequel cette émission est perçue par un observateur terrestre diffère de $-\pi/2$ (Fig. 3.15) ; aussi appelle-t-on *aberration des étoiles* l'écart entre ces deux angles. Ce phénomène a été étudié par J. Bradley en 1729, dans le cadre newtonien évidemment.

Rigoureusement, on a, ici, puisque $\theta_s = -\pi/2$:

$$\cos \theta_r = -\beta_e \quad \text{et} \quad \sin \theta_r = -\frac{1}{\gamma_e} \quad \text{d'où} \quad \tan \theta_r = \frac{1}{\gamma_e \beta_e}$$

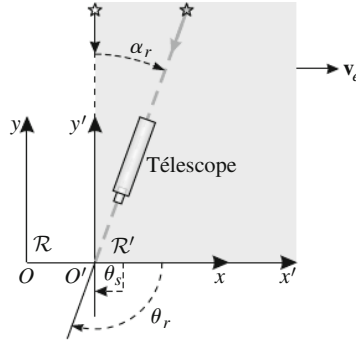


FIG. 3.15.

Par conséquent, il vient, en introduisant l'angle d'aberration α :

$$\alpha_r = \theta_r - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \theta_r + \frac{\pi}{2} \quad \text{d'où} \quad \tan \alpha_r = -\frac{1}{\tan \theta_r} = -\gamma_e \beta_e$$

Dans l'approximation newtonnienne, qui est largement satisfaite ici, puisque la vitesse de translation de la Terre v_e sur son orbite circumsolaire est de l'ordre de $30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, soit $c/10^4$, l'expression précédente se réduit à :

$$\alpha_r \approx -\frac{v_e}{c}$$

Nous reviendrons plus en détail sur l'aberration des étoiles, dans l'application des formules de transformation des vitesses (cf. chapitre 4), car, c'est en composant la vitesse de la lumière avec v_e , selon la transformation de Galilée, que Bradley étudia ce phénomène.

IV . 8 . — Effet Doppler et paradoxe des jumeaux de Langevin

Il est instructif de réexaminer le paradoxe des jumeaux de Langevin, à l'aide de l'effet Doppler, précisément en étudiant la perception par l'un des jumeaux de signaux périodiques émis par l'autre. Comme on s'interroge parfois sur l'objectivité du vieillissement comparé des deux jumeaux, proposons l'expérience qui suit.

Le jumeau astronaute, Albert, émet des signaux électromagnétiques, par exemple à chaque battement de son cœur, soit avec la fréquence $\nu_p = 1 \text{ Hz}$ qu'il mesure dans son référentiel, $\mathcal{R}'_G$ à l'aller et $\mathcal{R}''_G$ au retour.

Admettons, ce qui est réaliste, que le cœur de son frère jumeau Gaspard, resté sur Terre, bat aussi avec la même cadence, c'est-à-dire que la fréquence de battements que ce dernier mesure lui-même est aussi $\nu_p = 1 \text{ Hz}$. Le nombre de battements de cœur de Gaspard N_G , mesuré dans son référentiel $\mathcal{R}_G$, est :

$$N_G(\mathcal{R}_G) = \nu_p T_G$$

T_G étant la durée du voyage aller et retour de son frère Albert. Quant au nombre $N_A(\mathcal{R}_A)$ de battements de cœur d'Albert, que ce dernier mesure, on l'obtient en effectuant la somme de deux contributions, l'une à l'aller dans le référentiel $\mathcal{R}'_A$, l'autre au retour dans le référentiel $\mathcal{R}''_A$:

$$N_A(\mathcal{R}_A) = N'_A(\mathcal{R}'_A) + N''_A(\mathcal{R}''_A) = \nu_p \frac{T_G}{2\gamma_e} + \nu_p \frac{T_G}{2\gamma_e} = \nu_p \frac{T_G}{\gamma_e}$$

À l'*aller*, la fréquence des signaux émis par Albert et reçus par Gaspard, est celle fournie par l'effet Doppler-Fizeau longitudinal :

$$\nu_G = \nu_p \left(\frac{1 - \beta_e}{1 + \beta_e} \right)^{1/2}$$

dans laquelle β_e est la vitesse d'éloignement d'Albert par rapport à Gaspard. En outre, le dernier signal qu'envoie Albert, avant de changer de référentiel, est reçu par Gaspard, à l'instant θ_G :

$$\theta_G = \frac{T_G}{2} + \frac{v_e(T_G/2)}{c} = \frac{T_G}{2}(1 + \beta_e)$$

Le nombre $N'_A(\mathcal{R}_G)$ de battements de cœur d'Albert perçus par Gaspard à l'aller est :

$$N'_A(\mathcal{R}_G) = \nu_p \left(\frac{1 - \beta_e}{1 + \beta_e} \right)^{1/2} \times \theta_G = \nu_p \frac{T_G}{2} \left[(1 - \beta^2)^{1/2} \right] = \nu_A \frac{T_G}{2\gamma_e}$$

Précisons numériquement ces résultats en choisissant $\beta = 0,995$ et $T_G = 20$ ans .

Comme $\gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2} = 10$, on trouve :

$$T_A = 2 \text{ ans} \quad \nu'_G = 1 \times \left(\frac{1 - 0,995}{1 + 0,995} \right)^{1/2} \approx 0,05 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad \theta_G = \frac{T_G}{2}(1 + \beta_e) = 19,95 \text{ ans}$$

Ainsi, pendant l'*aller*, qui dure pour lui 1 an , Albert envoie des messages toutes les secondes, lesquels sont reçus par Gaspard toutes les $1/\nu'_G = 20$ s , le dernier de ces messages étant reçu par Gaspard au bout de 19,95 ans , après le début du voyage de son frère. Le nombre de ces messages à l'aller est donc :

$$N'_A(\mathcal{R}_G) = \nu_p \frac{T_G}{2\gamma_e} = 365,25 \times 24 \times 3\,600 = 31\,557\,600$$

Au *retour*, la fréquence des signaux émis par Albert et reçus par Gaspard, s'obtient toujours à l'aide de la formule de l'effet Doppler-Fizeau longitudinal, mais en changeant β_e en $-\beta_e$. On trouve :

$$\nu''_G = \nu_p \left(\frac{1 + \beta_e}{1 - \beta_e} \right)^{1/2} = 1 \times \left(\frac{1,995}{0,005} \right)^{1/2} \approx 20 \text{ Hz}$$

d'où la durée $1/\nu''_G = 0,05$ s qui sépare deux messages consécutifs. Ainsi, pendant le retour, qui dure pour lui 1 an , Albert envoie des messages toutes les secondes, lesquels sont reçus par Gaspard toutes les 0,05 secondes. Gaspard reçoit tous les messages envoyés par Albert, mais pendant une durée bien plus courte :

$$20 - 19,95 = 0,05 \text{ an}$$

Le nombre $N''_A(\mathcal{R}_G)$ de battements de cœur d'Albert perçus par Gaspard au retour est donc :

$$\begin{aligned} N''_A(\mathcal{R}_G) &= \nu_p \left(\frac{1 + \beta_e}{1 - \beta_e} \right)^{1/2} \times (T_G - \theta_G) = \nu_p \frac{T_G}{2} (1 - \beta^2)^{1/2} = \nu_p \frac{T_G}{\gamma_e} \\ &= 365,25 \times 24 \times 3\,600 = 31\,557\,600 \end{aligned}$$

soit, le même qu'à l'aller.

On en déduit que le nombre de battements de cœur d'Albert que mesure Gaspard est égal au nombre de battements de cœur qu'Albert mesure sur lui-même :

$$N_A(\mathcal{R}_G) = N'_A(\mathcal{R}_G) + N''_A(\mathcal{R}_G) = \frac{\nu_p T_G}{\gamma_e} \quad \text{et} \quad N_A(\mathcal{R}_A) = \nu_p T_A = \frac{\nu_p T_G}{\gamma_e}$$

Pour retrouver la dilatation des durées, il suffit de comparer le nombre de battements de cœur d'Albert que mesure Gaspard grâce aux signaux qu'il reçoit et le nombre de battements de cœur que Gaspard mesure sur lui-même :

$$N_A(\mathcal{R}_G) = \frac{\nu_p T_G}{\gamma_e} \quad \text{et} \quad N_G(\mathcal{R}_G) = \nu_p T_G = \gamma_e N_A(\mathcal{R}_G)$$

CONCLUSION

Rappelons les points essentiels.

1) Tout processus de mesure s'appuie sur la comparaison à un étalon et sur le concept de simultanéité. On dit que deux événements sont simultanés lorsque des horloges synchronisées, placées aux points où ils se produisent, donnent la même indication.

2) La durée propre T_p entre deux événements est la durée mesurée dans le référentiel galiléen dans lequel les événements sont localisés au même point. Mesurée dans tout autre référentiel, la durée impropre T_i entre ces événements est γ_e fois plus grande :

$$T_i = \gamma_e T_p$$

C'est la dilatation des durées.

3) La longueur propre L_p d'une barre est la longueur mesurée dans le référentiel galiléen où elle est au repos. Mesurée dans tout autre référentiel, la longueur impropre L_i de la barre est γ_e fois plus petite :

$$L_i = \frac{L_p}{\gamma_e}$$

C'est la contraction des longueurs.

4) L'effet Doppler-Fizeau s'exprime par la formule générale suivante :

$$\nu_r = \nu_s \frac{(1 - \beta_e^2)^{1/2}}{1 + \beta_e \cos \theta_r}$$

dans laquelle ν_s est la fréquence de l'onde émise par la source, β_e la vitesse d'éloignement du récepteur et θ_r l'angle, que fait avec l'axe du mouvement, la direction du rayonnement perçu par le récepteur.

Pour $\theta_r = 0$, l'effet est longitudinal ; on retrouve par approximation l'expression newtonienne. En revanche, pour $\theta_r = \pi/2$, on obtient un effet transversal qui n'a pas d'équivalent en cinématique newtonienne.

EXERCICES ET PROBLÈMES

P3– 1. Mouvement de translation d'une barre le long de sa direction

Une barre, de longueur l , se déplace parallèlement à elle-même, d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme, avec une vitesse u par rapport à un observateur de $\mathcal{R}$.

Déterminer u sachant que la longueur mesurée par l'observateur est $l/2$.

P3– 2. Durée de vie des mésons

Un paquet de mésons μ décrit, en se désintégrant, l'axe Ox d'un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, à la vitesse $v = 0,99c$. Dans le référentiel des mésons $\mathcal{R}'$, le nombre de mésons existant, à l'instant t' de $\mathcal{R}'$, est $N(t') = N_0 \exp(-t'/\tau_p)$, τ_p étant la durée de vie.

Établir l'expression $N(t)$ du nombre de mésons, existant à l'instant t dans $\mathcal{R}$, sachant que $\tau_p = 2,2 \mu\text{s}$.

P3– 3. Durée de vie des muons

Un muon est formé, dans la haute atmosphère, en un point O pris comme origine d'un référentiel terrestre galiléen $\mathcal{R}$. Il décrit l'axe Ox , orienté vers le centre de la Terre, avec une vitesse constante $v = 0,99c$. Après avoir parcouru la distance $d = 5 \text{ km}$, il se désintègre en un point D de l'axe Ox . On désigne par $\mathcal{R}'$ le référentiel galiléen lié à la particule.

1. Calculer, en microseconde, la durée qui sépare, dans $\mathcal{R}$, les instants de formation et de désintégration du muon. Quelle est la valeur du facteur relativiste du muon ?
2. Écrire les coordonnées spatio-temporelles des événements de formation E_f et de désintégration E_d du muon, successivement dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$.
3. Trouver la valeur de l'intervalle entre les deux événements E_f et E_d .
4. Quelle est la durée de vie propre du muon en microseconde ?

P3– 4. Voyage Terre-Lune avec une fusée rapide

On imagine une fusée se déplaçant de la Terre à la Lune, à la vitesse constante de $0,8c$. La distance à parcourir dans le repère terrestre est $384\,000 \text{ km}$.

1. Quelle est la durée du trajet pour un observateur terrestre ?
2. Calculer la distance Terre-Lune pour un passager de la fusée.
3. Trouver la durée du voyage pour un passager de la fusée.

P3– 5. Mouvement relatif de deux vaisseaux spatiaux

Deux vaisseaux spatiaux, de même longueur propre l , se déplacent dans le même sens, en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel de laboratoire $\mathcal{R}$. Un observateur placé à la tête du vaisseau le moins rapide, mesure la durée T qui sépare le passage de la tête et de la queue de l'autre vaisseau.

Calculer, en fonction de l et T , la vitesse V du faisceau rapide par rapport au vaisseau lent, sachant que $l = 30 \text{ m}$ et $T = 2 \text{ s}$. Quelle est l'erreur que l'on ferait sur V en conduisant un calcul newtonien ?

P3– 6. Application de l'effet Doppler-Fizeau à la détermination de la vitesse d'un objet stellaire

On reçoit d'un objet stellaire une onde lumineuse fortement décalée vers le rouge. La raie caractéristique Lyman α de l'hydrogène, de longueur d'onde dans le laboratoire $\lambda_s = 126 \text{ nm}$ (longueur propre), est observée à la longueur d'onde $\lambda_r = 270 \text{ nm}$.

1. En admettant que ce décalage est dû au seul déplacement longitudinal de l'objet émetteur par rapport à la Terre, calculer la vitesse de cet objet et trouver le sens de son déplacement.
2. Quelle valeur de la vitesse aurait-on obtenu à l'aide d'une théorie newtonienne ? Commenter.

P3– 7. Approche cinématique de l'effet Doppler-Fizeau

Un véhicule spatial s'éloigne de la Terre avec une vitesse constante $u = 0,6c$, en émettant une impulsion lumineuse (signal électromagnétique très bref), toutes les secondes lues sur les horloges du bord.

1. Quel est l'intervalle de temps T_r qui sépare la réception des deux tops successifs par un observateur terrestre ? Que devient cet intervalle, lors du retour sur la Terre du véhicule, avec la même vitesse ?
2. Calculer la variation relative $(T_r - T_s)/T_s$ approchée au second ordre en u/c près. Comparer ce résultat à celui issu d'une théorie newtonienne. Conclure.

P3– 8. Durée d'un voyage intersidéral

On souhaite envoyer une sonde dans le voisinage de l'étoile α du Centaure, située à une distance $D = 4$ années-lumière de la Terre, à l'aide d'une fusée se déplaçant à vitesse constante.

1. Quelle doit être la vitesse constante v_e de la fusée pour que la durée du voyage, mesurée sur les horloges du véhicule spatial, soit $T_f = 1 \text{ an}$?
2. Quelle est la durée du voyage pour un observateur terrestre ?

P3– 9. Mesure de longueurs

Une tige AB , de longueur propre $L_0 = 1 \text{ m}$, se déplace, à la vitesse $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_x$, par rapport au référentiel du laboratoire $\mathcal{R} = Oxyz$, le long de l'axe horizontal Ox . On désigne par P le point de l'axe Ox situé à l'abscisse L_0 dans $\mathcal{R}$ et on introduit le facteur relativiste γ_e associé à $\beta_e = u/c$.

1. a) Rappeler l'écriture de la transformation de Lorentz-Poincaré entre $\mathcal{R}$ et le référentiel $\mathcal{R}' = Ax'y'z'$ invariablement lié à la tige. Calculer γ_e sachant que $\beta_e = 0,5$.

b) Qu'appelle-t-on longueur propre de la tige ? Quelle est, en m, la longueur de la règle mesurée par un observateur de $\mathcal{R}$?

c) Quelle est, en m, la longueur OP mesurée par un observateur de $\mathcal{R}'$?

2. L'extrémité A coïncide avec O à l'instant $t = 0$ pour les horloges de $\mathcal{R}$. Écrire, successivement dans $\mathcal{R}'$ et dans $\mathcal{R}$, les coordonnées spatio-temporelles de l'extrémité B , à $t = 0$ pour $\mathcal{R}$.

3. L'autre extrémité B de la tige coïncide avec P à un instant τ pour $\mathcal{R}$.

a) Écrire, en fonction de L_0 et $c\tau$, les coordonnées spatio-temporelles de cet événement dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$.

b) Exprimer ces coordonnées en fonction de L_0 et γ_e . Application numérique.

c) Quelle est, à l'instant τ de $\mathcal{R}$, la coordonnée spatiale de l'extrémité A dans $\mathcal{R}$? Application numérique.

P3– 10. Train dans un tunnel

Un train, de longueur $l = 100$ m pour un observateur du train $\mathcal{R}'$, est animé d'une vitesse $\mathbf{u} = 0,6c\mathbf{e}_x$ par rapport au sol $\mathcal{R}$. Ce train entre dans un tunnel rectiligne, de longueur L , pour un observateur de $\mathcal{R}$, telle que $L = l/\gamma_e$, γ_e étant le facteur relativiste $(1 - u^2/c^2)^{-1/2}$.

1. Quelle est la longueur du train pour un observateur de $\mathcal{R}$? Justifier.
2. Calculer la longueur du tunnel pour un observateur de $\mathcal{R}'$? Justifier.
3. En adoptant comme événement origine l'événement 1 « la tête du train sort du tunnel », écrire, dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, les coordonnées de l'événement 2 « la queue du train entre dans le tunnel ».
4. Montrer que la phrase « le train est contenu dans le tunnel », à un instant que l'on précisera, a un sens dans $\mathcal{R}$.

P3– 11. Liaison radio entre un vaisseau spatial et une station au sol

Un vaisseau spatial AB , de longueur $l = 120$ m, se déplace selon une trajectoire rectiligne, à la vitesse $v = 0,7c$. Il est muni, à l'avant, d'un récepteur radio qui lui permet de communiquer avec une station au sol, fixe dans $\mathcal{R}$. Lorsque l'arrière A du vaisseau passe devant la station, cette dernière lui envoie, à l'instant pris comme origine, à la fois par les horloges de la station et du vaisseau, un message que le récepteur du vaisseau capte à l'instant t'_r de ses horloges.

1. Calculer t'_r en nanoseconde.
2. À quel instant t_r , pour les horloges de la station, le signal est-il capté par le récepteur du vaisseau ? Pourquoi la relation entre t_r et t'_r n'est-elle pas une relation entre durée propre et durée impropre ?
3. En déduire la distance parcourue par l'avant B du vaisseau à la réception du signal ?

P3– 12. Paradoxe des jumeaux de Langevin

Dans l'expérience des jumeaux de Langevin, on suppose que l'aller se fasse à la vitesse $v_a = (1 + k)\beta c/2$ et le retour à la vitesse $v_r = (1 - k)\beta c/2$ avec $\beta = 0,5$.

1. Exprimer le rapport des durées T_n/T_s du voyage aller et retour pour le jumeau nomade et pour le jumeau sédentaire en fonction de k .
2. Calculer ce rapport dans les deux cas suivants : $k = 0$ et $k = 0,9$. Commenter à l'aide de la courbe donnant T_n/T_s en fonction de k .

P3– 13. Changement de chronologie de deux événements

Une barre AB , de longueur propre $L = 1$ m, se déplace, à la vitesse $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_x$, avec $u = 0,8c$, par rapport au référentiel du laboratoire $\mathcal{R} = Oxyz$, le long de l'axe horizontal Ox . Sur cet axe de $\mathcal{R}$, se trouve une seconde barre OE de même longueur propre $L = 1$ m. On désigne par E_1 l'événement origine pris lorsque les extrémités O et B coïncident, E_2 l'événement défini par la coïncidence des extrémités O et A , E_3 l'événement lorsque les extrémités E et B coïncident,

1. Calculer les coordonnées spatio-temporelles de E_2 . En déduire le carré de l'intervalle entre E_1 et E_2 .
2. Mêmes questions pour E_3 .
3. Comparer la chronologie entre les trois événements dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$. Commenter en calculant le carré de l'intervalle entre E_2 et E_3 .

P3– 14. Ombre portée sur un film photographique d'une règle inclinée en mouvement

Une règle opaque, de longueur l , inclinée d'un angle θ' sur l'axe $O'x'$ du référentiel $\mathcal{R}'$ auquel elle est liée, se déplace avec une vitesse $\mathbf{u} = u \mathbf{e}_x$ par rapport au référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$ (Fig. 3.16). Un film photographique est déroulé dans $\mathcal{R}$, parallèlement à Ox . Une impulsion lumineuse instantanée est envoyée dans $\mathcal{R}$, à l'aide d'un flash, perpendiculairement au film.

1. Montrer que la longueur L de film non impressionné par la lumière a pour expression :

$$L = l \left| -\frac{\cos \theta'}{\gamma_e} + \beta_e \sin \theta' \right|$$

où $\beta_e = u/c$, γ_e est le facteur relativiste associé.

2. Examiner les cas particuliers $\theta' = 0$ et $\theta' = \pi/2$.
3. Peut-on avoir $L = 0$? Commenter.

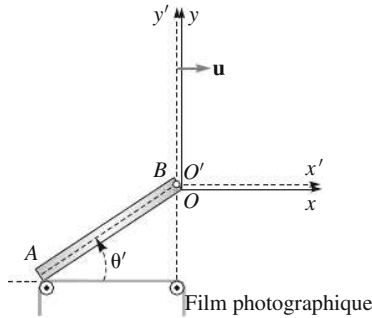


FIG. 3.16.

P3– 15. Effet Doppler après réflexion par un miroir

Une source S , fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire, émet selon l'axe Ox , une onde lumineuse, de longueur d'onde $\lambda_s = 656 \text{ nm}$, laquelle est caractéristique de la raie rouge du spectre de l'atome d'hydrogène. Elle est réfléchiée par un miroir en mouvement qui s'éloigne de S , avec la vitesse $\mathbf{u} = u \mathbf{e}_x$.

1. Quelle est, en fonction de u et de ν_s , la fréquence ν_d' de l'onde lumineuse reçue par le miroir ?
2. Le miroir réfléchit l'onde reçue vers la source. La longueur d'onde λ_s' de l'onde détectée par la source, après réflexion par le miroir, vaut $\lambda_s' = 1,97 \mu\text{m}$. Calculer u/c .

4

Transformation einsteinienne des vitesses et des accélérations

L'expérience de Michelson et Morley a révélé que la composition newtonienne des vitesses dans un changement de référentiel galiléen ne constituait qu'une approximation qui n'était justifiée que si les vitesses étaient faibles devant c , vitesse de la lumière dans le vide.

Nous allons établir les formules de transformation des vitesses et des accélérations en cinématique einsteinienne. Nous appliquerons ces résultats à plusieurs exemples dont l'aberration des étoiles et l'expérience de Fizeau.

I. — FORMULES DE TRANSFORMATION DES VITESSES

Il s'agit d'établir la relation entre les vitesses $\mathbf{v}$ et $\mathbf{v}'$ d'une particule A par rapport aux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ (Fig. 4.1).

Rappelons qu'en cinématique newtonienne cette relation s'écrit $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_e$, si $\mathbf{v}_e$ désigne la vitesse d'entraînement de translation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$.

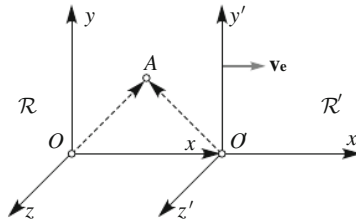


FIG. 4.1.

I. 1. — Expression

Les formules de transformation des vitesses s'obtiennent directement à partir de celles des coordonnées du point A dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. On sait que l'on a, en posant $\beta_e = v_e/c$ et $\gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2}$,

$$ct = \gamma_e(ct' + \beta_e x') \quad x = \gamma_e(x' + \beta_e ct') \quad y = y' \quad z = z'$$

Les vitesses $\mathbf{v}$ et $\mathbf{v}'$ s'explicitent en coordonnées cartésiennes selon :

$$\mathbf{v} \left\{ \begin{array}{l} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \\ v_z = \frac{dz}{dt} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \mathbf{v}' \left\{ \begin{array}{l} v'_x = \frac{dx'}{dt'} \\ v'_y = \frac{dy'}{dt'} \\ v'_z = \frac{dz'}{dt'} \end{array} \right.$$

Il vient, en différentiant les relations spatio-temporelles :

$$\begin{aligned} dx &= \gamma_e(dx' + \beta_e c dt') & dy &= dy' & dz &= dz' & \text{et} & c dt &= \gamma_e(c dt' + \beta_e dx') \\ \text{d'où :} & & & & & & & & \\ \frac{dx}{c dt} &= \frac{\gamma_e(dx' + \beta_e c dt')}{\gamma_e(c dt' + \beta_e dx')} & \frac{dy}{c dt} &= \frac{dy'}{\gamma_e(c dt' + \beta_e dx')} & \frac{dz}{c dt} &= \frac{dz'}{\gamma_e(c dt' + \beta_e dx')} \end{aligned}$$

En divisant haut et bas par dt' , et en simplifiant, on obtient :

$$v_x = \frac{v'_x + v_e}{1 + v_e v'_x / c^2} \quad v_y = \frac{v'_y}{\gamma_e(1 + v_e v'_x / c^2)} \quad v_z = \frac{v'_z}{\gamma_e(1 + v_e v'_x / c^2)}$$

Notons que γ_e n'intervient que dans les composantes transversales v_y et v_z .

Comme on pouvait s'y attendre, on retrouve les formules newtoniennes en faisant tendre c vers l'infini. Cependant, contrairement au cas newtonien, on ne peut pas exprimer les formules einsteiniennes sous une forme vectorielle globale. Il est donc nécessaire de distinguer la vitesse $\mathbf{v}_{//}$, suivant la direction de $\mathbf{v}_e$, de la vitesse $\mathbf{v}_{\perp}$, suivant la direction perpendiculaire à $\mathbf{v}_e$. On écrit alors :

$$\mathbf{v}_{//} = \frac{\mathbf{v}'_{//} + \mathbf{v}_e}{1 + \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}' / c^2} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_{\perp} = \frac{\mathbf{v}'_{\perp}}{\gamma_e(1 + \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}' / c^2)}$$

Remarque : En changeant v_e en $-v_e$, on en déduit aisément les relations inverses, donnant v'_x , v'_y et v'_z en fonction de v_x , v_y , v_z .

$$v'_x = \frac{v_x - v_e}{1 - v_e v_x / c^2} \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma_e(1 - v_e v_x / c^2)} \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma_e(1 - v_e v_x / c^2)}$$

I.2. — Exemples

a) Vitesse relative de deux particules en mouvement sur un axe

Deux particules A_1 et A_2 se déplacent sur un axe Ox , avec les vitesses respectives $v_1 = 0,9c$ et $v_{2,x} = -0,9c$ (Fig. 4.2). La vitesse relative de A_2 par rapport à A_1 est la vitesse de A_2 par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ lié à A_1 . Comme $v_e = v_1 = 0,9c$, on trouve :

$$v'_x = \frac{-0,9 - 0,9}{1 - 0,9 \times (-0,9)} = -0,994c$$

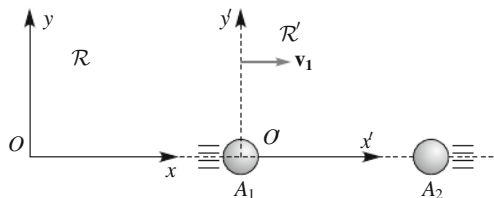


FIG. 4.2.

b) Vitesse de la lumière dans un milieu en mouvement

Supposons qu'une particule se déplace à la vitesse c/n , avec $n = 1,33$, dans un référentiel $\mathcal{R}'$ galiléen, en translation avec la vitesse constante $\mathbf{v}_e = 0,5c\mathbf{e}_x$, par rapport à $\mathcal{R}$. La composition einsteinienne des vitesses donne :

$$v_x = \frac{c/n + \beta_e c}{1 + \beta_e/n} = c \frac{1 + n\beta_e}{n + \beta_e} \quad \text{soit} \quad v_x \approx 0,91c$$

Évidemment, si $n = 1$, cette composition des vitesses restitue $v_x = c$.

Remarque : On dit qu'Einstein adolescent s'imaginait chevauchant un rayon lumineux et se demandait quelle serait alors la vitesse d'un rayon lumineux dans le vide, par rapport à lui. En admettant que la question ait un sens, car seuls les corps de masse nulle peuvent atteindre exactement la vitesse c (cf. chapitre 5), la réponse, d'après la composition des vitesses, est également c .

I. 3. — Composition des rapidités selon le mouvement

Introduisons les rapidités r_e , r_x et r'_x associées aux vitesses v_e , v_x et v'_x selon l'axe du mouvement Ox :

$$\tanh r_e = \frac{v_e}{c} = \beta_e \quad \tanh r_x = \frac{v_x}{c} \quad \text{et} \quad \tanh r'_x = \frac{v'_x}{c}$$

Il vient alors :

$$\tanh r_x = \frac{\tanh r'_x + \tanh r_e}{1 + \tanh r'_x \tanh r_e} = \tanh(r'_x + r_e) \quad \text{d'où} \quad r_x = r'_x + r_e$$

En cinématique einsteinienne, ce sont donc les rapidités, suivant l'axe du mouvement, qui s'ajoutent, et non les vitesses. On retrouve évidemment l'addition galiléenne dans le cas des faibles rapidités.

II. — QUADRIVECTEUR VITESSE

II. 1. — Durée propre pour une particule

Le mouvement quelconque d'une particule A , par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, peut être considéré comme une suite d'événements, de coordonnées (ct, x, y, z) .

La durée dt , qui sépare deux positions successives infiniment voisines de la particule, est obtenue en faisant la différence entre les indications données par deux horloges synchronisées, situées aux points A_1 et A_2 , au moment du passage de la particule (Fig. 4.3).

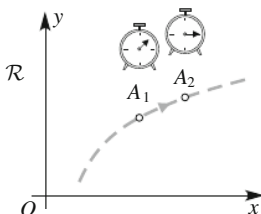


FIG. 4.3.

L'intervalle entre les deux événements « passage de A en A_1 » et « passage de A en A_2 » est du genre temps, puisqu'une relation de causalité existe, et vaut :

$$\begin{aligned} ds &= (c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2)^{1/2} = c dt \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &= c dt \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

v étant la norme de la vitesse de A par rapport à $\mathcal{R}$. Comme l'intervalle est une quantité invariante (par changement de référentiel galiléen), il en est de même du rapport $d\tau = ds/c$, homogène à une durée, que l'on appelle *durée propre élémentaire* de la particule :

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \frac{dt}{\gamma} \quad \text{avec} \quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}$$

Il est essentiel de *ne pas confondre* γ , relatif à la particule de vitesse $\mathbf{v}$ *quelconque* par rapport à $\mathcal{R}$, et le facteur relativiste γ_e associé à la vitesse $\mathbf{v}_e$ *constante* de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$.

II.2. — Définition du quadrivecteur vitesse

Comme la durée propre associée au mouvement d'une particule est un invariant, on définit le quadrivecteur vitesse $4\text{-}v$, à partir du quadrivecteur $4\text{-}x(ct, \mathbf{r})$, selon :

$$4\text{-}v = \frac{d(4\text{-}x)}{d\tau}$$

Le quadrivecteur $4\text{-}v$ s'explicite selon :

$$4\text{-}v = \frac{d}{d\tau}(ct, \mathbf{r}) = \gamma \frac{d}{dt}(ct, \mathbf{r}) = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$$

Notons que la quatrième composante γc est supérieure à c , ce qui n'est pas en contradiction avec la théorie d'Einstein, cette composante n'étant qu'un intermédiaire de calcul. On en déduit le carré de la pseudo-norme :

$$\|4\text{-}v\|^2 = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 v^2 = \gamma^2 (c^2 - v^2) = \gamma^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = c^2$$

Exemple : calculons le quadrivecteur vitesse d'une particule qui se déplace à la vitesse $0,8c$ le long de l'axe Ox . Comme $\beta = 0,8$, $\gamma = 1,67$, il vient :

$$\gamma v_x = 1,67 \times 0,8c = 1,333c \quad \gamma v_y = 0 \quad \gamma v_z = 0 \quad \gamma c = 1,67c$$

On vérifie évidemment que :

$$(\gamma c)^2 - (\gamma v)^2 = 1,67^2 c^2 - 1,333^2 c^2 = c^2$$

Remarque : Pour $v = c$, le carré de la pseudo-norme donne encore c^2 ; en effet, $c^2 - v^2$ s'annule mais γ^2 devient infini, de telle sorte le produit donne la valeur finie c^2 .

II.3. — Transformation des vitesses à l'aide du formalisme quadridimensionnel

On peut retrouver les formules de transformation des vitesses en exprimant que $4-v$ se transforme comme un quadrivecteur par changement de référentiel galiléen. En effet, $4-v = L\{4-v'\}$ donne, en explicitant :

$$\gamma c = \gamma_e(\gamma' c + \beta_e \gamma' v'_x) \quad \gamma u_x = \gamma_e(\gamma' v'_x + \beta_e \gamma' c) \quad \gamma v_y = \gamma' v'_y \quad \gamma v_z = \gamma' v'_z$$

d'où :

$$\gamma = \gamma_e \gamma' (1 + \beta_e v'_x / c) \quad v_x = \frac{\gamma_e \gamma'}{\gamma} (v'_x + v_e) \quad v_y = \frac{\gamma'}{\gamma} v'_y \quad v_z = \frac{\gamma'}{\gamma} v'_z$$

On retrouve évidemment les formules de transformation des vitesses établies précédemment :

$$v_x = \frac{v'_x + v_e}{1 + \beta_e v'_x / c} \quad v_y = \frac{v'_y}{\gamma_e (1 + \beta_e v'_x / c)} \quad v_z = \frac{v'_z}{\gamma_e (1 + \beta_e v'_x / c)}$$

III. — APPLICATIONS

III.1. — Aberration des étoiles

Nous nous proposons de retrouver, en utilisant les formules de transformation des vitesses, l'aberration lumineuse déjà évoquée (cf. chapitre 3). Cette méthode présente l'avantage d'être proche de celle utilisée par J. Bradley en 1729, évidemment dans le cadre newtonien (cf. *Mécanique*).

L'étoile observée par Bradley était l'étoile γ de la constellation du Dragon qui est située sensiblement sur un axe perpendiculaire au plan de l'écliptique, plan du mouvement de révolution du centre de la Terre autour du Soleil. Elle émet donc des photons dans le sens opposé à l'axe Oy du référentiel $\mathcal{R}$ lié au Soleil (Fig. 4.4). La direction de ces photons pour un observateur terrestre de $\mathcal{R}'$, en mouvement de translation, rectiligne, uniforme par rapport à $\mathcal{R}$, à la vitesse $v_e = 3 \times 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, s'obtient à partir des formules de transformation des vitesses ; il suffit de remplacer dans ces formules v_x par 0 et v_y par $-c$. En effet :

$$v'_x = \frac{v_x - v_e}{1 - v_x v_e / c^2} = -v_e \quad \text{et} \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma_e (1 - v_x v_e / c^2)} = -\frac{c}{\gamma_e}$$

Il en résulte que :

$$\tan \theta' = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{c}{\gamma_e v_e} = \frac{1}{\gamma_e \beta_e}$$

Au cours d'une année, l'étoile γ du Dragon semble décrire un cercle dont le diamètre apparent a pour expression :

$$2\alpha = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta' \right) \approx 2 \tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta' \right) = \frac{2}{\tan \theta'} = 2\gamma_e \beta_e$$

Ce résultat ne diffère de celui utilisé par Bradley que par le facteur relativiste γ_e , lequel est ici très voisin de 1. C'est pour cette raison que la valeur numérique de c obtenue par Bradley, à partir de v_e et du diamètre apparent du cercle décrit par l'étoile ($2\alpha \approx 39''$), fut remarquablement bonne.

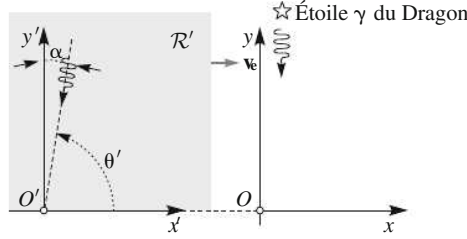


FIG. 4.4.

III. 2. — Émission de lumière par des objets en mouvement

Un atome O' émet, en se désexcitant, un rayonnement lumineux isotrope dans le référentiel $\mathcal{R}' = O'x'y'z'$ par rapport auquel il est fixe : ce rayonnement est indépendant de la direction d'émission.

Lorsque cet atome se déplace, à la vitesse constante $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_x$, par rapport au référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$ (Fig. 4.5), le rayonnement émis est-il isotrope aussi pour un observateur de $\mathcal{R}$?

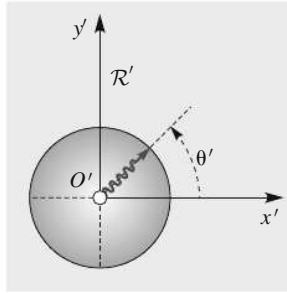


FIG. 4.5.

Pour répondre à cette question, considérons une particule de lumière, le photon, dont la vitesse est nécessairement c (cf. chapitre 5), en mouvement selon une direction faisant l'angle θ' avec $O'x'$. D'après ce qui précède, on a :

$$v_x = \frac{v'_x + v_e}{1 + v'_x u / c^2} \quad \text{et} \quad v_y = \frac{v'_y}{\gamma_e (1 + v'_x u / c^2)} \quad \text{avec} \quad v'_x = c \cos \theta' \quad \text{et} \quad v'_y = c \sin \theta'$$

respectivement. Comme $v_x = c \cos \theta$ et $v_y = c \sin \theta$, il vient :

$$c \cos \theta = \frac{c \cos \theta' + u}{1 + u \cos \theta' / c} \quad \text{et} \quad c \sin \theta = \frac{c \sin \theta'}{\gamma_e (1 + u \cos \theta' / c)}$$

Ainsi les photons, émis dans $\mathcal{R}'$ sous l'angle θ' , compris entre 0 et $\pi/2$, sont émis, pour un observateur de $\mathcal{R}$, sous un angle compris entre 0 et une valeur maximale θ_m , défini par $\theta' = \pi/2$:

$$\cos \theta_m = \frac{u}{c} = \beta_e$$

Il en résulte que, dans $\mathcal{R}$, le rayonnement n'est pas isotrope mais anisotrope (cf. annexe 3).

Si l'atome se déplace à grande vitesse, par exemple $u = 0,99c$, alors $\theta = 0,14 \text{ rad}$ soit $\theta \approx 8^\circ$. Cette anisotropie est effectivement observée dans le rayonnement émis par des particules chargées en mouvement rapide (rayonnement synchrotron).

Aux grandes vitesses ($\beta_e \approx 1$), l'équation précédente prend une forme particulièrement simple :

$$\beta_e = \cos \theta_m \approx 1 - \frac{\theta_m^2}{2} \quad \text{d'où} \quad \theta_m^2 \approx 2(1 - \beta_e) \approx (1 + \beta_e)(1 - \beta_e) = (1 - \beta_e^2) = \frac{1}{\gamma_e^2} \quad \text{et} \quad \theta_m \approx \frac{1}{\gamma_e}$$

III. 3. — Interprétation de l'expérience de Fizeau

Reprenons l'expérience de Fizeau déjà présentée (cf. chapitre 1). D'après la loi de composition relativiste, les vitesses de la lumière dans les tubes 1 et 2 s'écrivent respectivement (Fig. 1.6) :

$$v_1 = \frac{c/n - u}{1 - u/(nc)} \quad \text{et} \quad v_2 = \frac{c/n + u}{1 + u/(nc)}$$

On en déduit la différence de chemin optique, selon la composition einsteinienne des vitesses :

$$\Delta L_E = c \left[\frac{l(1 - u/(nc))}{c/n - u} - \frac{l(1 + u/(nc))}{c/n + u} \right] = \frac{2clu(1 - 1/n^2)}{c^2/n^2 - u^2} \approx \frac{2lun^2}{c} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

et la variation correspondante de l'ordre d'interférence :

$$\Delta p_E = \frac{\Delta L_E}{\lambda_0} \approx \frac{2ln^2u}{c\lambda_0} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

λ_0 étant la longueur d'onde dans le vide du rayonnement électromagnétique utilisé. Ainsi :

$$\Delta p_E = \Delta p_N \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \quad \text{où} \quad \Delta p_N = \frac{2ln^2u}{c\lambda_0}$$

désigne la variation de l'ordre d'interférence prévue par la théorie newtonienne (cf. chapitre 1).

Pour $u = 7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $l = 1,5 \text{ m}$, $\lambda_0 = 560 \text{ nm}$ et $n = 1,33$, on trouve $\Delta p_E = 0,086$, ce qui est en excellent accord avec l'expérience.

IV. — FORMULES DE TRANSFORMATION DES ACCÉLÉRATIONS

IV. 1. — Composition relativiste des accélérations

a) Expression générale

Dérivons par rapport au temps la formule de transformation des vitesses suivant l'axe Ox , afin de faire apparaître les accélérations :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad \text{et} \quad a'_x = \frac{dv'_x}{dt'}$$

Il vient :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dt'}{dt} \times \frac{d}{dt'} \left(\frac{v'_x + v_e}{1 + \beta_e v'_x/c} \right) \quad \text{avec} \quad c dt = \gamma_e (c dt' + \beta_e dx') = \gamma_e c dt' (1 + \beta_e v'_x/c)$$

En effectuant, on obtient :

$$a_x = \frac{(1 + \beta_e v'_x/c) a'_x - (v'_x + v_e) \beta_e a'_x/c}{(1 + \beta_e v'_x/c)^2 \gamma_e (1 + \beta_e v'_x/c)} = \frac{a'_x}{\gamma_e^3 (1 + \beta_e v'_x/c)^3}$$

En ce qui concerne la coordonnée transversale suivant Oy , on procède de façon analogue et on trouve :

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{dt'}{dt} \times \frac{d}{dt'} \left[\frac{v'_y}{\gamma_e(1 + \beta_e v'_x/c)} \right] = \frac{1}{\gamma_e^2(1 + \beta_e v'_x/c)} \frac{(1 + \beta_e v'_x/c)a'_y - v'_y \beta_e a'_x/c}{(1 + \beta_e v'_x/c)^2}$$

soit :

$$a_y = \frac{a'_y + v_e(v'_x a'_y - v'_y a'_x)/c^2}{\gamma_e^2(1 + \beta_e v'_x/c)^3}$$

Il en est de même pour la coordonnée transversale suivant Oz :

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{dt'}{dt} \times \frac{d}{dt'} \left[\frac{v'_z}{\gamma_e(1 + \beta_e v'_x/c)} \right] = \frac{1}{\gamma_e^2(1 + \beta_e v'_x/c)} \frac{(1 + \beta_e v'_x/c)a'_z - v'_z \beta_e a'_x/c}{(1 + \beta_e v'_x/c)^2}$$

ce qui donne :

$$a_z = \frac{a'_z + v_e(v'_x a'_z - v'_z a'_x)/c^2}{\gamma_e^2(1 + \beta_e v'_x/c)^3}$$

Ainsi :

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma_e^3(1 + \beta_e v'_x/c)^3} \quad a_y = \frac{a'_y + \beta_e(v'_x a'_y - v'_y a'_x)/c}{\gamma_e^2(1 + \beta_e v'_x/c)^3} \quad \text{et} \quad a_z = \frac{a'_z - \beta_e(v'_z a'_x - v'_x a'_z)/c}{\gamma_e^2(1 + \beta_e v'_x/c)^3}$$

On peut exprimer ces relations vectoriellement en remarquant que $\mathbf{v}_e$ et $\mathbf{v}' \times \mathbf{a}'$ s'explicitent respectivement selon :

$$\mathbf{v}_e \begin{vmatrix} v_e \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}' \times \mathbf{a}' \begin{vmatrix} v'_y a'_z - v'_z a'_y \\ v'_z a'_x - v'_x a'_z \\ v'_x a'_y - v'_y a'_x \end{vmatrix}$$

Par conséquent :

$$\mathbf{a}_{//} = \frac{\mathbf{a}'_{//}}{\gamma_e^3(1 + \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}'/c^2)^3} \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_{\perp} = \frac{\mathbf{a}'_{\perp} - \mathbf{v}_e \times (\mathbf{v}' \times \mathbf{a}')/c^2}{\gamma_e^2(1 + \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}'/c^2)^3}$$

b) Exemples

i) *Mouvement rectiligne accéléré dans une direction parallèle à la translation de $\mathcal{R}'$*

Une particule a un mouvement rectiligne, selon l'axe $O'x'$ de $\mathcal{R}'$, et une accélération $\mathbf{a}' = g\mathbf{e}'_x$ avec $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. En intégrant, on obtient évidemment :

$$v'_x = gt' \quad \text{et} \quad x' = \frac{gt'^2}{2}$$

si initialement $v'_x = 0$ et $x' = 0$. Dans le référentiel $\mathcal{R}$, par rapport auquel $\mathcal{R}'$ est en translation rectiligne uniforme, à la vitesse v_e , l'accélération a pour expression, d'après les formules de transformation :

$$a_{//} = \frac{a'_{//}}{\gamma_e^3(1 + \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}'/c^2)^3} = \frac{g}{\gamma_e^3(1 + \beta_e gt'/c)^3}$$

ii) *Mouvement rectiligne accéléré dans une direction perpendiculaire à la translation de $\mathcal{R}'$*

Une particule est en mouvement rectiligne accéléré selon l'axe $O'y'$ de $\mathcal{R}'$; son accélération est $\mathbf{a}' = -g\mathbf{e}'_y$ avec $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. En intégrant cette équation, on trouve évidemment :

$$v'_y = -gt' \quad \text{et} \quad y' = -\frac{gt'^2}{2} + h$$

si initialement $v'_y = 0$ et $y' = h$. Dans $\mathcal{R}$, par rapport auquel $\mathcal{R}'$ est en translation rectiligne uniforme, à la vitesse v_e , selon l'axe Ox , l'accélération a pour expression, d'après les formules de transformation :

$$a_{//} = 0 \quad \text{et} \quad a_{\perp} = \frac{a'_{\perp}}{\gamma_e^2} = -\frac{g}{\gamma_e^2} = -6,28 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad \text{si} \quad \beta_e = 0,6$$

IV.2. — Quadrivecteur accélération

a) Définition

On obtient le quadrivecteur accélération $4-a$ en dérivant le quadrivecteur vitesse $4-v$ par rapport au temps propre τ :

$$4-a = \frac{d(4-v)}{d\tau} \quad \text{avec} \quad 4-v = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$$

Comme le carré de la pseudo-norme $\|4-v\|^2$ est la constante c^2 , il vient, en dérivant par rapport à τ :

$$\frac{d\|4-v\|^2}{d\tau} = 4-v \cdot \frac{d(4-v)}{d\tau} = 0 \quad \text{d'où} \quad 4-v \cdot 4-a = 0$$

Ainsi, le produit scalaire des quadrivecteurs $4-v$ et $4-a$ est nul. Les parties temporelle et spatiale de $4-a$ ont pour expressions respectives :

$$\frac{d(\gamma c)}{d\tau} = c \frac{d\gamma}{d\tau} \quad \text{et} \quad \frac{d(\gamma \mathbf{v})}{d\tau} = \gamma \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} + \mathbf{v} \frac{d\gamma}{d\tau}$$

En introduisant le temps t du référentiel $\mathcal{R}$ et l'accélération $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ dans $\mathcal{R}$, ces parties s'écrivent aussi, puisque $dt/d\tau = \gamma$:

$$a_0 = c \frac{d\gamma}{d\tau} = \gamma \frac{d\gamma}{dt} c \quad \text{et} \quad \frac{d(\gamma \mathbf{v})}{d\tau} = \gamma^2 \mathbf{a} + \gamma \frac{d\gamma}{dt} \mathbf{v}$$

Comme :

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2} \left(-2 \frac{v}{c^2} \right) \frac{dv}{dt} = \gamma^3 \frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt}$$

les parties temporelle et spatiale de $4-a$ s'explicitent aussi selon :

$$a_0 = \gamma^4 c \beta \frac{d\beta}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d(\gamma \mathbf{v})}{dt} = \gamma^2 \mathbf{a} + \gamma^4 \mathbf{v} \beta \frac{d\beta}{dt}$$

On voit que la relation entre le quadrivecteur accélération $4-a$ et l'accélération $\mathbf{a}$ n'est pas simple, contrairement à celle entre le quadrivecteur vitesse $4-v$ et la vitesse $\mathbf{v}$.

Le quadrivecteur $4-a$ présente cependant un intérêt lorsque l'on dispose de l'expression de la quadrivitesse $4-v$ en fonction du temps propre τ .

Exemple : Pour une particule dont le quadrivecteur vitesse $4-v$ a les composantes suivantes, en fonction du temps propre τ :

$$v_0 = \gamma c = c \cosh(\omega\tau) \quad v_1 = \gamma v_x = c \sinh(\omega\tau) \quad v_2 = \gamma v_y = 0 \quad v_3 = \gamma v_z = 0$$

le quadrivecteur $4-a$ s'obtient par simple dérivation :

$$a_0 = c\omega \sinh(\omega\tau) \quad a_1 = c\omega \cosh(\omega\tau) \quad a_2 = 0 \quad a_3 = 0$$

Notons que les carrés des pseudo-normes de $4-v$ et $4-a$ sont de signes opposés, évidemment positif pour $4-v$:

$$\|4-v\|^2 = v_0^2 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 = c^2 [\cosh^2(\omega\tau) - \sinh^2(\omega\tau)] = c^2$$

alors que :

$$|4-a|^2 = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = c^2 \omega^2 [\sinh^2(\omega\tau) - \cosh^2(\omega\tau)] = -c^2 \omega^2$$

b) Quadrivecteur accélération dans le référentiel propre

Dans le référentiel propre $\mathcal{R}_p$ de la particule, par rapport auquel la vitesse de la particule est nulle, on a évidemment $\beta_p = 0$ et donc $\gamma_p = 1$. L'expression de $4-a$ se simplifie alors :

$$a_{p,0} = c \frac{d\gamma}{d\tau} = \gamma_p^4 c \beta_p \frac{d\beta_p}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d(\gamma\mathbf{v})}{d\tau} = \gamma_p^2 \mathbf{a}_p + \gamma_p^4 \mathbf{v}_p \beta_p \frac{d\beta_p}{dt} = \mathbf{a}_p$$

Pour obtenir les composantes de $4-a$ dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, par rapport auquel $\mathcal{R}_p$ a un mouvement dont la vitesse est celle de la particule βc , il suffit d'utiliser les formules habituelles de transformation des composantes d'un quadrivecteur entre $\mathcal{R}$ et le référentiel galiléen qui, à l'instant considéré, coïncide avec le référentiel propre $\mathcal{R}_p$.

Pour une accélération propre dirigée suivant l'axe du mouvement du référentiel propre, les formules de transformation de $4-a$ donnent :

$$a_0 = \gamma_e(0 + \beta_e \times a_p) = \gamma_e \beta_e a_p \quad a_1 = \gamma_e(a_p + \beta_e \times 0) = \gamma_e a_p \quad a_2 = 0 \quad a_3 = 0$$

Or, le mouvement étant rectiligne, on a aussi, en projetant la relation $d(\gamma\mathbf{v}/d\tau) = \gamma^2 \mathbf{a} + \gamma^4 \mathbf{v} \beta d\beta/d\tau$:

$$a_1 = \gamma^2 a_x + \gamma^4 v_x \beta \frac{d\beta}{dt} = \gamma^2 a_x + \gamma^4 \beta^2 \frac{dv}{dt} = \gamma^2 a_x + \gamma^4 \beta^2 a_x = \gamma^2 a_x (1 + \gamma^2 \beta^2) = \gamma^4 a_x$$

où $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = (1 - \beta_e^2)^{-1/2} = \gamma_e$. Il en résulte, en égalant les deux expressions de a_1 :

$$\gamma a_p = \gamma^4 a_x \quad \text{et} \quad a_x = \frac{a_p}{\gamma^3} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} a_p$$

IV.3. — Mouvement rapide d'une fusée uniformément accélérée

Une fusée a un mouvement rectiligne accéléré par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, par exemple la Terre ; à un instant t , sa vitesse est $\mathbf{v}$ (Fig. 4.6a).

Dans le référentiel propre de la fusée $\mathcal{R}' = \mathcal{R}_p$, sa vitesse est nulle, alors que son accélération, déterminée par le débit des gaz éjectés, a une valeur non nulle a_p , mesurée par les instruments de bord. Il vient, d'après les formules de transformation de l'accélération :

$$a_x = \frac{dv}{dt} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} a_p$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\frac{d\beta}{(1 - \beta^2)^{3/2}} = \frac{dt}{t_1} \quad \text{en posant} \quad t_1 = \frac{c}{a_p} \quad \text{et en introduisant} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Ainsi, l'accélération dans $\mathcal{R}$ est plus faible que dans $\mathcal{R}_p$, notamment pour les fortes vitesses. À la limite $v \approx c$, elle est nulle : $a_x \approx 0$. Comme :

$$\frac{d}{d\beta} \left[\frac{\beta}{(1 - \beta^2)^{1/2}} \right] = \frac{(1 - \beta^2)^{1/2} + \beta^2 (1 - \beta^2)^{-1/2}}{1 - \beta^2} = \frac{1 - \beta^2 + \beta^2}{(1 - \beta^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1 - \beta^2)^{3/2}}$$

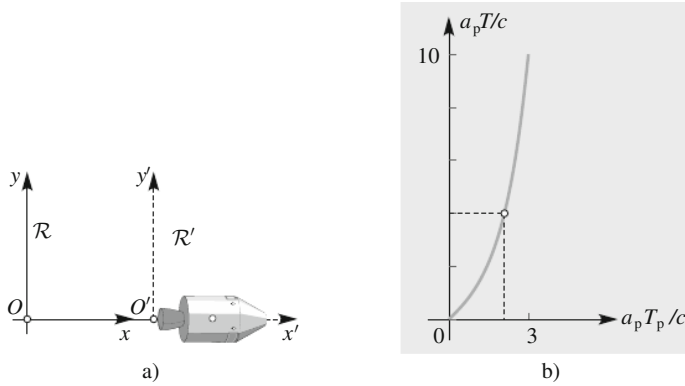


FIG. 4.6.

il vient :

$$\frac{\beta}{(1 - \beta^2)^{1/2}} = \frac{t}{t_1} + \text{Cte} \quad \text{soit} \quad \frac{\beta}{(1 - \beta^2)^{1/2}} = \frac{t}{t_1}$$

en supposant que $\beta = 0$ à $t = 0$. On en déduit :

$$\frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = \left(\frac{t}{t_1}\right)^2 \quad \text{et} \quad v = \beta c = c \frac{t/t_1}{[1 + (t/t_1)^2]^{1/2}}$$

Pour connaître la distance parcourue, on intègre une seconde fois, en effectuant le changement de variable $w = 1 + (t/t_1)^2$, lequel donne en différenciant $dw = 2t dt/t_1^2$:

$$x = \int \frac{a_p t dt}{[1 + (t/t_1)^2]^{1/2}} = a_p t_1^2 \int \frac{t/t_1}{[1 + (t/t_1)^2]^{1/2}} \frac{dt}{t_1} \quad \text{d'où} \quad x = a_p t_1^2 \left[\left(1 + \frac{t^2}{t_1^2}\right)^{1/2} - 1 \right]$$

après prise en compte de la position initiale, $x = 0$, pour déterminer la constante d'intégration.

Si, pour un observateur de $\mathcal{R}$, la distance parcourue est D , la durée T qu'il mesure est telle que :

$$D = a_p t_1^2 \left[\left(1 + \frac{T^2}{t_1^2}\right)^{1/2} - 1 \right] \quad \text{soit} \quad T = \frac{D}{c} \left(1 + \frac{2a_p t_1^2}{D}\right)^{1/2}$$

en inversant l'expression. Il est instructif de comparer T à la durée T_p mesurée par les occupants de la fusée. Cette dernière est la somme des durées propres élémentaires. On peut donc écrire :

$$T_p = \int d\tau = \int_0^T (1 - \beta^2)^{1/2} dt = \int_0^T \frac{dt}{(1 + t^2/t_1^2)^{1/2}}$$

On trouve, en effectuant l'intégration :

$$\frac{T_p}{t_1} = \ln \left| \frac{T}{t_1} + \left(1 + \frac{T^2}{t_1^2}\right)^{1/2} \right| \quad \text{soit} \quad \frac{a_p T}{c} = \sinh \left(\frac{a_p T_p}{c} \right)$$

puisque :

$$\int \frac{dX}{(1 + X^2)^{1/2}} = \text{argsinh } X = \ln |X + (1 + X^2)^{1/2}|$$

Le graphe, représenté sur la figure 4.6b, montre que $T_p \leq T$: les horloges de la fusée retardent donc par rapport à celles de la Terre ; c'est le ralentissement des horloges mobiles (à vitesse constante) .

Exemple : Pour atteindre l'étoile γ du Centaure, qui est située à quatre année-lumière de la Terre, avec une fusée d'accélération constante $a_p = 9,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \approx g$, on a :

$$t_1 = \frac{c}{a_p} = \frac{3 \times 10^8}{9,5} = 0,316 \times 10^8 \approx 1 \text{ an} \quad \text{car} \quad 1 \text{ an} = 24 \times 3\,600 \times 365,25 = 0,3155 \times 10^8$$

Par conséquent :

$$T = \frac{D}{c} \left(1 + \frac{2a_p t_1^2}{D} \right)^{1/2} = \frac{D}{c} \left(1 + \frac{2c^2}{a_p D} \right)^{1/2} = \frac{D}{c} \left(1 + \frac{2c/a_p}{D/c} \right)^{1/2} = 4 \left(1 + \frac{2 \times 1}{4} \right)^{1/2} = 4,9 \text{ an}$$

et :

$$T_p = \frac{c}{a_p} \operatorname{argsinh} \left(\frac{a_p T}{c} \right) = 1 \times \operatorname{argsinh} 4,9 = 2,29 \text{ an}$$

Notons qu'au bout de $T = 3$ ans, la vitesse de la fusée atteint la valeur :

$$v = c \frac{t/t_1}{[1 + t^2/t_1^2]^{1/2}} \approx 0,95 c$$

Selon l'observateur terrestre, il faut donc environ cinq années pour que la fusée atteigne l'étoile, alors que pour l'astronaute un peu plus de deux années suffisent ! Notons que T est toujours supérieur à la durée D/c mise par la lumière pour effectuer le trajet.

Remarque : Pour $t \ll t_1$, on retrouve le résultat newtonien $v \approx a_p t$. Lorsque $t \gg t_1$, on obtient évidemment $v \approx c$.

Dans le film « La planète des singes », réalisé par J. Schaffner en 1967, à partir du roman éponyme de science-fiction de P. Boulle, des astronautes ont quitté la Terre depuis une durée propre de $T_{p,1} = 6$ mois, dans une fusée d'accélération constante $a_g = 9,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, sensiblement égale au champ de gravitation terrestre. Cette phase achevée, ils entament une seconde phase du mouvement uniformément retardée, pendant une durée propre $T_{p,2} = 1$ an, en vue d'atteindre une planète d'accueil, dans la direction de la constellation d'Orion. Cette accélération produit un champ de gravitation artificiel dans la fusée, ce qui rend le trajet confortable.

À la fin de la première phase, d'après les indications fournies dans le film, la durée qui s'est écoulée sur Terre est $T_1 \approx 2673 - 1972 = 701$ ans. On en déduit alors la vitesse atteinte :

$$v = \beta c \quad \text{avec} \quad (1 - \beta^2)^{-1/2} = \frac{701}{0,5} = 1\,402 \quad \text{d'où} \quad v \approx c(1 - 10^{-6})$$

On obtient la distance parcourue pendant cette première phase selon :

$$D_1 = a_p t_1^2 \left[\left(1 + \frac{T_1^2}{t_1^2} \right)^{1/2} - 1 \right] = c t_1 \left[(1 + 701^2)^{1/2} - 1 \right] \approx 701 \text{ al}$$

puisque $a_p t_1^2 = c t_1 \approx 1 \text{ al}$.

À la fin de la seconde phase, de décélération constante, qui dure T_2 sur Terre, entre l'an 2673 et l'an 3978, la distance parcourue devrait être :

$$D_2 = a_p t_1^2 \left[\left(1 + \frac{T_2^2}{t_1^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \approx a_p t_1^2 \frac{T_2}{t_1} = c(3978 - 2673) = 1\,305 \text{ al}$$

Comme la fusée atterrit sur une planète analogue à la Terre (air, eau, température, etc.), une erreur s'est probablement glissée dans le programme de voyage au point que la fusée est revenue sur Terre après son périple. Les astronautes retrouvent la Terre au bout d'un temps propre $T_{p,1} + T_{p,2} = 1,5$ an, alors que la durée qui s'est écoulée sur la Terre est $T_1 + T_2 = 701 + 1305 = 2006$ ans.

CONCLUSION

Retenons les points essentiels.

1) Les formules de transformation einsteinienne des vitesses sont :

$$\mathbf{v}_{//} = \frac{\mathbf{v}'_{//} + \mathbf{v}_e}{1 + \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}'/c^2} \quad \mathbf{v}_{\perp} = \frac{\mathbf{v}'_{\perp}}{\gamma_e(1 + \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}'/c^2)}$$

2) Il est commode d'introduire le quadrivecteur vitesse $4\text{-}v$:

$$4\text{-}v = \frac{d(4\text{-}x)}{d\tau} = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$$

Les formules de transformation des vitesses s'en déduisent aisément :

$$\gamma c = \gamma_e(\gamma' c + \beta_e \gamma' v'_x) \quad \gamma v_x = \gamma_e(\gamma' v'_x + \beta_e \gamma' c) \quad \gamma v_y = \gamma' v'_y \quad \gamma v_z = \gamma' v'_z$$

3) Les exemples d'application sont nombreux : l'aberration des étoiles, l'anisotropie apparente des rayonnements émis par les atomes et l'interprétation de l'expérience de Fizeau.

4) Les formules de transformation des accélérations peuvent être obtenues à partir de celles des vitesses. Le mouvement d'une fusée rapide, uniformément accéléré, fournit un exemple d'application intéressant.

EXERCICES ET PROBLÈMES

P4– 1. Vitesse relative de deux galaxies

Un observateur, appartenant à une galaxie G_1 , constate que deux autres galaxies s'éloignent de G_1 , avec des vitesses opposées, de même norme $0,8c$. Quelle est la vitesse de G_2 par rapport à G_3 , c'est-à-dire sa vitesse dans le référentiel galiléen lié à G_3 ?

P4– 2. Émission d'un électron par un noyau radioactif

Un noyau radioactif se déplace à la vitesse $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_x$, avec $u = 0,1c$, par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire. Il émet un électron dont la vitesse par rapport au noyau est $\mathbf{v}'$ avec $v' = 0,8c$.

Quelle est la vitesse $\mathbf{v}$ de l'électron dans le laboratoire, dans les trois cas suivants :

1. $\mathbf{v}'$ et $\mathbf{u}$ ont même direction et même sens ?
2. $\mathbf{v}'$ et $\mathbf{u}$ ont même direction et des sens contraires ?
3. $\mathbf{v}'$ et $\mathbf{u}$ sont orthogonaux ?

P4– 3. Vitesse relative de deux particules en mouvement sur un même axe

Deux particules se dirigent l'une vers l'autre sur une même droite, dans le référentiel du laboratoire, avec des vitesses de même valeur $0,75c$. Déterminer la vitesse de l'une par rapport à l'autre, précisément la vitesse de l'une dans le référentiel galiléen lié à l'autre.

P4– 4. Vitesse relative d'un photon par rapport à un électron

Un électron a un mouvement rectiligne, de vitesse $\mathbf{u} = u \mathbf{e}_x$, avec $u = 0,8c$, par rapport au référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$; dans ce même référentiel, un photon se déplace dans la direction perpendiculaire Oy .

1. Quelle est la direction du mouvement du photon dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ lié à l'électron ?
2. Établir la relation entre les composantes de la vitesse du photon.

P4– 5. Norme de la vitesse relative de deux particules

Deux particules A_1 et A_2 ont des vitesses $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ constantes, quelconques par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire. On désigne par $\mathbf{v}_{12}$ la vitesse relative de A_1 par rapport à A_2 , c'est-à-dire la vitesse de A_1 dans le référentiel $\mathcal{R}_2$ lié à A_2 et en translation par rapport à $\mathcal{R}$, à la vitesse $\mathbf{v}_2 = v_2 \mathbf{e}_x$.

1. Montrer que la norme de $\mathbf{v}_{12}$ a pour expression :

$$v_{12} = \frac{[(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)^2 / c^2]^{1/2}}{1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 / c^2}$$

2. Étudier successivement les cinq cas suivants :

i) $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, ii) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, iii) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$, iv) $\mathbf{v}_1 = 0,3c \mathbf{e}_x$ et $\mathbf{v}_2 = 0,1c \mathbf{e}_x$, v) $\mathbf{v}_1 = 0,3c \mathbf{e}_x$ et $\mathbf{v}_2 = 0,1c \mathbf{e}_y$.

P4– 6. Poursuite de deux vaisseaux spatiaux

Un vaisseau spatial (1) quitte la Terre avec une vitesse $\mathbf{u}_1$ à un instant où ses horloges et celles de la Terre indiquent zéro. Le lendemain, précisément au bout d'une durée $T = 1$ jour pour les horloges terrestres, un second vaisseau (2) quitte la Terre avec une vitesse $\mathbf{u}_2$, de même direction que $\mathbf{u}_1$; $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont constants et de valeurs respectives $u_1 = 0,1c$ et $u_2 = 0,15c$. Le second rattrape le premier à un instant τ mesuré par les horloges terrestres.

1. Déterminer τ .
2. Quel est l'instant de départ de (2), pour les horloges de (1) ?
3. À quel instant (2) rattrape-t-il (1), pour les horloges de (1) ?
4. Quelle est, selon $\mathcal{R}_1$, la distance parcourue par (1), selon ses instruments, à l'instant où (2) démarre ?
5. Trouver la vitesse de (2), mesurée par les passagers du vaisseau (1). Retrouver cette vitesse à partir des réponses précédentes.

P4– 7. Anisotropie de l'émission lumineuse d'une source

Une source de lumière S , animée d'une vitesse constante $\mathbf{u} = u \mathbf{e}_x$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire, émet des photons de manière isotrope dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}^*$ d'origine S .

1. À l'aide des formules de transformation des vitesses, établir la relation donnant $\cos \theta$ en fonction de $\cos \theta^*$ et u/c , θ et θ^* étant respectivement les angles dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$ entre l'axe Ox et la vitesse d'un photon particulier.

2. Représenter graphiquement $\cos \theta$ en fonction θ^* pour $u/c = 0,5$. Que devient ce graphe dans les cas extrêmes newtonien et ultra-einsteinien ?

3. Montrer que le nombre élémentaire de particules dN , émises dans l'angle solide $d\Omega$, peut se mettre sous la forme :

$$dN = \frac{N}{4\pi} \frac{1}{\gamma^2} \frac{d\Omega}{(1 - u \cos \theta/c)^2} \quad \text{avec} \quad \gamma = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

4. Tracer avec soin le graphe $f(\theta) = 4\pi dN/(N d\Omega)$ pour $u = 0,9c$. Conclure.

P4– 8. Approximation newtonienne de l'aberration des étoiles

Dans l'expérience faite par Bradley en 1729 sur l'aberration de l'étoile γ du Dragon, le diamètre angulaire de trajectoire apparente était de 40 secondes d'arc.

1. Établir les expressions newtonienne et relativiste de ce diamètre apparent en fonction de la vitesse de translation de la Terre sur son orbite. Commenter.

2. Comparer l'approximation qu'implique le choix de la valeur newtonienne et l'approximation que l'on fait en assimilant la tangente à la valeur de l'angle en radian.

P4– 9. Mouvements d'une particule par rapport à deux référentiels galiléens

Une particule A a un mouvement rectiligne par rapport à deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, de vitesse $v_e = 0,9c$ par rapport à $\mathcal{R}$. À l'instant $t'_1 = 100$ ns des horloges de $\mathcal{R}'$, la particule acquiert, au point de coordonnée $x'_1 = 5$ m, un mouvement rectiligne uniforme le long de l'axe $O'x'$, avec une vitesse $c/2$ dirigée dans le sens des x' décroissants. À l'instant $t'_2 = 400$ ns, elle est brusquement arrêtée.

1. Quelle est la vitesse de A par rapport à $\mathcal{R}$?

2. Calculer, en mètre, la longueur du chemin qu'elle parcourt dans $\mathcal{R}$.

3. Comparer le rapport L/L' à $1/\gamma_e$. Commenter.

P4– 10. Vaisseau spatial

Un vaisseau spatial est soumis à une accélération constante, qui vaut $a_p = 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, mesurée par les instruments de bord, à partir d'un point de l'espace et d'un instant pris comme origines.

1. Au bout de quelle durée, donnée par les horloges du référentiel $\mathcal{R}$ par rapport auquel le vaisseau est en mouvement, la vitesse atteinte est-elle égale à $0,9c$? Trouver la distance parcourue par le vaisseau pour $\mathcal{R}$.

2. Déterminer la durée correspondante donnée par les horloges du vaisseau, ainsi que la distance parcourue mesurée par les instruments de bord.

P4– 11. Coordonnées d'événements dans le mouvement de vaisseaux spatiaux

Deux vaisseaux spatiaux QT et $Q'T'$ sont en mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_0$ avec les vitesses $\mathbf{v}_1 = 0,8c\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{v}_2 = 0,5c\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_x$ étant un axe de $\mathcal{R}_0$ et c la vitesse de la lumière dans le vide. Les longueurs des vaisseaux sont respectivement $L_1 = 100$ m et $L_2 = 115,47$ m.

1. Trouver, en fonction de c , la vitesse v_e de $Q'T'$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ lié à QT , ainsi que la vitesse de QT par rapport à $\mathcal{R}'$ lié à $Q'T'$. Calculer le facteur relativiste γ_e correspondant. Comparer γ_e au rapport L_2/L_1 .

2. On considère les trois événements suivants :

i) E_0 est l'événement coïncidence des queues Q et Q' des deux vaisseaux,

ii) E_1 est l'événement coïncidence des têtes T et T' des deux vaisseaux,

iii) E_2 est l'événement coïncidence de la queue Q du premier vaisseau avec la tête T' du second.

a) On choisit E_0 comme événement origine des temps et des espaces. Écrire les coordonnées spatio-temporelles de E_1 dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. En déduire que, pour $\mathcal{R}$, E_0 et E_1 sont simultanés. Le sont-ils dans $\mathcal{R}'$? Commenter en calculant éventuellement la durée, en nanoseconde, qui sépare ces deux événements.

b) Calculer le carré de l'intervalle entre E_0 et E_1 . Quelle est sa nature ?

3. a) Écrire les coordonnées spatio-temporelles de E_2 pour $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. En déduire les instants t_2 et t'_2 où se produit E_2 dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Application numérique.

b) Calculer le carré de l'intervalle entre E_0 et E_2 . Quelle est sa nature ?

4. L'intervalle entre E_1 et E_2 est-il du genre temps ou du genre espace ? Calculer le carré de sa valeur.

P4– 12. Composition des accélérations

Une particule a un mouvement uniformément accéléré de chute libre dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$: $\mathbf{a} = -g\mathbf{e}_y$, avec $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. La vitesse initiale est nulle.

Calculer l'accélération de cette particule dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ dont la vitesse d'entraînement est $\mathbf{v}_e = 0,5c\mathbf{e}_x$. Le mouvement de la particule dans $\mathcal{R}'$ est-il lui-aussi transversal et uniforme ?

P4– 13. Facteur d'entraînement de Fresnel

Une lame de verre à faces parallèles, d'indice $n = 1,5$ et d'épaisseur $e = 1$ cm, se déplace dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R} = Oxyz$, dans la direction Ox perpendiculaire aux faces, à la vitesse $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_x$ avec $u = c/2$, c étant la vitesse de la lumière dans le vide. On assimile l'air au vide et on rappelle que l'indice n d'un milieu est le rapport de c sur la vitesse de la lumière dans ce milieu. Un éclair lumineux traverse la lame dans la direction $\mathbf{e}_x$. On désigne par E_1 l'événement « entrée de l'éclair dans la lame », en O et à l'instant pris comme origine, et E_2 l'événement « sortie de l'éclair de la lame. » On associe à la lame le référentiel $\mathcal{R}'$ en translation, rectiligne, uniforme par rapport à $\mathcal{R}$.

1. Calculer le facteur relativiste γ_e associé au mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$.

2. Trouver, en fonction de e , n , $\beta_e = u/c$ et γ_e , les coordonnées spatio-temporelles de E_2 dans $\mathcal{R}'$ et dans $\mathcal{R}$.

3. En déduire, en picoseconde, les durées de traversée de la lame dans $\mathcal{R}'$ et dans $\mathcal{R}$. Quelle est, en cm, la distance qui sépare, dans $\mathcal{R}$, les événements E_1 et E_2 ?

4. Trouver, en fonction de e et n , l'expression du carré de l'intervalle entre E_1 et E_2 . Calculer la valeur de l'intervalle en cm.

5. Établir, en fonction de n et β_e , la relation entre la vitesse v de l'éclair dans $\mathcal{R}$ et celle v' dans $\mathcal{R}'$. Retrouver cette expression à l'aide des questions précédentes. En déduire la valeur numérique de v/c .

6. Quelle est l'expression de v dans l'approximation newtonienne ? Mettre l'expression einsteinienne de v sous la forme :

$$v = \frac{c}{n} + u_f \quad \text{avec} \quad u_f = u \times f$$

f étant un facteur que l'on exprimera en fonction de u et n . Comparer f au facteur d'entraînement de Fresnel $F = 1 - 1/n^2$. Étudier le cas particulier de l'expérience historique de Fizeau dans laquelle la lame de verre est remplacée par une lame d'eau, d'indice $n = 1,33$ et de vitesse $u = 7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

5

Dynamique et énergétique einsteiniennes. Énergie de masse

On sait que la loi fondamentale de la dynamique *newtonienne*, appliquée à une particule de masse m , par rapport à un référentiel galiléen, s'écrit :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$$

où $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ est la quantité de mouvement du point et $\mathbf{F}$ la somme des forces appliquées. La question qui se pose alors est la suivante : que devient cette loi en relativité restreinte ?

La généralisation einsteinienne de la loi fondamentale doit s'appuyer sur le formalisme quadridimensionnel, puisque ce dernier s'introduit naturellement en cinématique relativiste. Historiquement, le point de départ de l'analyse fut l'intuition géniale de Poincaré et d'Einstein concernant le rapport étroit entre masse d'un corps et son énergie.

Il convient donc d'abord de construire un quadrivecteur généralisant le vecteur quantité de mouvement, à partir du concept de masse et de celui de quadrivecteur vitesse.

I. — QUADRIVECTEUR ÉNERGIE-QUANTITÉ DE MOUVEMENT

I.1. — Définition

Comme en mécanique newtonienne, l'équation du mouvement d'une particule A , par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, fait apparaître la quantité scalaire m , positive et invariante (par changement de référentiel galiléen), appelée *masse inerte* de A . D'autre part, on a vu que le mouvement de cette particule était bien décrit par le quadrivecteur vitesse $4\text{-}v = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$ (cf. chapitre 4).

Le quadrivecteur quantité de mouvement-énergie d'une particule, de masse m , est par définition :

$$4\text{-}p = m(4\text{-}v) = (\gamma mc, \gamma m\mathbf{v})$$

On voit que, lorsque la vitesse v est faible devant c , la partie spatiale de $4\text{-}p$ s'identifie à la quantité de mouvement newtonienne $m\mathbf{v}$. Quant à la partie temporelle γmc , elle vaut, pour $v \ll c$:

$$\gamma mc = mc(1 - \beta^2)^{1/2} \approx mc \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right) = mc + \frac{mv^2}{2c} = \frac{1}{c} \left(mc^2 + \frac{mv^2}{2}\right)$$

Par conséquent, à une constante multiplicative $1/c$ près et à une constante additive mc^2 près, γmc s'identifie, pour de faibles vitesses, à l'énergie cinétique, d'où le nom de quadrivecteur *énergie-quantité de mouvement* donné à $4-p$ ($\mathcal{E}/c, \mathbf{p}$) où $\mathcal{E} = \gamma mc^2$ est l'énergie totale de la particule libre.

Remarque : Certains auteurs appellent, en relativité, *impulsion* la quantité de mouvement $\mathbf{p}$. Comme ce concept n'est seulement qu'un enrichissement du concept newtonien, nous avons préféré garder la même dénomination (cf. *Mécanique*) et réserver le mot *impulsion* à la quantité de mouvement généralisée, celle d'une particule chargée dans un champ électromagnétique d'expression $\mathbf{p}_i = \mathbf{p} + q\mathbf{A}$, q étant la charge de particule et $\mathbf{A}$ le potentiel vecteur associé au champ (cf. chapitre 9).

I. 2. — Pseudo-norme du quadrivecteur énergie-quantité de mouvement et formules de transformation

Le carré de la pseudo-norme du quadrivecteur énergie-quantité de mouvement se calcule aisément à partir de $4-v$. En effet :

$$\|4-p\|^2 = m^2 \|4-v\|^2 = m^2 (\gamma^2 c^2 - \gamma^2 v^2) = m^2 c^2$$

Cette quantité positive est bien invariante (par changement de référentiel galiléen).

Quant aux formules de transformation des quatre composantes, elles s'écrivent :

$$\frac{\mathcal{E}}{c} = \gamma_e \left(\frac{\mathcal{E}'}{c} + \beta_e p'_x \right) \quad p_x = \gamma_e \left(p'_x + \beta_e \frac{\mathcal{E}'}{c} \right) \quad p_y = p'_y \quad \text{et} \quad p_z = p'_z$$

II. — LOI FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE EINSTEINIENNE

La loi fondamentale de la dynamique einsteinienne, qui généralise la dynamique newtonienne, s'écrit de la même manière que cette dernière ; seule la définition de la quantité de mouvement diffère par la présence du facteur relativiste γ : $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$.

On l'obtient naturellement en extrapolant l'écriture newtonienne : on remplace le temps t par le temps propre τ qui est invariant et le trivecteur quantité de mouvement $m\mathbf{v}$ par le quadrivecteur quantité de mouvement-énergie $4-p$.

II. 1. — Énoncé quadridimensionnel

L'énoncé quadridimensionnel de la loi fondamentale de la dynamique einsteinienne d'une particule suppose que l'on généralise aussi le concept de force, lequel traduit l'influence qu'ont, sur le mouvement de cette particule, les corps avoisinants. On introduit un quadrivecteur force $4-f$ dont la partie spatiale $\mathbf{f}$ est directement reliée à la force physique newtonienne $\mathbf{F}$ par la relation :

$$\mathbf{f} = \gamma \mathbf{F}$$

Dans ces conditions, le mouvement d'une particule, de masse m , par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, satisfait à la loi fondamentale suivante :

$$\frac{d(4-p)}{d\tau} = 4-f \quad \text{soit aussi} \quad m 4-a = 4-f$$

en introduisant le quadrivecteur accélération $4-a$.

Remarque : Cette relation entre $4\text{-}p$ et $4\text{-}f$ implique :

$$4\text{-}f \cdot 4\text{-}p = \frac{1}{2} \frac{d \|4\text{-}p\|^2}{dt} = 0$$

II.2. — Énoncé tridimensionnel de la loi fondamentale de la dynamique

Intéressons-nous à la partie spatiale de l'égalité quadridimensionnelle précédente. Il vient :

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \mathbf{f} \quad \text{avec} \quad \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} \quad \mathbf{f} = \gamma \mathbf{F} \quad \text{et} \quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

On obtient une formule tridimensionnelle analogue à celle de Newton en introduisant le temps t du référentiel plutôt que le temps propre τ : $dt/d\tau = \gamma$. Il en résulte, en simplifiant :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad \text{avec} \quad \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$$

d'où l'énoncé suivant : par rapport à *tout référentiel galiléen*, le mouvement d'une particule, soumise à l'action de plusieurs corps étrangers exerçant un ensemble de forces, de somme $\mathbf{F}$, satisfait à l'équation vectorielle précédente.

Les forces que nous aurons le plus souvent à envisager seront de nature électromagnétique, car, comme nous le verrons, les forces de gravitation relèvent naturellement de la relativité générale (cf. chapitre 10). Le sujet reste cependant très vaste, puisque les forces électromagnétiques entre particules élémentaires sont bien plus intenses que les forces de gravitation.

En explicitant $d\mathbf{p}/dt$, on voit que la somme des forces $\mathbf{F}$ et l'accélération $\mathbf{a}$ ne sont *plus* colinéaires :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \gamma m \mathbf{a} + m \mathbf{v} \frac{d\gamma}{dt} = \mathbf{F}$$

Évidemment, la loi précédente restitue la deuxième loi de Newton lorsque les vitesses sont suffisamment faibles : si $v \ll c$, alors :

$$\mathbf{p} \approx m \mathbf{v} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \mathbf{a} = \mathbf{F}$$

Notons qu'en relativité la force n'est plus proportionnelle à l'accélération.

II.3. — Cas particuliers

L'expression de la loi fondamentale de la dynamique en relativité se simplifie lorsque la norme de la vitesse reste inchangée au cours du mouvement ou lorsque la direction de la vitesse est fixe.

a) La norme de la vitesse est constante : mouvement uniforme

L'exemple typique d'un tel mouvement est celui d'une particule soumise à un champ magnétique *seul* (cf. chapitre 6). Dans ce cas, la norme de la vitesse est constante et le facteur relativiste γ ne varie pas. La loi fondamentale se réduit alors à :

$$\gamma m \mathbf{a} = \mathbf{F}$$

Dans *ce premier* cas, les résultats obtenus sont analogues aux résultats newtoniens : il suffit de remplacer la masse m par γm .

b) La direction de la vitesse est constante : mouvement rectiligne

L'exemple typique d'un tel mouvement est celui d'une particule dans un champ électrique, avec une vitesse initiale nulle ou colinéaire au champ (cf. chapitre 6). Explicitons la dérivée $d\gamma/dt$:

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \left(-\frac{2v}{c^2}\right) \frac{dv}{dt} = \gamma^3 \frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt} \quad \text{d'où} \quad v \frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 \beta^2 \frac{dv}{dt} = \gamma(\gamma^2 - 1) \frac{dv}{dt}$$

La loi fondamentale devient alors :

$$\gamma m \mathbf{a} + m \mathbf{v} \frac{d\gamma}{dt} = \gamma m \mathbf{a} + m \gamma (\gamma^2 - 1) \mathbf{a} = \mathbf{F} \quad \text{soit} \quad \gamma^3 m \mathbf{a} = \mathbf{F}$$

Dans ce *second* cas, les résultats obtenus sont analogues aux résultats newtoniens : il suffit de remplacer la masse m par $\gamma^3 m$.

II. 4. — Un concept inutile

Dans sa première publication originale sur la relativité, Einstein introduisit, sans d'ailleurs leur attribuer une quelconque importance, les deux concepts de masse transversale γm et de masse longitudinale $\gamma^3 m$. Mais, un peu avant lui, Poincaré avait déjà émis l'idée qu'en relativité la masse d'un corps devrait varier avec sa vitesse.

Après analyse, ces deux concepts de masse variable s'avèrent sans intérêt technique et discutables sur le plan épistémologique. Aussi, les physiciens les ont-ils progressivement abandonnés. Einstein se rallia à cet abandon, comme le montre l'extrait original de la lettre qu'il a envoyée en 1948 à son ami L. Barnett :

Es ist nicht gut von der Masse $M = m/(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ eines bewegten körpers zu sprechen, da für M keine klare Definition gegeben werden kann. Man beschränkt sich besser auf die « Ruhe-Masse » m . Daneben kann man ja den Ausdruck für momentum und Energie geben, wenn man das Trägheitsverhalten rasch bewegter Körper abgeben will.

En français :

Il n'est pas bon de parler de masse $M = m/(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ d'un corps en mouvement, car M ne peut être défini de façon claire. Il vaut mieux ne parler que de « masse au repos » m . En revanche, on peut donner les expressions de la quantité de mouvement et de l'énergie pour représenter l'inertie d'un corps en mouvement très rapide.

II. 5. — Théorème du moment cinétique

Comme en mécanique newtonienne, on peut déduire de la loi fondamentale de la dynamique, appliquée à une particule A , le théorème du moment cinétique. En effet, si l'on multiplie, vectoriellement à gauche, les deux membres de l'équation exprimant cette loi, par le vecteur position $\mathbf{OA}$, on obtient :

$$\mathbf{OA} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{OA} \times \mathbf{F}$$

À droite, on reconnaît le moment de la force ; à gauche le terme s'écrit aussi :

$$\mathbf{OA} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(\mathbf{OA} \times \mathbf{p})}{dt} - \frac{d\mathbf{OA}}{dt} \times \mathbf{p} = \frac{d(\mathbf{OA} \times \mathbf{p})}{dt} - \mathbf{v} \times \mathbf{p}$$

Comme $\mathbf{v} \times \mathbf{p} = \mathbf{0}$, il vient, en introduisant le moment cinétique de la particule $\mathbf{L}_O$:

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \mathbf{OA} \times \mathbf{F} \quad \text{avec} \quad \mathbf{L}_O = \mathbf{OA} \times \mathbf{p}$$

Notons que si la force qui s'exerce sur la particule est *centrale*, c'est-à-dire si son support passe par le centre fixe O , son moment est nul. Il en résulte que le moment cinétique est une constante vectorielle :

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{Cte} \quad \text{soit} \quad \mathbf{OA} \times \mathbf{p} = \mathbf{Cte}$$

Ainsi, comme en mécanique newtonienne, le mouvement d'une particule soumise à une force centrale, par exemple une force électrostatique, est tel qu'il y a conservation du moment cinétique. Il en résulte que ce mouvement est plan, puisqu'à chaque instant, vecteur vitesse et vecteur position doivent être perpendiculaires à un vecteur fixé (cf. *Mécanique*). Un exemple d'application de ce théorème sera donné un peu plus loin en traitant le problème de Kepler en relativité.

Remarque : On obtient un résultat identique dans le cas de la force de gravitation qui s'exerce entre deux particules, puisque cette force aussi est centrale. Cependant, la gravitation est une force ignorée par la relativité restreinte ; précisément, sa prise en compte singulière constitue la théorie de la relativité générale (cf. chapitre 10).

III. — ÉNERGIE CINÉTIQUE, ÉNERGIE DE MASSE, ÉNERGIE

L'expression relativiste de l'énergie cinétique fut donnée pour la première fois par Einstein, dans sa seconde publication sur la relativité restreinte en 1905, intitulée « L'inertie d'un corps dépend-elle de son contenu en énergie ? ». Pour établir cette expression, il est plus simple de suivre d'abord une méthode analogue à celle utilisée en mécanique newtonienne (cf. *Mécanique*).

III. 1. — Énergie cinétique

Pour obtenir son expression, multiplions scalairement le membre $d\mathbf{p}/dt$ de l'équation vectorielle du mouvement par la vitesse $\mathbf{v}$. On obtient :

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \gamma m \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + mv^2 \frac{d\gamma}{dt} = \gamma m v \frac{dv}{dt} + mv^2 \frac{d\gamma}{dt} = \frac{mc^2}{\gamma^2} \frac{d\gamma}{dt} + mc^2 \beta^2 \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma mc^2)$$

puisque :

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 \frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\gamma^2} + \beta^2 = 1$$

On peut retrouver ce résultat en différentiant $\|4-p\|^2 = m^2 c^2$:

$$4-p \cdot d(4-p) = 0 \quad \text{donne} \quad \gamma mc \, d(\gamma mc) - \mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} = 0 \quad \text{d'où} \quad \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p} = d(\gamma mc^2)$$

Ainsi :

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma mc^2)$$

La quantité γmc^2 est homogène à une énergie. Afin d'en donner sa signification, développons-la au voisinage de $\gamma = 1$. Il vient :

$$\gamma mc^2 = mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx mc^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) = mc^2 + \frac{mv^2}{2}$$

Comme $(\gamma - 1)mc^2$ représente, à faible vitesse, l'énergie cinétique newtonienne, on définit l'énergie cinétique einsteinienne par :

$$\mathcal{E}_k = (\gamma - 1)mc^2$$

III. 2. — Énergie de masse

Ce concept d'énergie associée à la masse d'un corps a été perçu pour la première fois par Poincaré en 1904, puis développé par Einstein en 1905.

D'après ce qui précède, contrairement à ce que l'on a, en mécanique newtonienne, l'énergie totale d'une particule libre diffère de l'énergie cinétique. La différence $\mathcal{E}_0$ est appelée *l'énergie de masse* :

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E} - \mathcal{E}_k = \gamma mc^2 - (\gamma - 1)mc^2 \quad \text{d'où} \quad \mathcal{E}_0 = mc^2$$

C'est donc l'énergie associée à la seule masse m , indépendamment de tout mouvement. Un simple calcul numérique montre que cette énergie est considérable, puisque :

$$\text{pour } m = 1 \text{ kg} \quad \text{alors} \quad \mathcal{E}_0 = 9 \times 10^{16} \text{ J}$$

L'énergie de masse traduit ainsi une *équivalence fondamentale* entre masse et énergie et, en dernière analyse, une annexion par l'énergie du concept de masse, lequel fut introduit en mécanique newtonienne antérieurement à celui d'énergie et donc indépendamment de lui.

On peut souligner cette équivalence en considérant qu'un atome au repos, d'énergie $\mathcal{E}_0$, et donc de masse $m = \mathcal{E}_0/c^2$, auquel on fournit une énergie supplémentaire $\Delta\mathcal{E}_0$ qui provoque une modification de sa structure interne, voit son énergie augmentée de $\Delta\mathcal{E}_0$ et donc sa masse varier de :

$$\Delta m = \frac{\Delta\mathcal{E}_0}{c^2}$$

Notons que, pour une particule qui *garde son identité*, une telle énergie de masse n'est pas disponible. En revanche, elle l'est, au moins partiellement, lorsque la particule subit une collision inélastique, au cours de laquelle elle s'est totalement transformée (cf. chapitre 7).

Remarque : Ce qui précède montre que la célèbre formule, $\mathcal{E}_0 = mc^2$, soulignant l'équivalence entre masse et énergie, provient d'une analyse approfondie des conséquences de la loi fondamentale de la dynamique einsteinienne, cette dernière généralisant la deuxième loi de Newton et s'inscrivant naturellement dans le nouveau cadre spatio-temporel de la relativité. On est ainsi loin d'une pensée hasardeuse, voire magique, telle que celle qui transparaît malicieusement dans une caricature connue, dans laquelle on représente Einstein pensif qui, après avoir écrit sur un tableau noir successivement $\mathcal{E} = ma^2$ et $\mathcal{E} = mb^2$, s'apprête à trouver enfin $\mathcal{E} = mc^2$.

III. 3. — Théorème de l'énergie cinétique

En multipliant par $\mathbf{v}$ les deux membres de l'équation vectorielle du mouvement $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ on obtient le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{d(\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_0)}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \mathcal{P} \quad \text{ou} \quad d(\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_0) = \mathcal{P} dt = \delta W$$

ce qui donne, en intégrant entre deux dates quelconques :

$$\Delta(\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_0) = W \quad \text{soit} \quad \Delta\mathcal{E} = W$$

en introduisant la somme $\mathcal{E}$ de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_k$ et de l'énergie de masse $\mathcal{E}_0$; $\mathcal{E}$ est l'énergie totale de la particule libre :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_0 = \gamma mc^2$$

Ainsi, la variation de l'énergie $\mathcal{E}$ de la particule libre est égale au travail de toutes les forces.

Exemple : Un électron, de vitesse initiale $\mathbf{v}_i$, est soumis à un champ électrique constant $\mathbf{E}$ parallèle à $\mathbf{v}_i$. L'application du théorème de l'énergie cinétique entre l'instant initial où l'électron est en O et l'instant final où il est immobile, donne :

$$\frac{d(\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_0)}{dt} = -e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \quad \text{d'où} \quad \mathcal{E}_f - \mathcal{E}_i = \mathcal{E}_{k,f} - \mathcal{E}_{k,i} = -e \int_i^f \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -e\mathbf{E} \cdot \mathbf{OA} = -eEx$$

si x est la coordonnée de $\mathbf{OA}$, selon la direction du champ, à l'instant final.

Concrètement, pour $\mathcal{E}_{k,i} = 1 \text{ MeV}$ et $x = 10 \text{ cm}$, le champ E nécessaire pour immobiliser l'électron vaut :

$$E = \frac{\mathcal{E}_{k,i}}{ex} = \frac{10^6}{0,1} = 10^7 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

III. 4. — Théorème de l'énergie

Dans l'équation précédente, on peut, comme en mécanique newtonienne, distinguer dans la puissance des forces, celle des forces qui dérivent d'une énergie potentielle, laquelle s'écrit $-d\mathcal{E}_p/dt$, de la puissance $\mathcal{P}^{(nc)}$ des autres forces éventuelles, *non conservatives* (cf. *Mécanique*). Il vient :

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dt} + \mathcal{P}^{(nc)} \delta W^{(nc)} \quad \text{d'où} \quad \frac{d}{dt}(\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_p) = \mathcal{P}^{(nc)}$$

ce qui donne :

$$d(\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_p) = \mathcal{P}^{(nc)} dt = \delta W^{(nc)}$$

En intégrant, on obtient :

$$\Delta(\mathcal{E}_k + mc^2 + \mathcal{E}_p) = W^{(nc)}$$

Ainsi, pour toute particule, on peut dire, par analogie avec la mécanique newtonienne, que la dérivée par rapport au temps de l'énergie totale, somme des énergies cinétique, de masse et potentielle, est égale à la puissance des forces *qui ne dérivent pas* d'une énergie potentielle.

III. 5. — Conservation de l'énergie

Lorsque, comme c'est souvent le cas en relativité, $W^{(nc)} = 0$, on a :

$$\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_p = \gamma mc^2 + \mathcal{E}_p = \text{Cte}$$

Soulignons bien que γmc^2 désigne l'énergie de la particule en dehors de son énergie potentielle, alors que $\gamma mc^2 + \mathcal{E}_p$ est son *énergie totale* :

$$\mathcal{E}_t = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_p = \gamma mc^2 + \mathcal{E}_p$$

Exemple : Particule chargée dans un champ électrique

Une particule (masse m , charge q), de vitesse initiale nulle, est issue d'un point O et accélérée sous une différence de potentiel V_a . Rappelons que l'énergie potentielle électrique d'une particule chargée dans le potentiel V a pour expression $\mathcal{E}_p = qV$ (cf. *Électromagnétisme*), ce que l'on obtient comme suit :

$$-d\mathcal{E}_p = \delta W = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -q dV \quad \text{d'où} \quad \mathcal{E}_p = qV$$

par définition du potentiel V dont dérive un champ électrique stationnaire.

Pour calculer la vitesse de la particule, à la sortie de l'anode, exprimons la conservation de l'énergie (Fig. 5.1a). Il vient :

$$0 + mc^2 + q(-V_a) = (\gamma - 1)mc^2 + mc^2 + 0$$

Il en résulte que :

$$\gamma = 1 - \frac{qV_a}{mc^2} \quad \text{et} \quad v = c \left\{ 1 - \frac{1}{[1 - qV_a/(mc^2)]^2} \right\}^{1/2}$$

Notons que le produit qV_a doit être négatif ; s'il s'agit d'un canon de microscope électronique, les particules sont des électrons $q = -e < 0$ et $V_a > 0$.

Sur la figure 5.1b, on a représenté $\beta = v/c$ en fonction de la quantité sans dimension $\alpha = -qV_a/(mc^2)$. Pour $\alpha = 2$, ce qui correspond à une tension d'accélération de V_a qui vaut $2m_e c^2 = 1,024$ MV pour des électrons, la vitesse vaut :

$$v = c \times \left(\frac{8}{9} \right)^{1/2} = 0,94 c$$

Notons que la tension nécessaire pour donner une telle vitesse à des protons est $2m_p c^2 = 1876$ MV.

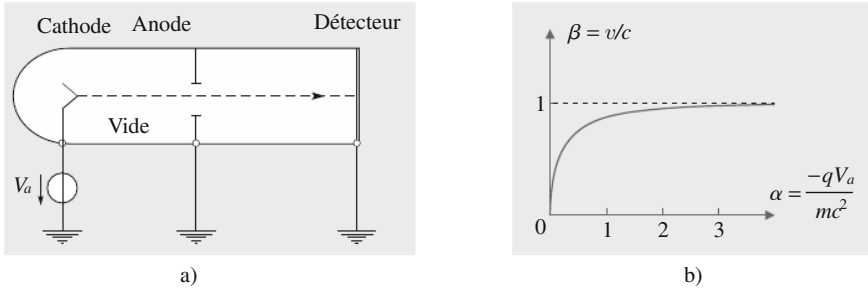


FIG. 5.1.

Il est instructif de comparer les expressions einsteinienne et newtonienne de la vitesse. Pour cela, utilisons les indices E et N pour désigner ces deux expressions respectivement :

$$\begin{aligned} \frac{v_E}{c} &\approx \left[1 - \left(1 - \frac{qV_a}{mc^2} \right)^{-2} \right]^{1/2} \approx \left[1 - 1 - \frac{2qV_a}{mc^2} - 3 \left(\frac{2qV_a}{mc^2} \right)^2 + \dots \right]^{1/2} \\ &\approx \frac{v_N}{c} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{qV_a}{mc^2} + \dots \right)^{1/2} \approx \frac{v_N}{c} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{qV_a}{mc^2} + \dots \right) \quad \text{avec} \quad v_N = \left(\frac{-2qV_a}{m} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\frac{v_E - v_N}{v_N} = \frac{3}{4} \frac{qV_a}{mc^2} < 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\Delta v}{v} = \frac{3|qV_a|}{mc^2}$$

Pour des électrons ($-qV_a = eV_a$), $\Delta v/v \leq 1\%$ lorsque $V_a \leq 7$ kV. Pour des protons ($-qV_a = -eV_a = e|V_a|$), $\Delta v/v \leq 1\%$ lorsque $|V_a| \leq 13$ MV.

La variable $\alpha = -qV_a/(mc^2)$, sans dimension et positive, qui est utilisée dans le graphe de la figure 5.1b, est commune à toutes les particules. On distingue généralement trois domaines : le premier est *newtonien*, le deuxième *einsteinien* et le troisième *ultra-einsteinien*. Dans ce dernier domaine, on peut considérer que $v \approx c$ avec une excellente approximation. Le tableau 5.1 donne les valeurs de γ et β pour des électrons accélérés dans un microscope électronique.

V_a (kV)	50	100	300	500	1000	3000
γ	1,098	1,196	1,578	1,978	2,957	6,870
β	0,413	0,548	0,776	0,863	0,941	0,989

TAB. 5.1.

III. 6. — L'inertie d'une particule dépend-elle de son contenu en énergie ?

C'est la question à laquelle Einstein a répondu affirmativement dans l'une de ses publications historiques de 1905.

Pour établir ce résultat, il considère une particule, de masse m au repos dans le référentiel $\mathcal{R}$, située à l'origine O ; son énergie est évidemment $\mathcal{E}_{av} = mc^2$. Cette particule émet symétriquement deux ondes électromagnétiques, chacune d'énergie $\epsilon/2$; son énergie dans $\mathcal{R}$, après émission, est donc $\mathcal{E}_{ap} = mc^2 - \epsilon$, puisqu'elle demeure au repos, en raison de la symétrie de l'émission.

Dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}'$, de vitesse $\mathbf{v}$ selon l'axe Ox , par rapport à $\mathcal{R}$, les énergies précédentes deviennent, respectivement :

$$\mathcal{E}'_{av} = \gamma \mathcal{E}_{av} = \gamma mc^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}'_{ap} = \gamma \mathcal{E}_{ap} = \gamma (mc^2 - \epsilon)$$

avec $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Il en résulte que :

$$\mathcal{E}'_{av} - \mathcal{E}_{av} = (\gamma - 1)mc^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}'_{ap} - \mathcal{E}_{ap} = (\gamma - 1) \left(m - \frac{\epsilon}{c^2} \right) c^2$$

Comme ces différences représentent les énergies cinétiques de la particule, par rapport à $\mathcal{R}'$, avant et après l'émission d'ondes, on en déduit que, si une particule cède l'énergie ϵ , sa masse diminue de ϵ/c^2 :

$$m_{ap} = m_{av} - \frac{\epsilon}{c^2}$$

La masse d'une particule dépend donc de son contenu énergétique.

Ordre de grandeur : Pour un atome de mercure de masse $m_{av} \approx 187$ GeV, qui émet symétriquement deux ondes d'énergie 5 eV, la diminution relative de masse est :

$$\frac{\epsilon}{m_{av}c^2} = \frac{2 \times 5}{187 \times 10^9} \approx 0,53 \times 10^{-10}$$

IV. — RELATION ENTRE QUANTITÉ DE MOUVEMENT ET ÉNERGIE

IV.1. — Particule de masse non nulle

La relation entre la quantité de mouvement $\mathbf{p}$ et l'énergie $\mathcal{E}$ d'une particule libre, de masse non nulle, peut être établie en éliminant la vitesse entre les expressions de la quantité de mouvement et de l'énergie :

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \quad \text{et} \quad \mathcal{E} = \frac{mc^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$$

Il suffit pour cela de calculer la quantité $\mathcal{E}^2 - p^2 c^2$:

$$\mathcal{E}^2 - p^2 c^2 = \frac{m^2 c^4}{1 - v^2/c^2} - \frac{m^2 v^2 c^2}{1 - v^2/c^2} = \frac{m^2 c^4}{1 - v^2/c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m^2 c^4$$

Notons que cette quantité est, au coefficient multiplicatif c^2 près, la norme du quadrivecteur quantité de mouvement-énergie. En effet, le carré de la pseudo-norme $4-p$ s'écrit explicitement :

$$\|4-p\|^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2$$

On retiendra donc :

$$\mathcal{E}^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$$

Sur la figure 5.2, on a représenté un triangle rectangle ABC dans lequel $\mathcal{E}$ est l'hypothénuse $AC = \mathcal{E}$. Il s'agit là d'un simple moyen *mémotechnique* s'appuyant sur la formule de Pythagore bien connue.

L'exploitation technique de la relation entre quantité de mouvement et énergie est grandement facilitée si l'on exprime les énergies en MeV, les quantités de mouvement en $\text{MeV} \cdot c^{-1}$ et les masses en $\text{MeV} \cdot c^{-2}$. Par exemple, on dira pour un proton, de masse $m_p = 0,938 \text{ GeV} \cdot c^{-2}$, et de quantité de mouvement $p = 1 \text{ GeV} \cdot c^{-1}$, que son énergie vaut $\mathcal{E} = 1,371 \text{ GeV}$.

Remarque : La relation entre $\mathbf{p}$ et $\mathcal{E}$ s'écrit aussi :

$$p = \frac{1}{c}(\mathcal{E}^2 - m^2 c^4)^{1/2}$$

La quantité de mouvement n'a donc de sens que dans les deux cas suivants : $\mathcal{E} \geq mc^2$ et $\mathcal{E} \leq -mc^2$. Cette dernière possibilité a été à l'origine de « l'invention » des antiparticules par le physicien anglais P. Dirac en 1930, ce qui lui valut le prix Nobel en 1933. Les positrons ont été découverts deux ans plus tard, en 1932 par l'américain C. Anderson, lequel reçut pour cela le prix Nobel en 1936 (cf. chapitre 8).

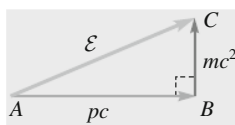


FIG. 5.2.

IV . 2 . — Particule de masse nulle

La relation entre l'énergie $\mathcal{E}$ d'une particule libre et sa quantité de mouvement $\mathbf{p}$ garde un sens pour $m = 0$, puisque le facteur γ devient alors infini. Dans ce cas, elle se réduit à :

$$\mathcal{E} = pc$$

Il en est ainsi pour les photons, particules associées aux ondes électromagnétiques. Cette prévision théorique a été expérimentalement confirmée par l'effet photo-électrique et l'effet Compton (cf. *Quantique*).

i) Selon l'effet photo-électrique, interprété par Einstein en 1905, le photon est la particule, d'énergie $h\nu$, que l'on doit associer au rayonnement électromagnétique monochromatique de fréquence ν , $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ étant la constante universelle de Planck.

ii) Selon l'effet Compton, interprété par A. Compton en 1923, la quantité de mouvement du photon est $h\nu/c$.

Ainsi, en relativité, l'énergie généralise le concept de masse et le remplace comme caractéristique essentielle de la matière.

Pour des photons associés à une onde monochromatique plane, de longueur d'onde dans le vide λ , retenons :

$$\mathcal{E} = h\nu = h \frac{c}{\lambda} \quad \text{soit} \quad \mathcal{E}(\text{eV}) = h \frac{c}{e\lambda} = \frac{1239,8}{\lambda(\text{nm})}$$

Par exemple, les photons produits dans un laser hélium-néon, de longueur d'onde $\lambda = 632,8 \text{ nm}$, ont l'énergie $\mathcal{E} = 1,96 \text{ eV}$ et la quantité de mouvement $p = 1,96 \text{ eV} \cdot \text{c}^{-1}$.

Remarque : Certains auteurs associent parfois au photon une masse non nulle égale au rapport de son énergie $h\nu$ sur c^2 , ce que n'ont proposé ni Poincaré, ni Einstein. En dehors de son inutilité, ce concept pose au moins le problème suivant : le rapport de l'énergie d'une particule sur c^2 suppose que la particule puisse être au repos dans un certain référentiel ; c'est précisément ce qu'il est impossible de réaliser avec un photon, dont la singularité éminente est précisément d'avoir toujours la même vitesse c par rapport à n'importe quel référentiel galiléen.

IV . 3 . — Particule plongée dans un champ électromagnétique

Si la particule est chargée (charge q), ce qui suppose que sa masse ne soit pas nulle, et plongée dans un potentiel électromagnétique (V , $\mathbf{A}$), sa quantité de mouvement totale ou impulsion $\mathbf{p}$, et son énergie totale $\mathcal{E}_t$ sont respectivement :

$$\mathbf{p}_t = \gamma m \mathbf{v} + q\mathbf{A} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_t = \gamma mc^2 + qV$$

On a donc :

$$(\mathcal{E}_t - qV)^2 - (\mathbf{p}_t - q\mathbf{A})^2 c^2 = m^2 c^4$$

Pour un électron d'énergie totale 2 MeV , à la sortie d'une anode portée au potentiel $V = 0,5 \text{ MV}$, on a, en l'absence d'effet magnétique :

$$(\mathcal{E}_t + eV)^2 - p^2 c^2 = m_e^2 c^4 \quad \text{d'où} \quad p = \frac{1}{c} [(\mathcal{E}_t + eV)^2 - m_e^2 c^4]^{1/2} = 2,44 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-1}$$

IV.4. — Système de particules

a) Quantité de mouvement d'un système de particules

Comme en mécanique newtonienne, la quantité de mouvement d'un système de particules est la somme des quantités de mouvement de chacune des particules ; c'est donc une grandeur *additive* :

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i \quad \text{avec} \quad \mathbf{p}_i = \gamma_i m_i \mathbf{v}_i \quad \text{et} \quad \gamma_i = \left(1 - \frac{v_i^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

b) Énergie d'un système de particules

L'énergie $\mathcal{E}$ d'un système de particules est la somme de l'énergie de chacune des particules augmentée de leur énergie d'interaction ; ce n'est donc pas une grandeur additive :

$$\mathcal{E} = \sum_i \mathcal{E}_i + \mathcal{E}_{p,in} \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_i = \gamma_i m_i c^2 \quad \text{et} \quad \gamma_i = \left(1 - \frac{v_i^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

c) Masse d'un système de particules

Un système complexe vu à grande distance devant ses dimensions se comporte comme une particule. Aussi la définition de sa masse M doit-elle être compatible avec celle d'une particule unique, précisément :

$$\mathcal{E}^2 - P^2 c^2 = M^2 c^4 \quad \text{d'où} \quad M = \frac{1}{c^2} (\mathcal{E}^2 - P^2 c^2)^{1/2}$$

si $\mathcal{E}$ et $\mathbf{P}$ sont respectivement l'énergie et la quantité de mouvement du système libre. On voit que M est aussi une grandeur *invariante* (par changement de référentiel galiléen) et *constante* (au cours du temps).

En revanche, *ce n'est pas* une grandeur additive : la masse d'un système matériel n'est pas, en général, la somme des masses des particules qui le constituent :

$$M \neq \sum_i m_i$$

Montrons-le sur l'exemple simple de l'atome d'hydrogène globalement au repos, constitué d'un électron et d'un proton. On sait que, dans l'état fondamental, la somme des énergies cinétique et potentielle du système vaut $\mathcal{E}_H = -13,6 \text{ eV}$, alors que les énergies de masse sont respectivement $m_e c^2$ et $m_p c^2$. Comme la quantité de mouvement de l'atome est nulle dans le référentiel du laboratoire, il vient :

$$M = \frac{\mathcal{E}}{c^2} = \frac{m_e c^2 + m_p c^2 + \mathcal{E}_H}{c^2} \neq m_e + m_p$$

La différence vaut précisément $M - (m_e + m_p) = \mathcal{E}_H/c^2 = -13,6 \text{ eV} \cdot c^{-2}$

V. — PROBLÈME DE KEPLER EN RELATIVITÉ RESTREINTE

Comme en mécanique newtonienne, le problème de Kepler ou de Coulomb en relativité restreinte consiste à étudier le mouvement d'une particule A , de masse m , soumise à une force centrale passant par le centre attractif ou répulsif O , dont l'énergie potentielle est $\mathcal{E}_p(r)$, r étant la coordonnée radiale définie par la norme du vecteur position $\mathbf{OA}$, la coordonnée angulaire orthoradiale étant φ (Fig. 5.3a).

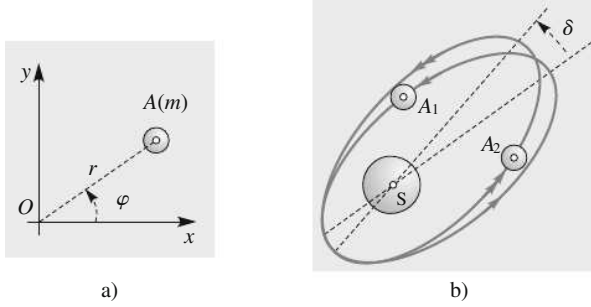


FIG. 5.3.

V.1. — Étude générale

Écrivons les équations de conservation du moment cinétique et de l'énergie respectivement :

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{O}\mathbf{A} \times \mathbf{p} = r\mathbf{e}_r \times \gamma m(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi) = \gamma m r^2 \dot{\varphi} \mathbf{e}_z = \mathbf{Cte} \quad \text{et} \quad (\gamma - 1)mc^2 + mc^2 + \mathcal{E}_p = \mathbf{Cte}$$

Par conséquent :

$$\gamma m r^2 \dot{\varphi} \mathbf{e}_z = \mathbf{Cte} = \mathbf{L} \quad \text{et} \quad \gamma mc^2 + \mathcal{E}_p = \mathbf{Cte} = \mathcal{E}_t$$

De l'équation précédente, on tire aisément :

$$\gamma = \frac{\mathcal{E}_t - \mathcal{E}_p}{mc^2}$$

En outre, on a, en introduisant la variable $u = 1/r$, comme en mécanique newtonienne (cf. *Mécanique*) :

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \quad \text{avec} \quad \dot{\varphi} = \frac{L}{\gamma m r^2} \quad \text{et} \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\varphi} \dot{\varphi} = -\frac{\dot{\varphi}}{u^2} \frac{du}{d\varphi} = -\frac{L}{\gamma m} \frac{du}{d\varphi}$$

Ainsi :

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \beta^2 = 1 - \left(\frac{L}{\gamma mc} \right)^2 \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right]$$

ce qui donne :

$$\gamma^2 = 1 + \frac{L^2}{m^2 c^2} \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right]$$

En identifiant les deux expressions de γ^2 , on trouve :

$$1 + \frac{L^2}{m^2 c^2} \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right] = \left(\frac{\mathcal{E}_t - \mathcal{E}_p}{mc^2} \right)^2$$

d'où l'équation différentielle en u :

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 = \frac{m^2 c^2}{L^2} \left[\left(\frac{\mathcal{E}_t - \mathcal{E}_p}{mc^2} \right)^2 - 1 \right]$$

Dérivons cette équation par rapport à φ , afin d'obtenir une équation différentielle caractéristique du second ordre :

$$2 \frac{du}{d\varphi} \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right) = -2 \frac{m}{L^2} \left(\frac{\mathcal{E}_t - \mathcal{E}_p}{mc^2} \right) \frac{d\mathcal{E}_p}{dr} \frac{dr}{d\varphi}$$

d'où :

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = -\frac{m}{L^2 u^2} \left(\frac{\mathcal{E}_t - \mathcal{E}_p}{mc^2} \right) \frac{d\mathcal{E}_p}{dr} \quad \text{puisque} \quad \frac{dr}{d\varphi} = -r^2 \frac{du}{d\varphi}$$

Finalement :

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = f(u) \frac{d\mathcal{E}_p}{dr} \quad \text{avec} \quad f(u) = \frac{m}{L^2 u^2} \left(\frac{\mathcal{E}_t - \mathcal{E}_p}{mc^2} \right)$$

Notons que, dans le cas newtonien, $\mathcal{E}_t - \mathcal{E}_p \approx mc^2$, d'où : $f(u) \approx m/(L^2 u^2)$.

Appliquée au mouvement d'une particule soumise à une force coulombienne, attractive ou répulsive, dont l'énergie potentielle est de la forme $\mathcal{E}_p = K/r$, l'analyse précédente donne :

$$\frac{m}{L^2 u^2} \left(\frac{\mathcal{E}_t - \mathcal{E}_p}{mc^2} \right) \frac{d\mathcal{E}_p}{dr} = -\frac{mr^2}{L^2} \left(\frac{\mathcal{E}_t - K/r}{mc^2} \right) \frac{K}{r^2} = -\frac{mK}{L^2} \left(\frac{\mathcal{E}_t - Ku}{mc^2} \right) = -\frac{K\mathcal{E}_t}{L^2 c^2} + \frac{K^2}{L^2 c^2} u$$

d'où l'équation :

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + \left(1 - \frac{K^2}{L^2 c^2} \right) u = -\frac{K\mathcal{E}_t}{L^2 c^2}$$

Comme K peut être positif ou négatif, posons $K = \varepsilon|K|$, avec $\varepsilon = -1$ si le potentiel est attractif et $\varepsilon = 1$ s'il est répulsif. On peut donc écrire :

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + \kappa^2 u = -\frac{\varepsilon \kappa^2}{p}$$

avec $\kappa^2 = 1 - K^2/(L^2 c^2)$ et $p = L^2 c^2/(\mathcal{E}_t |K|)$. La solution de cette équation différentielle est :

$$u = A \cos[\kappa(\varphi + \varphi_0)] - \frac{\varepsilon}{p}$$

soit, en introduisant l'excentricité $e = Ap$ et l'angle φ_0 pour lequel $r = p/(-\varepsilon + e)$:

$$r = \frac{p}{-\varepsilon + e \cos[\kappa(\varphi - \varphi_0)]} \quad \text{avec} \quad \kappa^2 = 1 - \frac{K^2}{L^2 c^2} \quad \text{et} \quad p = \frac{L^2 c^2 K^2}{\mathcal{E}_t |K|}$$

On restitue l'expression newtonienne de r en faisant c infini et ainsi $\kappa = 1$.

i) Si l'interaction est *attractive* ($\varepsilon = -1$) avec $e < 1$, et si $\kappa \approx 1$, la trajectoire est une ellipse, d'équation :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos[\kappa(\varphi - \varphi_0)]}$$

dont le grand axe tourne, à chaque révolution, de l'angle faible (Fig. 5.3b) :

$$\delta = \frac{2\pi}{\kappa} - 2\pi = 2\pi \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) = 2\pi \left[\left(1 - \frac{K^2}{L^2 c^2} \right)^{-1/2} - 1 \right] \approx \frac{\pi K^2}{L^2 c^2}$$

En effet, pour $\kappa = 1$, la période de l'angle $\varphi - \varphi_0$ est 2π , alors que pour $\kappa \neq 1$, cette période vaut $2\pi/\kappa$.

Pour $e > 1$ et $e = 1$, on obtient respectivement une hyperbole et une parabole d'axes tournants.

ii) Si l'interaction est *répulsive* ($\varepsilon = 1$), et si $\kappa \approx 1$, la trajectoire est une hyperbole tournante d'équation :

$$r = \frac{p}{-1 + e \cos[\kappa(\varphi - \varphi_0)]}$$

V. 2. — Applications

a) Trajectoire de la planète Mercure autour du Soleil

Dans le cas du mouvement de la planète Mercure, en orbite autour du Soleil, l'analyse précédente donne :

$$|K| = GM_S M_p \quad L = M_p r_m v_M \quad \text{d'où} \quad \frac{K}{Lc} = \frac{GM_S}{r_m v_M c} = 0,1644 \times 10^{-3}$$

car la masse M_S du Soleil, la distance (minimale) r_m de la planète au Soleil, au périhélie, et la vitesse (maximale) v_M , en ce point, valent respectivement :

$$M_S \approx 1,99 \times 10^{30} \text{ kg} \quad r_m = 0,307 \times 149,6 \times 10^9 \text{ m} = 0,459 \times 10^{11} \text{ m} \quad \text{et} \quad v_M = 58 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

On trouve :

$$\delta = \pi \left(\frac{K}{Lc} \right)^2 = \pi \times 0,027 \times 10^{-6} = 0,0848 \times 10^{-6} \quad \text{soit} \quad \delta \approx 0,017 \text{ seconde d'arc}$$

par révolution mercurienne, laquelle dure $0,24 \times 365,25 = 87,67$ jours. Pendant un siècle, l'avance du périhélie de Mercure est donc :

$$\frac{100 \times 365,25}{87,67} \times 0,017 \approx 7 \text{ secondes d'arc}$$

Expérimentalement, on a constaté une avance du périhélie de Mercure proche de 43 secondes d'arc, c'est-à-dire une valeur six fois plus grande que ne le prévoit la relativité restreinte. Cet écart important ne fut interprété qu'en 1916 par Einstein, dans le cadre de la relativité générale (cf. chapitre 10).

b) Trajectoire d'un électron autour d'un proton

Dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène, l'électron a une trajectoire circulaire autour du proton. Calculons la valeur de δ correspondant à l'état fondamental (cf. *Quantique*) :

$$L = \hbar = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad \text{d'où} \quad \frac{|K|}{Lc} = 0,0073 \quad \text{avec} \quad |K| = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 23 \times 10^{-29} \text{ J} \cdot \text{m}$$

On en déduit :

$$\delta = \frac{\pi K^2}{L^2 c^2} \approx 167,4 \times 10^{-6} \quad \text{soit} \quad \delta \approx 33,4 \text{ secondes d'arc}$$

VI. — FORMULES DE TRANSFORMATION DES FORCES

VI. 1. — Quadrivecteur force

Rappelons la définition du *quadrivecteur force* introduit lors de l'énoncé quadridimensionnel de la loi fondamentale de la dynamique d'Einstein :

$$4\text{-}f = \frac{d(4\text{-}p)}{d\tau} \quad \text{soit} \quad 4\text{-}f = \left(\gamma \frac{d\gamma mc}{dt}, \gamma \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)$$

puisque $4\text{-}p = (\gamma mc, \mathbf{p})$ et $d\tau = dt/\gamma$. Comme :

$$\gamma \frac{d(\gamma mc^2)}{dt} = \gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$$

le quadrivecteur force s'explique selon :

$$4\text{-}f = (\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}/c, \gamma \mathbf{F})$$

Ainsi, ce quadrivecteur admet, comme composante « temporelle », une grandeur associée à la puissance $\mathcal{P}$ de la somme des forces qui s'exercent sur la particule.

VI.2. — Formules de transformation

On déduit de la définition du quadrivecteur force les formules de transformation suivantes, par changement de référentiel galiléen $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$:

$$\begin{aligned}\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}/c &= \gamma_e (\gamma' \mathbf{F}' \cdot \mathbf{v}'/c + \beta_e \gamma' F'_x) \\ \gamma F_x &= \gamma_e (\gamma' F'_x + \beta_e \gamma' \mathbf{F}' \cdot \mathbf{v}/c) \\ \gamma F_y &= \gamma' F'_y \\ \gamma F_z &= \gamma' F'_z\end{aligned}$$

On condense souvent les trois dernières formules en distinguant la force longitudinale $\mathbf{F}_{//}$, suivant la direction Ox du mouvement, et la force transversale $\mathbf{F}_{\perp}$, normale à cette direction :

$$\gamma \mathbf{F}_{//} = \gamma_e \gamma' \left(\mathbf{F}'_{//} + \beta_e \mathbf{F}' \cdot \mathbf{v}'/c \right) \quad \gamma \mathbf{F}_{\perp} = \gamma' \mathbf{F}'_{\perp}$$

VI.3. — Exemples

a) Force d'interaction entre deux électrons de même vitesse

Soient deux électrons A_1 et A_2 qui se déplacent à la même vitesse $\mathbf{v}$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$, normalement à la droite qui les joint (Fig. 5.4). Les forces $\mathbf{F}'_1$ et $\mathbf{F}'_2$, qui s'exercent respectivement sur A_1 et A_2 , dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié aux particules, sont d'origine électrostatique :

$$\mathbf{F}'_1 = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \mathbf{e}_{y'} = -\frac{q_e^2}{d^2} \mathbf{e}_{y'}, \quad \text{et} \quad \mathbf{F}'_2 = \frac{q_e^2}{d^2} \mathbf{e}_{y'} \quad \text{en posant} \quad q_e^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

Dans $\mathcal{R}$, les formules de transformation, relatives aux forces transversales, s'écrivent :

$$\gamma \mathbf{F}_1 = \gamma' \mathbf{F}'_1 \quad \gamma \mathbf{F}_2 = \gamma' \mathbf{F}'_2 \quad \text{avec} \quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} \quad \text{et} \quad \gamma' = 1$$

Par conséquent :

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{q_e^2}{d^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2} \mathbf{e}_y \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_2 = \frac{q_e^2}{d^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2} \mathbf{e}_y$$

Remarques : 1) Pour $v \ll c$, ces forces deviennent, puisque $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$:

$$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \mathbf{e}_y - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^2 v^2}{2d^2} \mathbf{e}_y$$

On reconnaît, avec le second terme, une force attractive d'origine magnétique.

2) On constate que l'on a ici, comme en mécanique newtonienne, $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$. Cependant, ce résultat n'est pas général comme le montre l'exemple qui suit.

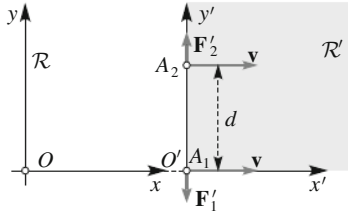


FIG. 5.4.

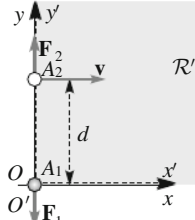


FIG. 5.5.

b) Force d'interaction entre deux électrons de vitesses différentes

Considérons deux électrons dont l'un A_1 est fixe dans $\mathcal{R}$ et l'autre A_2 a une vitesse $\mathbf{v}$, par rapport à $\mathcal{R}$, constante et dirigée suivant la normale à A_1A_2 (Fig. 5.5). Dans $\mathcal{R}$, la force répulsive $\mathbf{F}_2$, qu'exerce A_1 sur A_2 , dans la configuration représentée où la distance A_1A_2 vaut d , est :

$$\mathbf{F}_2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \mathbf{e}_y = \frac{q_e^2}{d^2} \mathbf{e}_y$$

Dans $\mathcal{R}'$ lié à A_2 , la force $\mathbf{F}_1'$ qui s'exerce sur A_1 est l'opposée de la précédente. À l'aide des formules de transformation des forces, on peut obtenir $\mathbf{F}_1$. En effet, les forces étant transversales, on a :

$$\gamma_1 \mathbf{F}_1 = \gamma'_1 \mathbf{F}_1'$$

où $\gamma_1 = 1$ puisque $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ et $\gamma'_1 = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ car $\mathbf{v}'_1 = -\mathbf{v}$. Finalement, on trouve :

$$\mathbf{F}_1 = \gamma'_1 \mathbf{F}_1' = -\frac{q_e^2}{d^2 (1 - v^2/c^2)^{1/2}} \mathbf{e}_y \neq -\mathbf{F}_2$$

Ainsi, dans cette formulation classique des actions électromagnétiques entre particules chargées, l'opposition des actions réciproques n'est pas satisfaite.

CONCLUSION

Retenons les résultats essentiels.

1) La loi fondamentale de la dynamique d'Einstein, dans un référentiel galiléen, se met sous une forme analogue à celle connue en dynamique newtonienne :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad \text{mais} \quad \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} \quad \text{avec} \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

2) On en déduit, comme en mécanique newtonienne, le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \mathbf{OA} \times \mathbf{F} \quad \text{avec} \quad \mathbf{L}_O = \mathbf{OA} \times \mathbf{p} = \mathbf{OA} \times \gamma m \mathbf{v}$$

Si la force qui s'exerce sur la particule est centrale, le moment cinétique se conserve.

3) On en déduit aussi le théorème de l'énergie :

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_p) = \mathcal{P}^{nc} \quad \text{où} \quad \mathcal{E}_k = (\gamma - 1)mc^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_0 = mc^2$$

sont respectivement l'énergie cinétique et l'énergie de masse de la particule ; $\mathcal{E}_p$ désigne l'énergie potentielle et $\mathcal{P}^{nc}$ la puissance des forces éventuelles qui ne dérivent pas d'une énergie potentielle.

4) La relation entre la quantité de mouvement $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$ et l'énergie $\mathcal{E} = \gamma mc^2$ d'une particule libre, de masse m , est :

$$\mathcal{E}^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$$

Pour des particules de masse nulle, telles que le photon, cette relation se réduit à :

$$\mathcal{E} = pc$$

Si une particule chargée est plongée dans un potentiel électromagnétique $(V, \mathbf{A})$, la relation précédente devient :

$$(\mathcal{E}_t - qV)^2 - (\mathbf{p}_t - q\mathbf{A})^2 c^2 = m^2 c^4$$

$\mathcal{E}_t$ étant l'énergie totale et $\mathbf{p}_t = \mathbf{p} + q\mathbf{A}$ la quantité de mouvement totale ou l'impulsion.

5) Enfin, le quadrivecteur force :

$$4-f = (\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}/c, \gamma \mathbf{F})$$

généralise le concept newtonien de force.

EXERCICES ET PROBLÈMES

P5– 1. Expressions de la loi fondamentale de la dynamique einsteinienne

1. Écrire la loi fondamentale de la dynamique einsteinienne du point matériel, dans le système de coordonnées intrinsèques.

2. Établir la relation entre la force $\mathbf{F}$, qui s'exerce sur une particule de masse m , sa vitesse $\mathbf{v}$ et son accélération $\mathbf{a}$.

P5– 2. Durée de traversée d'une galaxie par un proton

Un proton d'énergie 10^{10} GeV, traverse une galaxie suivant son diamètre qui vaut 10^5 année-lumière. Comparer la durée de la traversée pour un observateur terrestre à celle mesurée dans le référentiel lié au proton.

P5– 3. Énergie cinétique d'une particule rapide. Approximation newtonienne

On admet qu'une particule est rapide lorsque :

$$\frac{\mathcal{E}_k - \mathcal{E}_k^N}{\mathcal{E}_k^N} \geq \varepsilon$$

$\mathcal{E}_k^N$ désignant l'expression newtonienne de l'énergie cinétique et ε un nombre positif très inférieur à l'unité.

1. Trouver, en fonction de ε et c , la vitesse v_c de la particule séparant les domaines newtonien et einsteinien.

2. Calculer l'énergie cinétique d'un électron et d'un proton de vitesse v_c , en fonction de ε . Cas où $\varepsilon = 0,01$.

P5– 4. Différentes expressions de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique

On désigne respectivement par $\mathbf{p}$ et $\mathcal{E}_k$ la quantité de mouvement et l'énergie cinétique d'une particule, de masse m .

1. Rappeler les expressions de $\mathcal{E}_k$ et $\mathbf{p}$ en fonction du facteur relativiste γ . En déduire $\mathcal{E}_k$ en MeV et p en $\text{MeV} \cdot c^{-1}$, pour un électron de vitesse $0,99c$.

2. Trouver pc en fonction de $\mathcal{E}_k$. Application au cas d'un proton d'énergie cinétique 6 GeV et à celui d'un photon d'énergie 2 keV.

P5– 5. Énergie cinétique et énergie de masse

Quelle est la vitesse d'une particule, de masse m , dont l'énergie cinétique est le quart de son énergie de masse ? En déduire le rapport de sa quantité de mouvement sur mc ?

P5– 6. Relation entre les variations de vitesse, de quantité de mouvement et d'énergie

1. Exprimer, pour une particule de masse m , la variation relative de vitesse dv/v et la variation relative de quantité de mouvement dp/p , en fonction de la variation relative d'énergie $d\mathcal{E}/\mathcal{E}$.

2. Étudier le domaine des hautes énergies défini par $\mathcal{E} \gg mc^2$.

3. Établir, en fonction de β , l'expression du facteur α reliant la variation relative d'énergie cinétique d'une particule à la variation relative de quantité de mouvement :

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{\mathcal{E}_k} = \alpha \frac{dp}{p}$$

Représenter graphiquement α en fonction de β . Quelles sont les valeurs de α dans les cas extrêmes $\beta \approx 0$ et $\beta \approx 1$?

P5– 7. Calcul de β et γ pour des électrons et des protons

1. Calculer $\beta = v/c$ et $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, pour des électrons d'énergie cinétique :

10 ; 50 ; 100 ; 300 ; 500 keV

1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 10 ; 30 ; 50 ; 100 ; 1 000 MeV

2. Même question pour des protons d'énergie cinétique :

1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 10 ; 30 ; 50 ; 100 MeV 1 ; 10 ; 20 ; 50 ; 100 GeV

3. On associe à ces particules en mouvement une onde dont la longueur d'onde est donnée par la relation de De Broglie : $\lambda_{DB} = h/p$, h étant la constante de Planck.

Calculer les différentes valeurs de λ_{DB} . On présentera l'ensemble des résultats sous forme de deux tableaux, l'un relatif aux électrons et l'autre aux protons.

P5– 8. Énergie d'un système de deux neutrons

Deux particules A_1 et A_2 se dirigent l'une vers l'autre suivant un même axe Ox d'un référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$: A_1 a la vitesse $\beta_1 c$ et A_2 la vitesse $-\beta_2 c$.

1. Quelle est l'énergie de A_2 dans $\mathcal{R}$ et dans le référentiel $\mathcal{R}'$, lié à A_1 , en translation par rapport à $\mathcal{R}$?
2. Trouver l'énergie de l'ensemble, successivement dans $\mathcal{R}$ puis dans $\mathcal{R}'$.
3. Étudier le cas particulier où les deux particules sont des neutrons de vitesses opposées : $\beta_1 = \beta_2 = 0,6$. Calculer le rapport des énergies $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ du système dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Commenter.

P5– 9. Force d'interaction entre deux particules chargées animées d'une même vitesse constante

Calculer, dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, la force d'interaction entre deux électrons se déplaçant, à la distance $d = 1 \text{ mm}$ l'un de l'autre, avec la même vitesse constante $\mathbf{v}$, pour les deux valeurs suivantes de l'énergie cinétique : $\mathcal{E}_k = 1 \text{ keV}$ puis $\mathcal{E}_k = 1 \text{ MeV}$.

P5– 10. Lois de la réflexion sur un miroir en mouvement

Une onde lumineuse subit une réflexion sur un miroir plan d'un référentiel $\mathcal{R}'$, en translation rectiligne uniforme, à la vitesse $\mathbf{u} = u \mathbf{e}_x$, par rapport au référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$. Le plan du miroir coïncide avec le plan $O'y'z'$. Un rayon lumineux, contenu dans le plan $O'x'y'$, tombe sur le miroir en O' , en venant d'une source placée dans la région des y' négatifs, et subit une réflexion ; on désigne par i' et r' les valeurs absolues des angles incidents et réfléchis.

1. Rappeler la relation entre i' et r' . En déduire les composantes dans $\mathcal{R}'$ de la vitesse de la lumière.
2. Quelles sont les composantes de la vitesse de la lumière dans $\mathcal{R}$? En déduire les valeurs absolues des angles incident i et réfléchi r dans $\mathcal{R}$, en fonction de i' et $\beta_e = u/c$. Conclure.
3. Montrer que l'on a :

$$\beta_e = \frac{\sin i \cos i - \sin r \cos r}{\sin i + \sin r}$$

Calculer β_e dans le cas où $i = \pi/6$ et $r = \pi/4$.

4. Sachant que la longueur d'onde du rayon lumineux dans $\mathcal{R}'$ est $\lambda' = 632,8 \text{ nm}$, que devient cette longueur d'onde dans $\mathcal{R}$?

P5– 11. Masse d'un système de deux électrons

Deux électrons A_1 et A_2 se dirigent l'un vers l'autre, dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, avec des vitesses de sens opposés, respectivement $(3c/4)\mathbf{e}_x$ et $(-c/4)\mathbf{e}_x$.

1. Calculer, dans $\mathcal{R}$, en négligeant l'interaction électromagnétique, l'énergie $\mathcal{E}$ du système en MeV, ainsi que sa quantité de mouvement $\mathbf{P}$ en $\text{MeV} \cdot \text{c}^{-1}$.
2. Quelle est la vitesse d'une particule dans le référentiel $\mathcal{R}'$ dans lequel l'autre est immobile ?
3. Que deviennent dans $\mathcal{R}'$ l'énergie $\mathcal{E}$ et la quantité de mouvement $\mathbf{P}$ du système ?
4. Calculer la masse d'un tel système et la comparer à $2m_e c^2$. Commenter.

P5– 12. Masse d'un système de deux photons

Deux photons A_1 et A_2 , d'énergies respectives 50 MeV et 20 MeV, se dirigent l'un vers l'autre, suivant l'axe Ox du référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, avec des vitesses opposées, respectivement c et $-c$.

Trouver l'énergie, la quantité de mouvement et la masse de ce système.

P5– 13. Oscillateur en dynamique d'Einstein

Une particule A , de masse m , se déplace le long d'un axe galiléen Ox , sous l'action de la force de rappel $\mathbf{F} = -Kx \mathbf{e}_x$.

1. Établir, en mécanique newtonienne, l'équation différentielle du mouvement à partir de l'énergie. En déduire l'équation du mouvement, en introduisant la pulsation propre ω_0 , sachant que, pour une vitesse nulle, la valeur maximale de l'élongation est A . Quelle est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de l'oscillateur ?

2. Écrire le théorème de l'énergie en dynamique d'Einstein. En déduire l'expression de la vitesse.

3. On introduit θ tel que $x = A \cos \theta$. Montrer que la période T peut être obtenue à partir de l'intégrale suivante :

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} \frac{1 + 2\alpha \sin^2 \theta}{(1 + 2\alpha \sin^2 \theta)^{1/2}} d\theta$$

α étant un facteur que l'on exprimera en fonction de ω_0 , A et c . Calculer α , pour une énergie newtonienne de l'oscillateur égale à l'énergie de masse de l'oscillateur.

6

Électrodynamique des particules rapides

Cette étude est le prolongement naturel, dans le domaine des grandes vitesses, de celle bien connue en mécanique newtonienne, du mouvement des particules chargées dans un champ électrique et dans un champ magnétique uniformes et stationnaires (cf. *Mécanique*). Elle est indispensable car les vitesses acquises par les particules chargées, dans la plupart des systèmes d'optique corpusculaire (accélérateurs de particules, microscopes électroniques, spectromètres de particules), sont très souvent de l'ordre de c . Même si on se limitait aux champs uniformes et stationnaires, le sujet resterait très vaste.

Nous nous proposons ici de présenter l'étude einsteinienne et de restituer l'approximation newtonienne.

I. — PARTICULE DANS UN CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

I. 1. — Équations du mouvement

Les équations différentielles du mouvement d'une particule, de masse m et de charge q , soumise à l'action d'un champ électromagnétique constant $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ sont obtenues en appliquant la loi fondamentale de la dynamique d'Einstein, dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$. Ce référentiel est galiléen, avec une excellente approximation, puisque, à la fois la pesanteur $m\mathbf{g}$ et la force d'inertie de Coriolis (terrestre) $-2m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$ sont négligeables comparées à la force électrique $q\mathbf{E}$. On a donc, en tenant compte de l'expression de la force de Lorentz (cf. *Électromagnétisme*) :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v} \quad \text{et} \quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

Pour exploiter une telle équation vectorielle, projetons-la dans la base du référentiel $\mathcal{R}$, en choisissant pour la commodité l'axe Oz selon $\mathbf{B}$, O étant le point où se trouve la particule à l'instant initial (Fig. 6.1) ; il est judicieux aussi d'adopter un plan Oxz contenant la vitesse initiale $\mathbf{v}_i$. Il vient :

$$\begin{array}{l|l|l|l} \dot{p}_x & E_x & v_x & 0 \\ \dot{p}_y = q & E_y + q & v_y \times & 0 \\ \dot{p}_z & E_z & v_z & B \end{array} \quad \text{d'où} \quad \begin{array}{l} \dot{p}_x = qE_x + qv_y B \\ \dot{p}_y = qE_y - qv_x B \\ \dot{p}_z = qE_z \end{array}$$

On ne peut exploiter ce système d'équations différentielles qu'en exprimant la vitesse $\mathbf{v}$ en fonction de $\mathbf{p}$, selon :

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}c^2}{\mathcal{E}} = \frac{\mathbf{p}c^2}{(p^2c^2 + m^2c^4)^{1/2}} \quad \text{car} \quad \mathcal{E}^2 - p^2c^2 = m^2c^4$$

Le système d'équations différentielles s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\dot{p}_x &= qE_x + \frac{qp_y Bc}{\mathcal{E}} \\ \dot{p}_y &= qE_y - \frac{qp_x Bc}{\mathcal{E}} \\ \dot{p}_z &= qE_z\end{aligned}$$

En raison de la présence de l'énergie $\mathcal{E}$ qui s'exprime en fonction de p , la résolution des équations différentielles est techniquement plus complexe qu'en mécanique newtonienne. Aussi étudierons-nous principalement les cas où le champ électromagnétique se réduit soit à $\mathbf{E}$ soit à $\mathbf{B}$.

Une fois la quantité de mouvement obtenue, grâce à la prise en compte de sa valeur initiale, on accède à la vitesse $\mathbf{v}$ par la relation $\mathbf{v} = \mathbf{p}c^2/\mathcal{E}$. On en déduit les équations paramétriques de la trajectoire en les intégrant à l'aide des conditions initiales sur la position.

Remarque : La complexité technique du système d'équations différentielles à résoudre peut être contournée par les moyens actuels de calcul numérique, tels qu'on peut aisément se les procurer, par exemple en utilisant le logiciel matlab (cf. annexe 3).

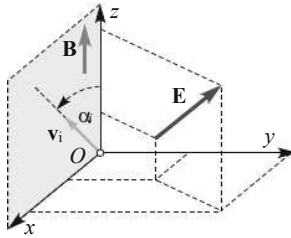


FIG. 6.1.

I. 2. — Aspect énergétique

Le champ électromagnétique étant stationnaire, la force magnétique ne travaille pas, puisque :

$$q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = 0$$

Le travail élémentaire de la force de Lorentz a donc pour expression :

$$\delta W = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dt = -q \mathbf{grad} V \cdot d\mathbf{r} = -d(qV)$$

Il en résulte que la force électrique dérive de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p = qV$, laquelle est définie à une constante additive près, sans intérêt. Il en résulte que l'énergie totale de la particule dans le champ électromagnétique a pour expression :

$$\mathcal{E}_t = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_p = (\gamma - 1)mc^2 + mc^2 + qV \quad \text{ou} \quad \mathcal{E}_t = \gamma mc^2 + qV$$

La relation entre $\mathcal{E}_t$ et la quantité de mouvement $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$ est alors (cf. chapitre 5) :

$$(\mathcal{E}_t - qV)^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$$

II. — PARTICULE DANS UN CHAMP ÉLECTRIQUE CONSTANT

II.1. — Équations différentielles du mouvement

Lorsque le champ électromagnétique se réduit à un champ électrique $\mathbf{E}$ constant, c'est-à-dire stationnaire et uniforme, la loi fondamentale d'Einstein se simplifie selon :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E}$$

Choisissons un référentiel galiléen du laboratoire $\mathcal{R} = Oxyz$, tel que O soit la position initiale de la particule (Fig. 6.2), Ox soit orienté selon $\mathbf{E}$ et Oxy contienne la vitesse initiale $\mathbf{v}_i$ qui fait l'angle α_i avec $\mathbf{E}$. On rend ainsi l'analyse commode sans en restreindre sa généralité. En projetant dans la base de $\mathcal{R}$, on obtient :

$$\begin{array}{|l} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y = q \\ \dot{p}_z \end{array} \begin{array}{|l} E \\ 0 \\ 0 \end{array} \quad \text{d'où} \quad \begin{array}{|l} \dot{p}_x = qE \\ \dot{p}_y = 0 \\ \dot{p}_z = 0 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|l} p_x = qEt + p_{i,x} \\ p_y = \text{Cte} = p_{i,y} \\ p_z = \text{Cte} = p_{i,z} = 0 \end{array}$$

puisque $v_z = 0$. La trajectoire est donc contenue dans le plan Oxy formé par $\mathbf{E}$ et $\mathbf{v}_i$. Quant aux deux autres composantes de la vitesse, elles s'explicitent selon :

$$v_x = \dot{x} = \frac{(qEt + p_{i,x})c^2}{[m^2c^4 + c^2(qEt + p_{i,x})^2 + c^2p_{i,y}^2]^{1/2}} \quad v_y = \dot{y} = \frac{p_{i,y}c^2}{[m^2c^4 + c^2(qEt + p_{i,x})^2 + c^2p_{i,y}^2]^{1/2}}$$

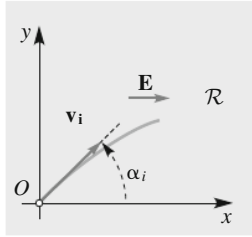


FIG. 6.2.

II.2. — Mouvement rectiligne

Comme en mécanique newtonienne, on obtient un mouvement rectiligne lorsque la vitesse initiale $\mathbf{v}_i$ est nulle ou parallèle au champ $\mathbf{E}$. En effet, dans ce cas, $p_{i,y} = 0$, d'où $p_{i,x} = p_i$. Le mouvement est alors rectiligne suivant la direction de $\mathbf{E}$. On a, en effet, d'après ce qui précède :

$$\dot{x} = \frac{(qEt + p_i)c^2}{[m^2c^4 + (qEt + p_i)^2c^2]^{1/2}} = c \frac{(qEt + p_i)/(mc)}{[1 + (qEt + p_i)^2/(m^2c^2)]^{1/2}} \quad \text{et} \quad \dot{y} = 0$$

Cette dernière équation donne immédiatement : $y = \text{Cte} = 0$. On en déduit x en intégrant. Posant :

$$w = 1 + \frac{(qEt + p_i)^2}{m^2c^2} \quad \text{avec} \quad dw = 2 \frac{(qEt + p_i)qE}{m^2c^2} dt$$

il vient, en substituant :

$$x = \frac{mc^2}{qE} \int \frac{dw}{2w^{1/2}} = \frac{mc^2}{qE} w^{1/2} + \text{Cte} = \frac{mc^2}{qE} \left[1 + \frac{(qEt + p_i)^2}{m^2 c^2} \right]^{1/2} + \text{Cte}$$

Par conséquent, en tenant compte des conditions initiales sur la position ($x = 0$ à $t = 0$), on trouve :

$$x = \frac{mc^2}{qE} \left\{ \left[1 + \frac{(qEt + p_i)^2}{m^2 c^2} \right]^{1/2} - \left[1 + \frac{p_i^2}{m^2 c^2} \right]^{1/2} \right\}$$

II.3. — Particule initialement au repos

a) Variation de la vitesse et de la position au cours du temps

Lorsque la vitesse initiale est nulle, on a, puisque $p_i = 0$:

$$\dot{x} = \frac{qEtc^2}{(m^2 c^4 + q^2 E^2 t^2)^{1/2}} = \frac{a_N t}{(1 + a_N^2 t^2 / c^2)^{1/2}} \quad \text{où} \quad a_N = \frac{qE}{m}$$

est l'accélération newtonienne bien connue. L'intégration donne :

$$x = \int \frac{a_N t dt}{(1 + a_N^2 t^2 / c^2)^{1/2}} = \frac{c^2}{a_N} \left(1 + \frac{a_N^2 t^2}{c^2} \right)^{1/2} + \text{Cte}$$

Si on tient compte de la position initiale de la particule, on trouve :

$$x = ct_l \left[\left(1 + \frac{t^2}{t_l^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \quad \text{où} \quad t_l = \frac{c}{a_N}$$

est une durée caractéristique du mouvement. Les graphes de $\dot{x}(t)$ et $x(t)$ sont représentés sur la figure 6.3. En pointillés, sont rappelés les deux courbes newtoniennes bien connues :

$$\dot{x} = a_N t \quad \text{et} \quad x = \frac{a_N t^2}{2}$$

Ainsi, en relativité, le graphe de $x(t)$ n'est pas une parabole, mais une *branche d'hyperbole*, d'équation cartésienne :

$$\left(\frac{x + ct_l}{ct_l} \right)^2 - \left(\frac{t}{t_l} \right)^2 = 1$$

Cette hyperbole admet l'axe Ox comme axe de symétrie et la droite $x = c(t - t_l)$ comme asymptote oblique. En effet, pour x et t tendant vers l'infini, on constate que x tend vers ct de telle sorte que :

$$x - ct = ct_l \left[\left(1 + \frac{t^2}{t_l^2} \right)^{1/2} - 1 \right] - ct = ct \left[\left(1 + \frac{t_l^2}{t^2} \right)^{1/2} - \frac{t_l}{t} \right] - ct \approx -ct_l = -\frac{c^2}{a_N}$$

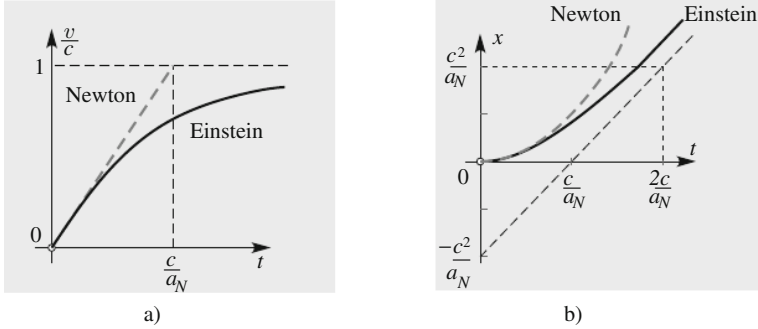


FIG. 6.3.

b) Durée nécessaire pour parcourir une distance déterminée

Désignons par T la durée, mesurée dans $\mathcal{R}$, qui est nécessaire pour que la particule, initialement au repos, parcoure une distance D , sous l'action du champ $\mathbf{E}$. Il vient, d'après l'expression de $x(t)$:

$$D = ct_l \left[\left(1 + \frac{T^2}{t_l^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \quad \text{d'où} \quad T = \left(\frac{D^2}{c^2} + \frac{2D}{c} t_l \right)^{1/2} = \left(\frac{D^2}{c^2} + \frac{2D}{a_N} \right)^{1/2}$$

En mécanique newtonienne, on aurait trouvé l'expression :

$$T_N = \left(\frac{2D}{a_N} \right)^{1/2} < T$$

Calculons la durée propre T_p correspondante, évidemment plus faible que T , en raison de la dilatation des durées. On l'obtient en sommant les durées propres élémentaires mesurées successivement dans un référentiel lié à la particule ; lorsque la vitesse est $\mathbf{v}$, la durée propre élémentaire est celle mesurée dans le référentiel $\mathcal{R}_t$ qui, à l'instant considéré, a même vitesse que la particule. On a donc :

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} \quad \text{avec} \quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} = \left(1 - \frac{t^2/t_l^2}{1 + t^2/t_l^2} \right)^{-1/2} = \left(1 + \frac{t^2}{t_l^2} \right)^{1/2}$$

ce qui donne, en intégrant :

$$T_p = \int d\tau = t_l \int_0^T \frac{dt/t_l}{(1 + t^2/t_l^2)^{1/2}} \quad \text{soit} \quad T_p = t_l \operatorname{argsinh} \left(\frac{T}{t_l} \right) \quad \text{avec} \quad t_l = \frac{c^2}{a_N}$$

On retrouve l'universalité newtonienne du temps en faisant t_l grand devant T ou T_p : $T_p \approx t_l \times T/t_l = T$.

Remarque : Ce résultat est analogue à celui relatif au mouvement relativiste d'une fusée d'accélération constante, mesurée par l'astronaute (cf. chapitre 4).

II. 4. — Mouvement curviligne transversal

Le mouvement de la particule est curviligne transversal, lorsque la vitesse initiale $\mathbf{v}_i$ est perpendiculaire au champ $\mathbf{E}$. C'est le cas d'une particule lancée entre les armatures d'un condensateur plan, normalement à la direction du champ électrique : $p_{0x} = 0$ et $p_{0y} = p_i$ (Fig. 6.4).

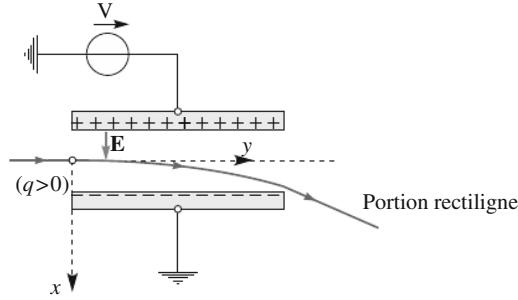


FIG. 6.4.

a) Nature de la trajectoire

Les équations différentielles du mouvement donnent, d'après ce qui précède :

$$p_x = qEt \quad p_y = \text{Cte} = p_i \quad p_z = \text{Cte} = p_{0z} = 0$$

d'où :

$$\dot{x} = \frac{qEt c^2}{[(qEt c)^2 + p_i^2 c^2 + m^2 c^4]^{1/2}} \quad \text{et} \quad \dot{y} = \frac{p_i c^2}{[(qEt c)^2 + p_i^2 c^2 + m^2 c^4]^{1/2}}$$

Ces expressions des composantes de la vitesse s'écrivent aussi :

$$\dot{x} = c \frac{t/\tau}{(1 + t^2/\tau^2)^{1/2}} \quad \text{et} \quad \dot{y} = c \frac{p_i c / \mathcal{E}_i}{(1 + t^2/\tau^2)^{1/2}}$$

en introduisant l'énergie initiale $\mathcal{E}_i$ et une durée caractéristique τ :

$$\mathcal{E}_i = (p_i^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2} \quad \tau = \frac{\mathcal{E}_i}{qEc}$$

Il vient :

$$x = c\tau \int \frac{t/\tau}{(1 + t^2/\tau^2)^{1/2}} d\left(\frac{t}{\tau}\right) = c\tau \int \frac{dw}{w^{1/2}} \quad \text{en posant} \quad w = 1 + \left(\frac{t}{\tau}\right)^2$$

Ainsi, puisque $x = 0$ à $t = 0$:

$$x = c\tau w^{1/2} + \text{Cte} = c\tau \left(1 + \frac{t^2}{\tau^2}\right)^{1/2} + \text{Cte} \quad \text{soit} \quad x = c\tau \left[\left(1 + \frac{t^2}{\tau^2}\right)^{1/2} - 1 \right]$$

Quant à la seconde équation, on l'intègre selon :

$$y = c\tau \frac{p_i c}{\mathcal{E}_i} \int \frac{1}{(1 + t^2/\tau^2)^{1/2}} d\left(\frac{t}{\tau}\right) = \left(\frac{p_i c}{qE}\right) \arg \sinh \left(\frac{t}{\tau}\right) + \text{Cte}$$

Compte tenu des conditions initiales ($y = 0$ à $t = 0$), il vient :

$$y = \frac{p_i c}{qE} \arg \sinh \left(\frac{t}{\tau}\right)$$

L'équation cartésienne de la trajectoire s'obtient en éliminant le temps t . Comme :

$$\frac{x}{c\tau} + 1 = \left(1 + \frac{t^2}{t_p^2}\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \frac{t}{\tau} = \sinh\left(\frac{qEy}{p_i c}\right)$$

on trouve :

$$\frac{x}{c\tau} + 1 = \cosh\left(\frac{qEy}{p_i c}\right)$$

soit, en remplaçant τ par son expression :

$$x = \frac{\mathcal{E}_i}{qE} \left[\cosh\left(\frac{qEy}{p_i c}\right) - 1 \right]$$

La trajectoire est donc une *chaînette* et non une parabole comme en mécanique newtonienne (Fig. 6.4).

Ordre de grandeur : calculons la durée caractéristique τ pour un électron, soumis à l'action d'un champ électrique, avec $\mathcal{E}_i = 1 \text{ MeV}$ et $E = 10^9 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. On trouve :

$$c\tau = \frac{\mathcal{E}_i}{qE} = \frac{\mathcal{E}_i}{eE} = \frac{1 \times 10^6}{10^9} = 1 \text{ mm} \quad \text{d'où} \quad \tau \approx 3,3 \text{ ps}$$

b) Approximation newtonienne

On retrouve la parabole newtonienne bien connue, à l'aide d'un développement limité selon la variable $qEy/(p_i c)$:

$$\cosh\left(\frac{qEy}{p_i c}\right) \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{qEy}{p_i c}\right)^2 + \dots$$

La formule générale précédente se réduit donc à :

$$x \approx \frac{c\tau}{2} \left(\frac{qEy}{p_i c}\right)^2 \quad \text{soit} \quad x \approx \left(\frac{qE}{2mv_i^2}\right) y^2$$

puisque $\mathcal{E}_i \approx mc^2$ et $p_i = mv_i$.

Quant aux expressions de $\dot{x}$, $\dot{y}$, x et y , on les obtient en faisant $t \ll \tau$:

$$\dot{x} = c \frac{t/\tau}{(1 + t^2/\tau^2)^{1/2}} \approx c \frac{t}{\tau} = \frac{qEtc}{\mathcal{E}_i} \approx \frac{qE}{m} t \quad \dot{y} = c \frac{p_i c / \mathcal{E}_i}{(1 + t^2/\tau^2)^{1/2}} \approx \frac{p_i c^2}{\mathcal{E}_i} = v_i$$

puis

$$x = c\tau \left[\left(1 + \frac{t^2}{\tau^2}\right)^{1/2} - 1 \right] \approx c \frac{t^2}{2\tau} \approx \frac{qE}{2m} t^2 \quad \text{et} \quad y = \left(\frac{p_i c}{qE}\right) \arg \sinh\left(\frac{t}{\tau}\right) \approx \frac{p_i c}{qE} \left(\frac{t}{\tau}\right) = v_i t$$

III. — PARTICULE DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE CONSTANT

Lorsqu'un champ magnétique agit seul sur une particule, de masse m et de charge q , la loi fondamentale de la dynamique, en relativité, s'écrit, puisque le poids est négligeable :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

III. 1. — Équations différentielles du mouvement

Comme la force magnétique ne travaille pas, l'énergie cinétique de la particule est constante. Par conséquent :

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \text{Cte} \quad \text{d'où} \quad v = \text{Cte}$$

L'équation du mouvement se simplifie alors selon :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \omega_c \left(\mathbf{v} \times \frac{\mathbf{B}}{B} \right) \quad \text{où} \quad \omega_c = \frac{qB}{\gamma m}$$

est la *pulsation cyclotron*. Le résultat est analogue à celui connu en mécanique newtonienne (cf. *Mécanique*). Cependant, ici, la pulsation cyclotron dépend de la vitesse de la particule par l'intermédiaire du facteur relativiste γ . Notons que la pulsation cyclotron, ainsi définie, est une quantité algébrique qui a le signe de la charge électrique.

La composante $v_{//}$ de la vitesse, suivant le champ magnétique uniforme et stationnaire, est aussi une constante. En effet, en multipliant scalairement les deux membres de l'équation vectorielle précédente par $\mathbf{B}$, il vient :

$$\frac{d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{B} = \omega_c \left(\mathbf{v} \times \frac{\mathbf{B}}{B} \right) \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{d'où} \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} = v_{//}B = \text{Cte} \quad \text{et} \quad v_{//} = \text{Cte}$$

Ainsi, le vecteur vitesse d'une particule plongée dans un champ magnétique stationnaire évolue de telle sorte que sa norme et sa composante selon la direction de ce champ soient des constantes. Ce vecteur précessionne donc autour de $\mathbf{B}$; sa composante orthogonale au champ, $\mathbf{v}_{\perp}$, de norme constante aussi, tourne uniformément autour de $\mathbf{B}$ (Fig. 6.5).

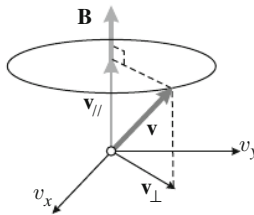


FIG. 6.5.

Il est alors instructif de réécrire l'équation vectorielle précédente en mettant le vecteur vitesse sous la forme $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{//} + \mathbf{v}_{\perp}$, $\mathbf{v}_{//}$ étant la contribution de la vitesse parallèle à $\mathbf{B}$ et $\mathbf{v}_{\perp}$ celle qui est perpendiculaire à $\mathbf{B}$. Il vient, puisque $\mathbf{v}_{//} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$:

$$\frac{d(\mathbf{v}_{//} + \mathbf{v}_{\perp})}{dt} = \omega_c \left(\mathbf{v}_{\perp} \times \frac{\mathbf{B}}{B} \right)$$

Comme la force magnétique est perpendiculaire au champ, on en déduit les deux équations vectorielles suivantes :

$$\frac{d\mathbf{v}_{//}}{dt} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = \omega_c \left(\mathbf{v}_{\perp} \times \frac{\mathbf{B}}{B} \right)$$

On en déduit que le mouvement selon la direction du champ est uniforme ($\mathbf{v}_{//} = \text{Cte}$), et que le mouvement dans un plan perpendiculaire est circulaire uniforme. En effet, comme $v_{\perp} = \text{Cte}$, la seconde équation donne, selon la normale à la trajectoire :

$$\frac{v_{\perp}^2}{R} = \omega_c v_{\perp} \quad \text{soit} \quad \frac{v_{\perp}}{R} = \omega_c$$

$\bar{R}$ étant le rayon de courbure, exprimé ici algébriquement en raison du signe positif ou négatif de ω_c .

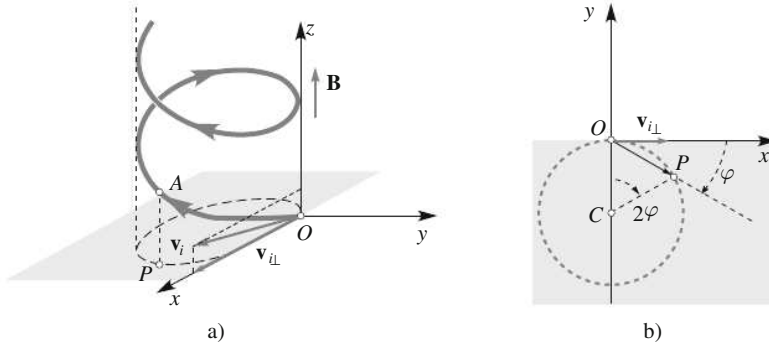


FIG. 6.6.

III. 2. — Équations paramétriques

On peut retrouver les résultats précédents en explicitant de façon habituelle l'équation vectorielle du mouvement dans la base d'un référentiel $Oxyz$, choisi de telle sorte que O coïncide avec la position de la particule à l'instant origine, Oz soit orienté comme $\mathbf{B}$ et Oxz soit le plan défini par $\mathbf{B}$ et la vitesse initiale $\mathbf{v}_i$ (Fig. 6.6a). Il vient :

$$\begin{cases} \ddot{x} \\ \ddot{y} = \omega_c \dot{y} \times \\ \ddot{z} \end{cases} \begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y} \times \\ \dot{z} \end{cases} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 1 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \ddot{x} = \omega_c \dot{y} & (1) \\ \ddot{y} = -\omega_c \dot{x} & (2) \\ \ddot{z} = 0 & (3) \end{cases}$$

Suivant z , le mouvement est rectiligne uniforme, comme on pouvait s'y attendre, puisque la force magnétique dans cette direction est nulle :

$$\dot{z} = \text{Cte} = v_i \cos \alpha_i = v_{//} \quad \text{et} \quad z = v_{//} t$$

Intégrons l'équation (2) et injectons-la dans l'équation (1). Il vient, en tenant compte des conditions initiales, $\dot{y} = 0$ lorsque $x = 0$:

$$\dot{y} = -\omega_c x + \text{Cte} = -\omega_c x \quad \text{et} \quad \ddot{x} = \omega_c \dot{y} = -\omega_c^2 x$$

Il en résulte que x se met sous la forme $x = A \cos(\omega_c t + \varphi)$ et $\dot{x} = -A\omega_c \sin(\omega_c t + \varphi)$. Comme, à $t = 0$, $x = 0$ et $\dot{x} = v_i \sin \alpha_i$, on trouve :

$$0 = A \cos \varphi \quad \text{et} \quad v_i \sin \alpha_i = -A\omega_c \sin \varphi$$

d'où $\varphi = \pi/2$ et $A = -v_i \sin \alpha_i / \omega_c$. Ainsi :

$$x = -\frac{v_i \sin \alpha_i}{\omega_c} \cos \left(\omega_c t + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{v_i \sin \alpha_i}{\omega_c} \sin(\omega_c t)$$

On en déduit :

$$\dot{y} = \omega_c^2 x = -v_i \sin \alpha_i \sin(\omega_c t) \quad \text{et} \quad y = -\frac{v_i \sin \alpha_i}{\omega_c} [1 - \cos(\omega_c t)]$$

en prenant en compte la condition initiale $y = 0$ à $t = 0$. Finalement :

$$x = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \quad \text{et} \quad y = -\frac{v_{\perp}}{\omega_c} [1 - \cos(\omega_c t)]$$

Remarque : On pourrait résoudre les équations différentielles en x et y par la méthode complexe qui consiste à introduire le nombre complexe $\zeta = x + iy$ avec $i^2 = -1$. En multipliant (2) par i et en l'ajoutant à (1), on obtient :

$$\ddot{x} + i\ddot{y} = \omega_c(\dot{y} - i\dot{x}) = -i\omega_c(\dot{x} + i\dot{y}) \quad \text{d'où} \quad \ddot{\zeta} = -i\omega_c \dot{\zeta}$$

La recherche de solutions de $\dot{\zeta}$ en $\exp(rt)$ conduit à l'équation caractéristique :

$$r^2 + i\omega_c r = 0 \quad \text{soit} \quad r = -i\omega_c$$

Par conséquent :

$$\dot{\zeta} = \text{Cte} \exp(-i\omega_c t) = v_i \sin \alpha_i \exp(-i\omega_c t) = v_{\perp} \exp(-i\omega_c t)$$

et

$$\zeta = \frac{v_{\perp}}{-i\omega_c} \exp(-i\omega_c t) + \text{Cte} = \frac{v_{\perp}}{i\omega_c} [1 - \exp(-i\omega_c t)]$$

en tenant en compte des conditions initiales. La séparation des parties réelle et imaginaire restitue bien les résultats précédents.

III.3. — Trajectoire

En éliminant le temps t entre les équations paramétriques $x(t)$ et $y(t)$, on obtient la trajectoire de la projection P de A dans le plan perpendiculaire au champ $\mathbf{B}$. Comme :

$$x^2 + (y + \bar{R})^2 = \bar{R}^2 \quad \text{avec} \quad \bar{R} = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} = \frac{\gamma m v_i \sin \alpha_i}{qB} = \frac{p_{\perp}}{qB}$$

la trajectoire de P est un cercle dont le centre C a pour coordonnées $(0, -\bar{R})$ (Fig. 6.6b). Notons que le rayon $\bar{R}$ est une quantité algébrique dont le signe donne le sens de description du cercle.

Dans l'espace, la trajectoire est donc une *hélice circulaire* de pas :

$$L = v_{\parallel} \frac{2\pi}{\omega_c} = \gamma v_i \cos \alpha_i \frac{2\pi m}{qB} \quad \text{soit} \quad L = 2\pi \frac{p_{\parallel}}{qB}$$

$p_{\parallel}$ étant la quantité de mouvement de la particule suivant le champ magnétique $\mathbf{B}$.

On peut voir sur la figure 6.6b que la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ associée à l'angle polaire $\varphi = (Ox, \mathbf{OP})$ est $\omega_c/2$. On l'appelle la *pulsation de Larmor*.

La relation donnant le rayon de courbure est souvent écrite autrement en introduisant la *rigidité magnétique* $B\bar{R}$:

$$B\bar{R} = \frac{p_{\perp}}{q}$$

Pour un même type de particule, de vitesse déterminée, la rigidité est constante ; le rayon de courbure varie alors en sens inverse du champ magnétique.

IV. — EXEMPLES D'ACCÉLÉRATEURS DE PARTICULES

IV.1. — Accélérateur à champ électrique uniforme

Dans l'accélérateur linéaire du « Stanford Laboratory Accelerator Center (SLAC) », à San Francisco, en Californie, des électrons au repos acquièrent une énergie cinétique finale de 50 GeV, après un parcours rectiligne de 3 km. On peut considérer que l'énergie cinétique $\mathcal{E}_k$ est proportionnelle à la distance parcourue x : $\mathcal{E}_k = K_f x$. Cela implique, d'après le théorème de l'énergie, $d\mathcal{E}_k/dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$, que la force qui s'exerce sur les électrons est constante :

$$d\mathcal{E}_k/dt = K_f \dot{x} = F \dot{x} \quad \text{d'où} \quad K_f = F$$

La relation entre la vitesse v et la position x s'en déduit selon :

$$(\gamma - 1)m_e c^2 = K_f x \quad \text{d'où} \quad \gamma = 1 + \frac{K_f x}{m_e c^2}$$

et :

$$v = c \left[1 - \frac{m_e^2 c^4}{(m_e c^2 + K_f x)^2} \right]^{1/2} = c \frac{[K_f x (2m_e c^2 + K_f x)]^{1/2}}{m_e c^2 + K_f x}$$

Pour $x = 3 \text{ km}$, $K_f x = 50 \text{ GeV} \gg m_e c^2$. Par conséquent :

$$v = c \frac{[1 + 2m_e c^2 / K_f x]^{1/2}}{1 + m_e c^2 / (K_f x)} \approx c \left(1 - \frac{m_e^2 c^4}{2K_f^2 x^2} \right)$$

Donc :

$$\frac{c - v}{c} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{m_e c^2}{K_f x} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{0,511}{42 \times 10^3} \right)^2 = 0,52 \times 10^{-10} \quad (!)$$

IV.2. — Accélérateurs à champs électrique et magnétique

Les accélérateurs de particules à champ électrique sont nécessairement encombrants et limités en tension. Aussi préfère-t-on les remplacer par des accélérateurs dans lesquels un champ magnétique impose aux particules de passer périodiquement dans une région localisée où un champ électrique, variable dans le temps, les accélère. Le premier de ces accélérateurs est le cyclotron à protons construit par l'américain E. Lawrence en 1932.

a) Cyclotron

Le cyclotron est constitué de deux électrodes cylindriques creuses ayant chacune la forme de la lettre D, d'où le nom anglais *dees*. L'ensemble est placé entre les pôles d'un électro-aimant qui crée un champ magnétique, uniforme et stationnaire, perpendiculaire au plan médian du système (Fig. 6.7a). La trajectoire est donc constituée d'une succession de demi-cercles séparés par la zone d'action d'un champ électrique. Chaque fois que la particule passe dans cette zone étroite, elle doit être accélérée. Par conséquent le champ sinusoïdal, de fréquence f , doit changer de sens à chaque demi-révolution, ce que l'on traduit par l'égalité des fréquences :

$$f = \frac{|\omega_c|}{2\pi} = \frac{|q|B}{2\pi\gamma m}$$

Notons qu'en relativité, la relation de synchronisation est difficile à réaliser puisque f doit varier avec la vitesse.

L'inconvénient majeur du cyclotron est la nécessité d'assurer l'uniformité du champ magnétique sur une zone de grande dimension (Fig. 6.7b). Aussi pendant longtemps s'est-on limité à de petits cyclotrons et à des particules lourdes telles que des protons.

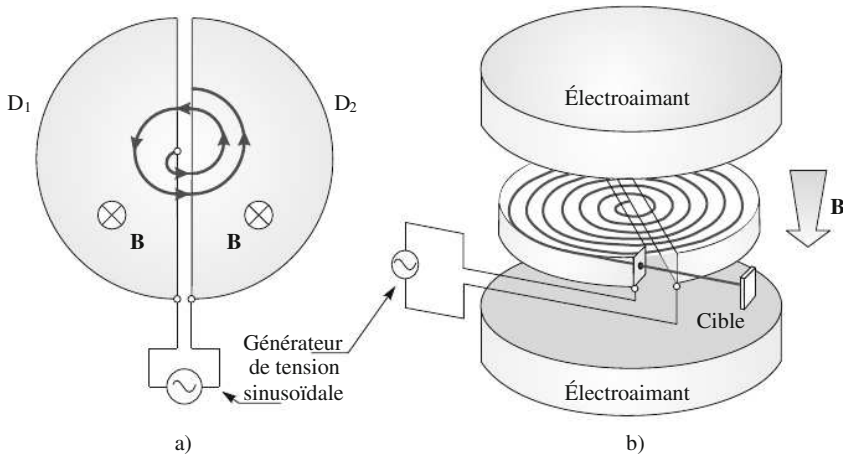


FIG. 6.7.

Dans un cyclotron, de 1 m de diamètre et de 1,5 T de champ magnétique, l'énergie cinétique des protons peut atteindre 20 MeV. Cette limite a été franchie avec les synchro-cyclotrons dans lesquels la fréquence du champ électrique diminue lorsque la vitesse augmente. Ainsi, on a atteint avec des protons une énergie cinétique de 700 MeV. Cette énergie nécessite une grande valeur de la rigidité magnétique très difficile à réaliser puisque le champ magnétique uniforme doit couvrir les deux D.

b) Synchrotron

Cet accélérateur est constitué d'une enceinte torique de très faible section, vidée d'air, le long de laquelle une série d'aimants, disposés en anneau, pas tous représentés sur la figure 6.8a, assure le guidage circulaire (Fig. 6.8a). L'augmentation de la vitesse est obtenue par des champs électriques variables qui accélèrent les particules à chaque passage (Fig. 6.8b).

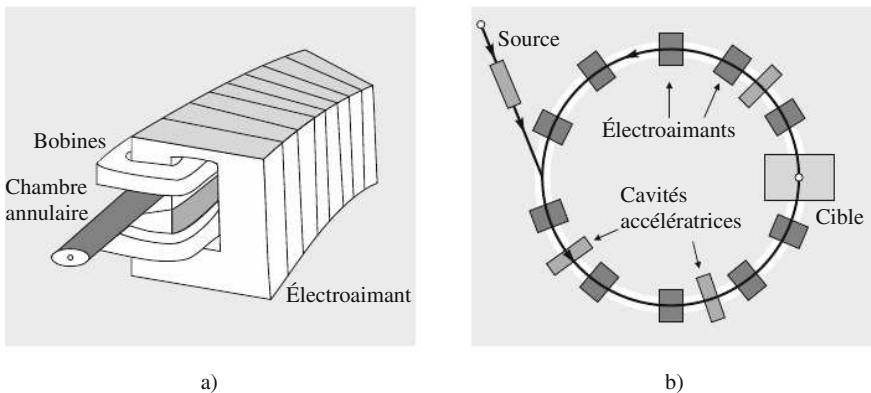


FIG. 6.8.

Lorsque la vitesse augmente, on modifie le champ magnétique afin que $R = |\vec{R}|$ reste inchangé, conformément à la relation suivante :

$$B = \frac{\gamma m v}{|qR|} = \frac{mc}{|qR|} (\gamma^2 - 1)^{1/2}$$

Comme la fréquence f du champ électrique accélérateur dépend directement de la vitesse, on fait varier f de telle sorte que la relation $f = v/(2\pi R)$ soit satisfaite.

Afin d'atteindre des vitesses très proches de c et donc des énergies très grandes, on augmente la rigidité magnétique $B\bar{R}$. En effet :

$$B\bar{R} = \frac{mc}{q}(\gamma^2 - 1)^{1/2} \quad \text{d'où} \quad \mathcal{E} = \gamma mc^2 = mc^2 \left[1 + \left(\frac{qB\bar{R}}{mc} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Ainsi, puisque les champ magnétiques sont localisés le long de la trajectoire circulaire, on peut techniquement donner à R des valeurs de l'ordre du km. Les limites sont alors d'ordre financier.

V. — SPECTROMÉTRIE CORPUSCULAIRE

V.1. — Indice en optique corpusculaire

L'analogie entre la mécanique du point et l'optique des milieux non homogènes est connue depuis les travaux d'Hamilton et de De Broglie. Elle s'appuie sur la loi fondamentale de la dynamique d'Einstein :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad \text{qui s'écrit aussi} \quad \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \mathbf{F} \frac{dt}{ds}$$

et sur l'équation de la trajectoire d'un rayon lumineux :

$$\frac{d}{ds}(n \mathbf{e}_t) = \mathbf{grad} n$$

s étant l'abscisse curviligne, n l'indice et $\mathbf{e}_t$ le vecteur unitaire tangent au rayon lumineux (cf. *Optique*).

Ainsi, en optique corpusculaire, l'indice n est proportionnel à la norme p de la quantité de mouvement, soit :

$$p = \frac{1}{c} [(\mathcal{E}_t - qV)^2 - m^2 c^4]^{1/2}$$

$\mathcal{E}_t$ étant l'énergie totale (cf. chapitre 5). On le définit par le rapport des quantités de mouvement en présence et en l'absence de potentiel V :

$$n = \left[\frac{(\mathcal{E}_t - qV)^2 - m^2 c^4}{\mathcal{E}_t^2 - m^2 c^4} \right]^{1/2}$$

Dans l'approximation newtonienne, pour laquelle $\mathcal{E}_t \approx mc^2 \gg |qV|$, il vient :

$$n = \left[1 - \frac{qV(2\mathcal{E}_t - qV)}{\mathcal{E}_t^2 - m^2 c^4} \right]^{1/2} \approx \left(1 - \frac{qV}{\mathcal{E}_t - mc^2} \right)^{1/2} = \left(1 - \frac{qV}{\mathcal{E}_k + qV} \right)^{1/2}$$

V.2. — Déviation électrique

Considérons le mouvement d'une charge électrique dans un champ électrique uniforme et stationnaire, perpendiculaire à sa vitesse initiale, ce que l'on réalise par exemple dans un condensateur

(Fig 6.4). Désignons par θ l'angle que fait la vitesse, à un instant t , avec la vitesse initiale : $\theta = (\mathbf{v}_i, \mathbf{v})$. D'après les expressions de $\dot{x}$ et $\dot{y}$ (II.4), il vient, l'angle θ étant algébrique :

$$\tan \theta = -\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = -\frac{t/\tau}{p_i c / \mathcal{E}_i} = -\frac{qEt}{p_i}$$

ou bien :

$$\tan \theta = -\frac{dx}{dy} = -\left(\frac{\mathcal{E}_i}{qE}\right) \left(\frac{qE}{p_i c}\right) \sinh\left(\frac{qEy}{p_i c}\right) = -\frac{\mathcal{E}_i}{p_i c} \sinh\left(\frac{qEy}{p_i c}\right) = -\frac{c}{v_i} \sinh\left(\frac{qEy}{p_i c}\right)$$

À la sortie du condensateur ($y = L$), on a donc :

$$\tan \theta_s = -\frac{c}{v_i} \sinh\left(\frac{qEL}{p_i c}\right)$$

On retrouve alors aisément l'approximation newtonienne, en faisant $qEL \ll p_i c$ et $p_i = m_i v_i$:

$$\tan \theta_s \approx -\frac{c}{v_i} \left(\frac{qEL}{p_i c}\right) \quad \text{soit} \quad \tan \theta_s \approx -\frac{qEL}{mv_i^2}$$

V.3. — Déviation magnétique

On utilise très souvent un champ magnétique pour dévier les trajectoires des particules chargées rapides. Dans la région où règne un champ magnétique constant $\mathbf{B}$, la trajectoire est un cercle si la vitesse initiale des particules est normale au champ.

a) Expression de l'angle de déviation

L'angle de déviation θ_s est directement lié à la longueur de la trajectoire L et au rayon R :

$$\theta_s = \frac{L}{R} = \frac{LqB}{\gamma_i m v_i} = \frac{LqB}{(\gamma_i^2 - 1)^{1/2} mc}$$

Ce mode de déviation est très utilisé en spectrométrie corpusculaire magnétique (Fig. 6.9) ; les trajectoires des particules sont différemment déviées selon leur énergie, ce qui permet d'exhiber spatialement le spectre énergétique du faisceau incident à la sortie ; les particules de plus faible énergie ont leurs trajectoires davantage déviées.

Exemple : Pour des électrons accélérés sous une tension de 1 MV et dont la trajectoire est déviée suivant un cercle de rayon 20 cm, le champ magnétique nécessaire est de 23,7 mT.

Lorsque θ_s est faible, la déviation X , dans un plan situé à une distance D du plan de sortie, vaut approximativement :

$$X \approx D \theta_s = D \frac{LqB}{\gamma_i m v_i}$$

Comme en mécanique newtonienne, l'efficacité d'un champ magnétique, pour dévier la trajectoire d'une particule chargée, est bien plus grande que celle d'un champ électrique. Par exemple, dans les conditions d'une faible déviation, les champs électrique et magnétique nécessaires sont respectivement, d'après ce qui précède :

$$E = \left(\frac{p_i c}{qL}\right) \operatorname{argsinh}\left(\frac{v_i \theta_s}{c}\right) \approx \frac{v_i p_i \theta_s}{qL} \quad \text{et} \quad B = \frac{p_i \theta_s}{qL}$$

Il en résulte que $E = B v_i$. Si la vitesse des particules est de l'ordre de c , un champ magnétique de 10 mT, aisément réalisable, est aussi efficace qu'un champ électrique de $3 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$!

Remarque : On aura probablement noté que, dans le cas électrique, la longueur L représente la dimension de la zone d'action de $\mathbf{E}$, alors que, dans le cas magnétique, cette longueur désigne la longueur de l'arc de la trajectoire à l'intérieur de la zone d'action. Évidemment, pour les faibles déviations, cette distinction n'est pas significative.

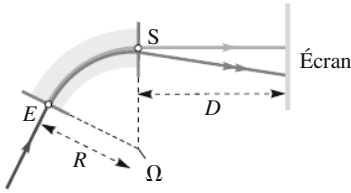


FIG. 6.9.

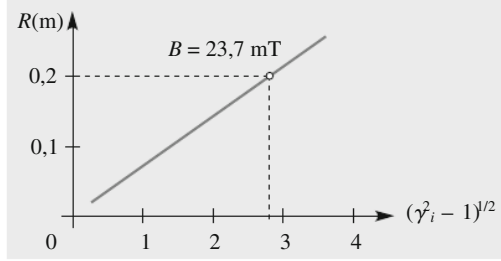


FIG. 6.10.

b) Application à la mesure de la quantité de mouvement d'une particule

La proportionnalité entre la quantité de mouvement p d'une particule et le rayon de courbure R de sa trajectoire, dans un champ magnétique transversal, est utilisée pour déterminer leurs quantités de mouvement. Les trajectoires, visualisées dans les chambres à bulles d'hydrogène (cf. chapitre 8), sont incurvées par un puissant champ magnétique (environ 1 T), ce qui permet de comparer leurs rayons de courbure et par conséquent leurs quantités de mouvement. On a, en effet :

$$B = \frac{p_1}{q_1 R_1} = \frac{p_2}{q_2 R_2} = \frac{p_3}{q_3 R_3}$$

pour diverses particules chargées A_1, A_2, A_3 .

Sur la figure 6.10, on a tracé, comme l'a fait pour la première fois W. Kaufmann en 1901, quatre ans avant la publication d'Einstein (!), la droite donnant le rayon R de la trajectoire circulaire en fonction du produit $\gamma_i \beta_i = (\gamma_i^2 - 1)^{1/2}$ pour des électrons dans un spectromètre magnétique. On a :

$$BR = \frac{p_{\perp}}{e} = \frac{(\gamma_i^2 - 1)^{1/2} m_e c}{e} \quad \text{soit} \quad B(\text{ mT})R(\text{ m}) = 1,704(\gamma_i^2 - 1)^{1/2}$$

V. 4. — Propriétés focalisantes des champs électrique et magnétique

a) Focalisation par un champ électrique

Une source, située en un point O , émet des électrons avec une vitesse faisant, avec l'axe Ox , un angle $\alpha = \alpha_i + \varepsilon$, tel que $\varepsilon \ll \alpha_i$ (Fig. 6.11). Si le champ $\mathbf{E}$ est orienté suivant l'axe Ox , les électrons sont ramenés sur l'axe Oy .

On montre que les coordonnées x et y de la particule varient au cours du temps selon (cf. Exercices) :

$$x(t) = \frac{1}{eE} \left\{ \left[m_e^2 c^4 + p_{i,y}^2 c^2 + (eEt + p_{i,x})^2 c^2 \right]^{1/2} - (m_e^2 c^4 + p_i^2 c^2)^{1/2} \right\}$$

et :

$$y(t) = \frac{2p_{i,y}c}{eE} \left\{ \operatorname{argsinh} \left[\frac{(eEt + p_{i,x}c)^2}{m_e^2 c^2 + p_{i,y}^2} \right]^{1/2} - \operatorname{argsinh} \left[\frac{p_{i,x}}{m_e^2 c^2 + p_{i,y}^2} \right]^{1/2} \right\}$$

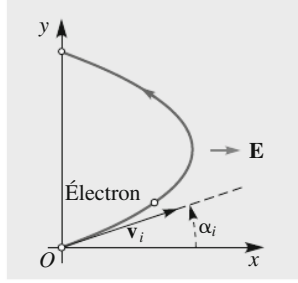


FIG. 6.11.

Cherchons le point d'intersection F de la trajectoire avec l'axe Oy :

$$x = 0 \quad \text{si} \quad (eEt)^2 + 2eEp_{i,x}t = 0 \quad \text{soit pour} \quad t = 0 \quad \text{ou} \quad t = -\frac{2p_{i,x}}{eE}$$

Par conséquent :

$$y_F = \left(\frac{2p_{i,y}c}{eE} \right) \operatorname{argsinh} \left[\frac{p_{i,x}}{(m_e^2 c^2 + p_{i,y}^2)^{1/2}} \right] = \frac{2p_{i,y}c \sin \alpha_i}{eE} \operatorname{argsinh} \left[\frac{p_i \cos \alpha_i}{(m_e^2 c^2 + p_i^2 \sin^2 \alpha_i)^{1/2}} \right]$$

On retrouve le résultat newtonien en faisant tendre c vers l'infini. En effet :

$$y_F \approx \frac{2p_i c \sin \alpha_i}{eE} \times \frac{p_i \cos \alpha_i}{mc} = \frac{mv_i^2}{eE} \sin(2\alpha_i)$$

En annulant la dérivée de y_F par rapport à α_i , on obtient la valeur $\tilde{\alpha}_i$ de α_i qui réalise la condition de focalisation $y_F = \tilde{y}_F$, au deuxième ordre près, $\tilde{y}_F$ étant l'ordonnée du point de focalisation.

b) Focalisation radiale par un champ magnétique

Une fente source émet des particules identiques dont les vecteurs vitesses initiales font entre eux un petit angle ϵ autour d'une direction moyenne Ox (Fig. 6.12). Le point d'intersection F , avec l'axe Oy , de la trajectoire circulaire, contenue dans le plan Oxy normal à $\mathbf{B}$ et tangente à la vitesse initiale, a pour coordonnées $y_F = 2R \cos \epsilon$.

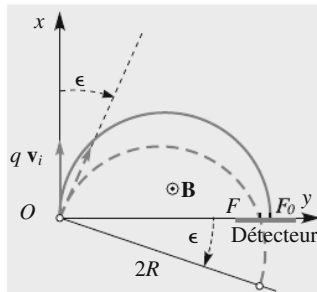


FIG. 6.12.

Pour $\varepsilon = 0$, F est en F_0 et $y_F = 2R$. Ainsi la distance F_0F vaut :

$$F_0F = 2R(1 - \cos \epsilon) \approx R\epsilon^2 \quad \text{soit} \quad F_0F \approx 0$$

au deuxième ordre en ε près. On peut donc dire que F_0 est l'image de la source O au sens de l'optique géométrique (cf. *Optique*). Cette propriété est utilisée dans les spectromètres corpusculaires de type magnétique.

c) Focalisation axiale par un champ magnétique

Lorsqu'un faisceau de particules, légèrement ouvert, est émis dans la direction d'un champ magnétique, les trajectoires sont des hélices axées sur $\mathbf{B}$, dont le pas dépend de α_i (Fig. 6.6) :

$$L = \frac{2\pi\gamma_i m v_i \cos \alpha_i}{qB}$$

Comme α_i varie légèrement de $\Delta\alpha_i$ autour d'une valeur *nulle*, le pas ne varie pas à l'ordre 1 :

$$\Delta L = -\frac{2\pi\gamma_i m v_i \sin \alpha_i \Delta\alpha_i}{qB} = 0$$

Il en résulte une focalisation axiale du faisceau de particules aux points d'abscisses $n2\pi\gamma_i m v_i / (qB)$, n étant un entier.

V. 5. — Action simultanée d'un champ électrique et d'un champ magnétique

Écrivons la loi fondamentale de la dynamique d'Einstein, lorsqu'un champ électrique $\mathbf{E}$ et un champ magnétique $\mathbf{B}$ orthogonaux agissent sur une particule chargée (masse m et charge q) :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$$

Le mouvement de la particule, suivant une direction normale aux deux champs définie par la vitesse initiale, est uniforme si les contributions des champs électrique et magnétique se neutralisent, ce qui implique :

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \text{soit} \quad v = \frac{E}{B}$$

Par conséquent, seules les particules, dont la vitesse est égale au rapport des champs, ne sont pas déviées. Ce résultat est à la base du fonctionnement du filtre de Wien qui équipe certains microscopes électroniques (Fig. 6.13) ; grâce à ce filtre, dont le nom est celui du physicien allemand W. Wien qui l'a construit, on peut former des images d'objets avec des électrons d'énergie déterminée.

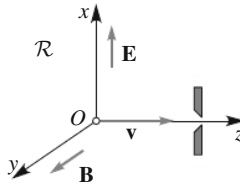


FIG. 6.13.

Exemple : Dans un filtre de Wien qui sélectionne des électrons issus d'un canon de microscope électronique, avec une énergie cinétique $\mathcal{E}_k = 200 \text{ keV}$, le rapport des champs doit être :

$$\frac{E}{B} = v \quad \text{où} \quad v = c \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \gamma = 1 + \frac{\mathcal{E}_k}{m_e c^2}$$

Le calcul donne $\gamma = 1,39$ et $\beta = 0,69c$. Si l'on veut sélectionner les électrons qui ont subi une perte d'énergie cinétique de 20 eV , en faisant varier le champ électrique E de ΔE , il faut que cette variation ΔE soit telle que :

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta \beta}{\beta} \quad \text{avec} \quad \frac{\Delta \beta}{\beta} = \frac{\Delta \gamma}{\beta^2 \gamma^3} = \frac{\Delta \gamma}{(\gamma^2 - 1)\gamma} \quad \text{et} \quad \Delta \gamma = \frac{\Delta \mathcal{E}_k}{m_e c^2} = 3,9 \times 10^{-5}$$

En effet, en différentiant $1/\gamma^2 = 1 - \beta^2$, on obtient :

$$-2\gamma^{-3} d\gamma = -2\beta d\beta \quad \text{soit} \quad \frac{d\gamma}{\gamma^3} = \beta d\beta \quad \text{et} \quad \frac{d\beta}{\beta} = \frac{d\gamma}{\beta^2 \gamma^3}$$

On en déduit la précision relative sur le champ électrique, $\Delta E/E = 3 \times 10^{-5}$, ce qui exige une précision sur la tension associée à E de l'ordre du microvolt.

Remarque : W. Wien est aussi à l'origine de la loi $\lambda_m T = \text{Cte}$ du déplacement du maximum spectral de la courbe du rayonnement du corps noir en fonction de la température (cf. *Thermodynamique*). On introduit en électronique un filtre passif passe-bande, appelé aussi filtre de Wien, dont l'auteur n'est pas W. Wien mais C. Wien, son cousin. Ce filtre est constitué de deux cellules résistance-capacité RC , l'une série et l'autre parallèle (cf. *Électronique*).

VI. — CAS DE CHAMPS STATIONNAIRES NON UNIFORMES

VI.1. — Confinement magnétique

Si le champ magnétique *n'est pas* uniforme, les trajectoires des particules sont des hélices dont le rayon et le pas varient d'une région à l'autre.

Explicitons, en coordonnées cylindriques, la loi fondamentale de la dynamique einsteinienne pour un champ magnétique non uniforme. Il vient, sachant que la norme de la vitesse et donc le facteur relativiste γ sont des constantes :

$$\left| \begin{array}{l} \gamma m(\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \\ \gamma m(\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) \\ \gamma m\ddot{z} \end{array} \right| = q \left| \begin{array}{l} \dot{\rho} \\ \rho \dot{\varphi} \\ \dot{z} \end{array} \right| \times \left| \begin{array}{l} B_\rho \\ 0 \\ B_z \end{array} \right| \quad \text{soit} \quad \begin{array}{l} \gamma m(\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) = q\rho \dot{\varphi} B_z \\ \gamma m(\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) = -q\rho(\dot{\rho} B_z - \dot{z} B_\rho) \\ \gamma m\ddot{z} = -q\rho \dot{\varphi} B_\rho \end{array} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

Supposons que le champ magnétique non uniforme présente la symétrie de révolution ; il a principalement une composante axiale B_z , suivant l'axe défini par les pièces polaires de l'électro-aimant, et une composante radiale B_ρ bien plus faible. Ces composantes sont reliées par l'équation $\text{div } \mathbf{B} = 0$ (cf. *Électromagnétisme*), à laquelle satisfait tout champ magnétique. Il vient alors, en coordonnées cylindriques :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho B_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial B_\varphi}{\rho \partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial(\rho B_\rho)}{\partial \rho} = -\rho \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

On trouve, en intégrant, sachant que $\partial B_z / \partial z$ ne dépend que de z et que la constante d'intégration est nulle, puisque la solution doit aussi convenir pour $\rho = 0$:

$$\rho B_\rho = -\frac{\rho^2}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad \text{soit} \quad B_\rho = -\frac{\rho}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

La deuxième équation du mouvement peut alors se mettre sous la forme :

$$\frac{\gamma m}{\rho} \frac{d(\rho^2 \dot{\phi})}{dt} = -q B_z \rho \dot{\phi} - \frac{q \rho^2}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} \dot{z} = -\frac{1}{2\rho} \frac{d(q \rho^2 B_z)}{dt}$$

On en déduit, en simplifiant et en intégrant :

$$\gamma m \rho^2 \dot{\phi} = -\frac{q \rho^2 B_z}{2} + \text{Cte}$$

Pour des trajectoires électroniques ($q = -e$) coupant l'axe optique ($\rho = 0$), la constante est nulle. Par conséquent :

$$\gamma m \rho^2 \dot{\phi} = \frac{e \rho^2 B_z}{2} \quad \text{d'où} \quad \dot{\phi} = \frac{e B_z}{2 \gamma m_e}$$

Une analyse détaillée montre que, sous certaines conditions, une particule peut décrire une hélice dont le pas diminue autour de la direction moyenne du champ et rebrousser chemin comme le montre la figure 6.14. Cette dernière a été obtenue par simulation en considérant un champ magnétique dont la composante selon l'axe z varie selon (cf. annexe 3) :

$$B_z(z) = B_0 \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right)$$

Ces résultats sont utilisés pour confiner des plasmas à très haute température, dans le but de créer en laboratoire des réactions de fusion entre noyaux légers, tels que le deuton et le triton, noyaux du deutérium et du tritium respectivement (cf. chapitre 8), réactions analogues à celles qui se produisent dans les étoiles.

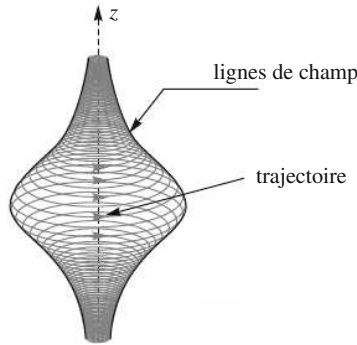


FIG. 6.14.

VI. 2. — Microscopie électronique

En raison des propriétés de focalisation des champs électrique et magnétique, l'optique corpusculaire constitue, à elle seule, un vaste champ d'application de la dynamique des particules chargées dans un champ électromagnétique stationnaire *non* uniforme.

a) Canon de microscope électronique

Les canons de microscope électronique, ainsi que les tubes de téléviseurs, utilisent les propriétés accélératrices du champ électrique.

Dans le canon d'un microscope électronique, les électrons sont émis par une cathode, avec une vitesse initiale négligeable, par effet thermoélectronique ou à l'aide d'un champ électrique extracteur non uniforme. Ils sont alors accélérés vers une anode trouée, grâce à une tension d'accélération V_a (Fig. 5.1).

La relation entre la vitesse acquise par la particule et la tension d'accélération V_a s'obtient aisément à partir de la conservation de l'énergie (cf. chapitre 5). En effet, si la vitesse initiale est nulle, il vient :

$$0 + m_e c^2 + (-e)(-V_a) = (\gamma - 1)m_e c^2 + m_e c^2 \quad \text{d'où} \quad \gamma = 1 + \frac{eV_a}{m_e c^2}$$

On en déduit :

$$v = c \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right)^{1/2} = c \left\{ 1 - \frac{1}{[1 - eV_a/(m_e c^2)]^2} \right\}^{1/2}$$

Lorsque ce potentiel accélérateur est de 1 MV, les électrons émergent du canon du microscope avec une vitesse qui est d'environ $0,94c$.

b) Lentilles magnétiques

À la sortie du canon, les électrons sont soumis à l'action d'électro-aimants qui modifient leurs trajectoires, comme le font les lentilles de verre avec les rayons lumineux. Dans ces lentilles magnétiques, le champ magnétique n'est pas uniforme mais présente la symétrie de révolution ; il a principalement une composante axiale B_z , suivant l'axe défini par les pièces polaires de l'électro-aimant, et une composante radiale B_ρ bien plus faible.

En général, la composante B_z du champ $\mathbf{B}$, produit par une lentille magnétique, varie avec z selon une loi lorentzienne :

$$B_z(z) = \frac{B_0}{1 + z^2/b^2}$$

dans laquelle b est une longueur caractéristique de l'extension de ce champ autour de $z = 0$.

Les équations du mouvement, en coordonnées cylindriques, sont les mêmes que précédemment, la charge étant $-e$ et la masse des particules m_e :

$$\gamma m_e (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) = -e \rho \dot{\phi} B_z \quad (1)$$

$$\gamma m_e (\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi}) = e \rho (\dot{\rho} B_z - \dot{z} B_\rho) \quad (2)$$

$$\gamma m_e \ddot{z} = e \rho \dot{\phi} B_\rho \quad (3)$$

La deuxième équation donne, en tenant compte de la relation entre B_ρ et B_z :

$$\gamma m_e \rho^2 \dot{\phi} = \frac{e \rho^2 B_z}{2} \quad \text{soit} \quad \dot{\phi} = \omega_L = \frac{e B_z}{2 \gamma m_e}$$

car la constante est nulle, les trajectoires coupant l'axe optique ($\rho = 0$), étant aussi solution de l'équation. On voit ainsi que la trajectoire ne reste pas dans un plan méridien, mais subit une rotation dont la vitesse angulaire est la pulsation de Larmor ω_L relative à la composante axiale du champ magnétique. Notons qu'elle est égale à la moitié de la pulsation cyclotron associée à cette même composante.

c) Focalisation

Intéressons-nous à la composante radiale, dans les conditions de Gauss, c'est-à-dire lorsque la distance à l'axe optique est suffisamment faible (cf. *Optique*). Il vient, en négligeant les termes quadratiques en ρ :

$$\gamma m_e \ddot{\rho} = \gamma m_e \rho \omega_L^2 - e \rho \omega_L B_z \quad \text{soit} \quad \ddot{\rho} + \omega_L^2 \rho = 0$$

Ainsi, la coordonnée radiale satisfait à une équation d'oscillation dont la pulsation est précisément la pulsation de Larmor ; les points pour lesquels $\rho = 0$ sont des points de focalisation.

Ainsi, même un champ non uniforme a des propriétés focalisatrices. Les trajectoires provenant d'un point objet A_o convergent en une ou plusieurs images ponctuelles A_i stigmatiques, comme en optique des rayons lumineux. On établit alors une correspondance entre les positions de l'objet et de l'image semblable à celle donnée par les formules de Descartes (cf. *Optique*). Cependant, la composante du champ magnétique suivant l'axe optique des z fait tourner le plan de l'image.

VI. 3. — Prisme magnétique

Lorsqu'on souhaite analyser l'énergie d'un faisceau d'électrons dans le plan image, on utilise un spectromètre magnétique que l'on place à la sortie du microscope ; ce spectromètre est souvent un prisme magnétique avec des propriétés dispersives analogues à celles d'un prisme en verre (cf. *Optique*).

C'est un électro-aimant dont les pièces polaires produisent un champ magnétique non uniforme (Fig. 6.15a). La composante B_z de ce champ selon la direction axiale z , définie par les pièces polaires de l'électro-aimant, a pour expression, en fonction de la coordonnée radiale ρ :

$$B_z = B_0 \left(\frac{R}{\rho} \right)^n$$

R étant le rayon de la trajectoire circulaire des électrons dans le champ uniforme B_0 .

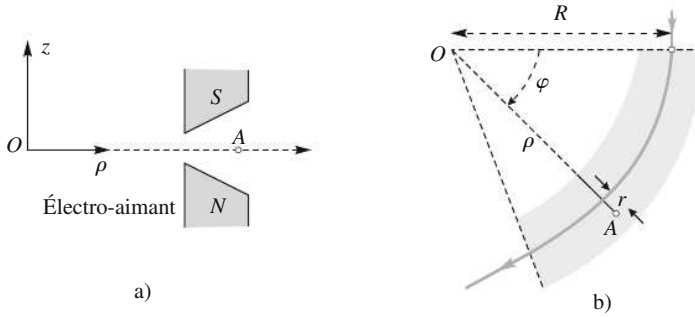


FIG. 6.15.

a) Équations du mouvement

Explicitons, ici aussi en coordonnées cylindriques ρ , φ , z , la loi fondamentale de la dynamique relativiste. Il vient, pour un électron (masse m_e et charge $-e$), en posant $\omega_c = eB_0/(\gamma m_e)$ et en négligeant $\dot{z}B_\rho$ devant $\rho\dot{\varphi}B_z$, ce qui est justifié :

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = -\frac{e\rho}{\gamma m_e} \dot{\varphi} B_z = -\omega_c \dot{\varphi} R^n \rho^{1-n} \quad (1)$$

$$\frac{d(\rho\dot{\varphi}^2)}{dt} = \omega_c R^n \rho^{1-n} \dot{\varphi} \quad (2)$$

$$\ddot{z} = \frac{e}{\gamma m} \rho \dot{\varphi} B_\rho \quad (3)$$

b) Focalisation radiale

La première équation montre que, pour $\rho = R$, on a :

$$0 - R\dot{\varphi}^2 = -\omega_c \dot{\varphi} R^n R^{1-n} = -\omega_c R \dot{\varphi} \quad \text{d'où} \quad \dot{\varphi} = \omega_c$$

Comme la vitesse v , qui est de norme constante, s'écrit $\rho\dot{\varphi}$ ou $R\omega_c$, il vient :

$$\dot{\varphi} = \omega_c \frac{R}{\rho} \quad \text{soit} \quad \dot{\varphi} = \omega_c \frac{R}{R+r} \approx \omega_c \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

en introduisant l'écart faible $r = \rho - R \ll R$ de la coordonnée radiale.

Remplaçons $\dot{\varphi}$ par son expression approchée et ρ par $R + r$, dans la première équation différentielle ; on trouve :

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= R \left(1 + \frac{r}{R}\right) \rho \omega_c^2 \left(1 - \frac{r}{R}\right)^2 - \omega_c^2 \left(1 - \frac{r}{R}\right) R^n R^{1-n} \left(1 + \frac{r}{R}\right)^{1-n} \\ &\approx R \omega_c^2 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \left[1 - \frac{r^2}{R^2} - 1 - (1-n) \frac{r}{R}\right] \end{aligned}$$

ce qui donne, en simplifiant et en négligeant les termes d'ordre deux en r^2 :

$$\ddot{r} + (1-n)\omega_c^2 r = 0$$

Il est commode d'introduire la variable spatiale d'évolution $Z = R\omega_c t$, définie le long de la trajectoire moyenne des particules, cette dernière jouant le rôle d'axe optique curviligne. L'équation précédente devient alors :

$$r'' + \frac{1-n}{R^2} r = 0 \quad \text{avec} \quad r'' = \frac{d^2 r}{dZ^2} = \frac{1}{R^2 \omega_c^2} \frac{d^2 r}{dt^2}$$

On voit que, en fonction de Z , la coordonnée radiale ρ oscille, autour de la valeur R , avec la pulsation spatiale $k_r = (1-n)^{1/2}/R$, pourvu que $n < 1$.

Pour $n = 0$, ce qui correspond à un champ uniforme, cette pulsation se réduit à $1/R$; il y a alors focalisation radiale des trajectoires (cf. annexe 3).

c) Focalisation axiale

Étudions la focalisation axiale, c'est-à-dire le mouvement de l'électron selon l'axe des z à l'aide de la troisième équation :

$$\ddot{z} = \frac{e}{\gamma m} \rho \dot{\varphi} B_\rho$$

On obtient la composante B_ρ du champ magnétique $\mathbf{B}$ à l'aide de l'équation d'Ampère réduite (cf. *Électromagnétisme*) :

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad \text{ce qui donne} \quad \frac{\partial B_\rho}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial \rho} = 0$$

Il vient :

$$\frac{\partial B_\rho}{\partial Z} = -n B_0 \frac{R^n}{\rho^{n+1}} \approx -\frac{n B_0}{R} \quad \text{d'où} \quad B_\rho \approx -\frac{n B_0 Z}{R}$$

La troisième équation du mouvement s'écrit donc, de façon approchée :

$$\ddot{z} + n \omega_c^2 z = 0 \quad \text{soit} \quad z'' + \frac{n}{R^2} z = 0 \quad \text{puisque} \quad z'' = \frac{d^2 z}{dZ^2} = \frac{1}{R^2 \omega_c^2} \frac{d^2 z}{dt^2}$$

Ainsi, la variable axiale z oscille, elle aussi, mais avec une pulsation spatiale différente $k_z = n^{1/2}/R$. Notons que, pour $n \leq 0$, il n'y pas de focalisation axiale.

d) Double focalisation

Dans la pratique, on incline les faces d'entrée et de sortie afin de réaliser la double focalisation, radiale et axiale. Le prisme magnétique peut alors former une image stigmatique du point objet d'où partent toutes les trajectoires électroniques.

CONCLUSION

Rappelons les résultats essentiels.

1) Le mouvement rectiligne d'une particule chargée, initialement au repos, soumise à l'action d'un champ électrique constant, est caractérisé par une équation horaire $x(t)$ hyperbolique :

$$\left(\frac{x + ct_l}{t_l}\right)^2 - \left(\frac{t}{t_l}\right)^2 = 1 \quad \text{avec} \quad t_l = \frac{c}{a_N} \quad \text{et} \quad a_N = \frac{qE}{m}$$

2) La trajectoire du mouvement curviligne d'une particule, de quantité de mouvement initiale, p_i perpendiculaire au champ électrique, et d'énergie initiale $\mathcal{E}_i$, est une chaînette et non une parabole :

$$x = \frac{\mathcal{E}_i}{qE} \left[\cosh\left(\frac{qEy}{p_i c}\right) - 1 \right]$$

3) Le mouvement le plus général d'une particule chargée dans un champ magnétique constant seul est, comme en mécanique newtonienne, hélicoïdal. Sa projection, dans un plan perpendiculaire à $\mathbf{B}$, est un cercle de rayon algébrique :

$$\bar{R} = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} = \frac{\gamma m v_{\perp}}{qB} = \frac{p_{\perp}}{qB} \quad \text{où} \quad \omega_c = \frac{qB}{\gamma m}$$

est la pulsation cyclotron. En bref, les résultats obtenus en relativité sont ceux déjà établis en mécanique newtonienne, mais la masse m est multipliée par le facteur relativiste γ .

4) Les applications d'une telle étude sont nombreuses puisqu'elles concernent les accélérateurs de particules et tout ce qui relève de l'optique corpusculaire (déviation de trajectoire, focalisation, etc.).

Retenons que, dans l'étude du mouvement des particules chargées, la théorie relativiste est indispensable dès que la tension d'accélération est supérieure à 7 kV pour des électrons et à 13 MV pour des protons. Enfin, les champs magnétiques sont largement utilisés dans les accélérateurs, non pas pour augmenter la norme de la vitesse des particules, mais pour amener périodiquement les particules dans les zones d'accélération créées par des champs électriques. Un exemple typique d'accélérateur est le synchrotron.

EXERCICES ET PROBLÈMES**P6– 1. Accélération d'une particule dans un champ électromagnétique**

Une particule élémentaire acquiert une vitesse $\mathbf{v}$ sous l'action d'un champ électrique $\mathbf{E}$ et d'un champ magnétique $\mathbf{B}$.

1. Montrer que l'accélération $\mathbf{a}$ peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{a} = \frac{\alpha}{\gamma} \left[(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{\mathbf{v}}{c^2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) \right]$$

α étant un coefficient que l'on exprimera en fonction de la charge et de la masse de la particule.

2. Étudier les quatre cas particuliers suivants en les commentant :

$$\mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

P6– 2. Indice en optique électronique

1. Exprimer la vitesse et la quantité de mouvement acquises par un électron sous l'action d'un potentiel d'accélération V_a ; on introduira la quantité $\varepsilon = e/(2mc^2)$.

2. En optique électronique, l'indice est une quantité proportionnelle à la quantité de mouvement. Montrer que, dans l'approximation newtonienne, n est proportionnel à $V_a^{1/2}$, et qu'en théorie relativiste tout se passe comme si V_a était remplacé par un potentiel dit relativiste, V_a^* , que l'on exprimera en fonction de V_a . Calculer V_a^* pour $V_a = 0, 1 \text{ MV}, 1 \text{ MV}$ et 3 MV .

P6– 3. Particule dans un champ électrique constant

Une particule chargée A a sa position repérée dans un référentiel du laboratoire $\mathcal{R} = Oxyz$. Elle est soumise à un champ électrique constant $\mathbf{E} = E \mathbf{e}_y$ ($E > 0$) ; en outre, à l'instant pris comme origine, la particule est en O , avec la vitesse $\mathbf{v}_i = v_i \mathbf{e}_x$ ($v_i > 0$).

1. Déterminer l'équation de la trajectoire ; on désignera par τ la quantité $\gamma_i mc/(qE)$, γ_i étant le facteur relativiste associé à la vitesse initiale v_i .

2. On se propose d'étudier le mouvement pour $v_i = 0$. Établir la fonction $y(t)$ donnant, au cours du temps, la position de A sur l'axe Oy .

3. On applique entre deux électrodes, distantes de $d = 40 \text{ cm}$, une différence de potentiel U de façon à créer dans cet espace un champ électrique constant. Ce système accélérateur permet de communiquer à des protons ou à des électrons initialement au repos, une énergie cinétique $\mathcal{E}_k = 4 \text{ MeV}$. Que vaut U ? Calculer, pour des protons et pour des électrons, les valeurs finales du facteur relativiste $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, de la vitesse v et de la durée de transit θ des particules entre les deux électrodes. En fin d'accélération, les particules sont-elles einsteiniennes ou newtoniennes ?

P6– 4. Électron freiné par un champ électrique

Un électron, émis par une source ponctuelle, est soumis à l'action d'un champ électrique $\mathbf{E}$. On choisit un système d'axes tel que Ox soit orienté suivant le champ ; la quantité de mouvement initiale $\mathbf{p}_i$ en O est elle-aussi orientée selon Ox .

1. Montrer que la trajectoire est rectiligne. Au bout de quelle durée t_1 , l'électron rebrousse-t-il chemin ? Calculer t_1 lorsque $p_i = 1 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-1}$ et $E = 10 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$.

2. Quelle est l'équation horaire ? En déduire la distance x_1 parcourue pendant la durée t_1 .

3. Comparer l'énergie γmc^2 de l'électron à l'instant initial et à l'instant t_1 .

P6– 5. Proton dans un champ électrique $\mathbf{E}$ faisant l'angle α_i avec sa vitesse initiale

Un proton (masse m_p et charge e) est soumis à l'action d'un champ électrique constant qui fait un angle α_i avec le vecteur vitesse initiale. On se propose d'établir l'équation de son mouvement dans le plan Oxy formé par $\mathbf{E}$ dirigé suivant Ox et $\mathbf{v}_i$, sachant que O est le point où se trouvait la particule initialement.

1. Trouver les équations différentielles auxquelles satisfont les composantes du vecteur position du proton.
2. En déduire les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$; on posera $\mu = c(eEt + p_{i,x})$.
3. Retrouver les équations horaires dans l'approximation newtonienne.

P6– 6. Rigidité magnétique dans le cas d'électrons rapides

1. Montrer que la rigidité magnétique BR , produit du champ magnétique par le rayon de courbure R de la trajectoire, dans le cas d'électrons, peut se mettre sous la forme :

$$B(T)R(m) = \alpha(\gamma^2 - 1)^{1/2}$$

γ étant le facteur relativiste et α un coefficient que l'on calculera.

2. Calculer BR pour les tensions d'accélération V_a suivantes : 100 kV , 1 MV , 3 MV . Quel est le champ magnétique B nécessaire pour $V_a = 200$ kV et $R = 8$ cm ?

P6– 7. Rayon de la trajectoire d'un deuton dans un champ magnétique

Un deuton (masse $m = 1875,56 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2}$, charge e) pénètre dans une région où règne un champ magnétique constant $\mathbf{B}$, normalement aux lignes de champ, avec une vitesse $\mathbf{v}_0$.

Calculer le rayon R de la trajectoire circulaire qu'il décrit, ainsi que la période de révolution T , sachant que $B = 1,65 \text{ T}$ et $v_0 = 2 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

P6– 8. Filtrage magnétique des mésons K

Les mésons K , de masse $m_K = 495 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2}$ et de charge e , sont filtrés par un système magnétique, en fonction de leur énergie. Comme le montre la figure 6.16, ce système, qui a la forme d'un prisme, est un électro-aimant qui impose aux particules, grâce à un champ magnétique constant, une trajectoire ayant la forme d'un quart de cercle, de rayon R .

1. Établir l'expression de B en fonction de l'énergie des mésons. Sachant que $B = 2 \text{ T}$ et $R = 2,5 \text{ m}$, calculer en MeV l'énergie cinétique des particules incidentes. Préciser le sens de $\mathbf{B}$ sur la figure.

2. À la sortie du filtre, les mésons K ont à parcourir une distance $SD = d = 2,5 \text{ m}$ avant d'atteindre le détecteur qui permet de les compter. Dans leur référentiel propre $\mathcal{R}_p$, le nombre de mésons N_p , existant à l'instant propre t_p , est donné par l'expression :

$$N_p(t_p) = A \exp\left(-\frac{t_p}{\tau_p}\right)$$

où A est une constante et $\tau_p = 12,3 \text{ ns}$ est la durée de vie des mésons.

- a) Trouver l'expression du nombre de mésons, en fonction du temps t , dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, sachant que les origines de temps sont les mêmes dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}_p$?

- b) Quel est le rapport entre le nombre de mésons comptés par le détecteur et le nombre de mésons qui sortent du filtre ?

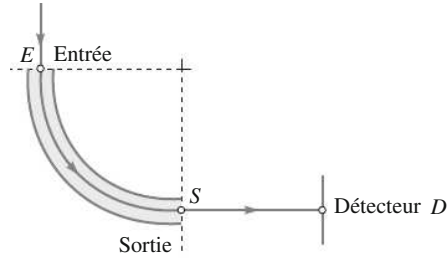


FIG. 6.16.

P6– 9. Action simultanée d'un champ électrique et d'un champ magnétique

Un électron pénètre, avec une quantité de mouvement $\mathbf{p}_i$, dans une région où règnent un champ électrique $\mathbf{E}$ et un champ magnétique $\mathbf{B}$ constants, parallèles entre eux et perpendiculaires à $\mathbf{p}_i$. Pour la commodité, on choisit l'origine du référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$ au point où l'électron se trouve à l'instant initial, et les axes de telle sorte que $\mathbf{p}_i = p_i \mathbf{e}_x$, $\mathbf{E} = E \mathbf{e}_z$ avec $E > 0$ et $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z$ avec $B > 0$.

1. Trouver la loi de variation de la composante p_z de $\mathbf{p}$ suivant z au cours du temps.
2. Exprimer les équations différentielles donnant les composantes p_x et p_y en introduisant l'énergie $\mathcal{E} = \gamma m c^2$. En déduire que $p_x^2 + p_y^2$ est une constante que l'on déterminera en fonction de p_i .
3. Établir l'expression de l'énergie $\mathcal{E}$ en fonction du temps. En déduire $\mathcal{E}$ en fonction de $\mathcal{E}(0)$ et du paramètre θ défini par :

$$\sinh\left(\frac{E}{Bc}\theta\right) = \frac{ecE}{\mathcal{E}(0)}t$$

Sachant que les valeurs de E , Bc et $\mathcal{E}(0)$ sont :

$$E = 0,3 \times 10^8 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \quad Bc = 0,15 \times 10^8 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}(0) = 3m_e c^2$$

calculer θ à l'instant $t = \mathcal{E}(0)/(ecE)$.

4. Montrer que les équations différentielles donnant p_x et p_y s'écrivent :

$$\frac{dp_x}{d\theta} = -p_y \quad \text{et} \quad \frac{dp_y}{d\theta} = p_x$$

En déduire $p_x(\theta)$ et $p_y(\theta)$.

5. Trouver $v_x(\theta)$, $v_y(\theta)$, ainsi que les équations paramétriques $x(\theta)$, $y(\theta)$.
6. À l'aide du théorème de l'énergie, établir l'expression de $z(\theta)$. Quelle est la trajectoire de l'électron ?

P6– 10. Synchrotron à protons Saturne de Saclay

Dans le synchrotron Saturne de Saclay en France, la trajectoire des protons qu'on veut accélérer est rendue circulaire au moyen d'un champ magnétique $\mathbf{B}$ uniforme. Cette trajectoire a un rayon $R = 8,42 \text{ m}$. L'accélération tangentielle est produite à chaque tour au moyen d'un champ électrique sinusoïdal, de fréquence f . Ce champ accélère les protons lorsqu'ils passent dans une cavité accélératrice.

1. Quelle équation relie R, B et l'énergie cinétique $\mathcal{E}_k$ des particules.
2. Trouver la fréquence f du champ électrique. En déduire que B et f doivent varier en satisfaisant à une relation que l'on établira. Quelle est la fréquence limite f_0 lorsque l'énergie des protons augmente ?
3. Les protons sont injectés avec l'énergie cinétique $\mathcal{E}_{k,1} = 3,6 \text{ MeV}$ et sortent avec l'énergie cinétique $\mathcal{E}_{k,2} = 2,9 \text{ GeV}$. Calculer les valeurs initiale et finale de B .
4. Établir la relation entre f, f_0 et B .

P6– 11. Super Synchrotron à Protons du CERN

Dans le SuperSynchrotron à Protons (SPS) du CERN, les protons injectés proviennent d'un Synchrotron à Protons (SP), avec une énergie cinétique minimale $\mathcal{E}_{k,i} = 28 \text{ GeV}$. Le rayon du SPS est $R = 1,1 \text{ km}$ et le champ magnétique final vaut $B_f = 1,36 \text{ T}$.

1. Retrouver les expressions du champ magnétique et de la fréquence cyclotron $f_c = \omega_c/(2\pi)$ en fonction de l'énergie cinétique réduite $x = \mathcal{E}_k/(m_p c^2)$.
2. Quelles sont les valeurs initiales B_i et $f_{c,i}$ du champ magnétique et de la fréquence cyclotron, ainsi que les valeurs finales B_f et $f_{c,f}$ de l'énergie et de la fréquence cyclotron ?
3. Établir l'expression de la variation ΔB du champ magnétique qui permet de maintenir la particule sur la trajectoire circulaire lorsqu'elle acquiert, dans une cavité accélératrice, une énergie supplémentaire $\Delta \mathcal{E}$ faible devant son énergie. Applications pour $\Delta \mathcal{E} = 50 \text{ keV}$, dans les deux cas extrêmes suivants : $x = 30$ et $x = 500$.

P6– 12. Effet de la charge d'espace dans le référentiel propre des particules

Un faisceau cylindrique de particules identiques (masse m , charge q) de vitesse moyenne $\mathbf{u} = u \mathbf{e}_x$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire, a un rayon R à l'abscisse x ; R_0 est le rayon du faisceau à l'origine x . La charge volumique est uniforme; on la désigne par ρ_0 dans le référentiel $\mathcal{R}'$, de vitesse $\mathbf{u}$ par rapport à $\mathcal{R}$.

1. En supposant le faisceau cylindrique infini selon l'axe Ox , déterminer la direction du champ électrique $\mathbf{E}'$ créé par le faisceau. En déduire la force $\mathbf{F}'$ que subit, dans $\mathcal{R}'$, une particule située à la périphérie du faisceau.
2. En appliquant la loi fondamentale de la dynamique relativiste, à une particule du faisceau dans $\mathcal{R}'$, trouver la loi de variation de R en fonction du temps t' dans $\mathcal{R}'$. On supposera que le mouvement transversal dans $\mathcal{R}'$ est très lent. Évaluer la variation relative du rayon, $\Delta R/R_0$, en fonction de t' .
3. Exprimer $\Delta R/R_0$ en fonction du temps t dans $\mathcal{R}$. En déduire $\Delta R/R_0$ en fonction de x .

P6– 13. Effet de la charge d'espace dans le référentiel du laboratoire

On se propose d'étudier l'effet de la charge d'espace dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, pour le faisceau cylindrique étudié dans le problème précédent.

1. En supposant le faisceau de particules cylindrique infini dans la direction x , déterminer les directions du champ électrique $\mathbf{E}$ et du champ magnétique $\mathbf{B}$ créés par le faisceau en tout point de l'espace. On désigne par r la distance d'un point à l'axe et par ρ la charge volumique dans $\mathcal{R}$.

2. Quelle est la force $\mathbf{F}$ qui s'exerce sur une particule située à la périphérie du faisceau ? En comparant $\mathbf{F}$ à la force $\mathbf{F}'$ relative au référentiel $\mathcal{R}'$ lié aux particules, établir la relation entre ρ et la charge volumique ρ_0 dans $\mathcal{R}'$.

3. On considère le point de vue d'un observateur de $\mathcal{R}$. Trouver $\Delta R/R_0$ en fonction de x . Calculer $\Delta R/R_0$ pour un faisceau d'électrons, de rayon $R_0 = 20 \mu\text{m}$, d'intensité $I = 1 \mu\text{A}$, après un trajet égal à $L = 1 \text{ m}$ et pour des tensions d'accélération de 100 kV et de 1 MV .

4. Retrouver $\Delta R/R_0$ à l'aide des résultats de la question 3 du problème précédent.

P6– 14. Rayonnement d'une particule chargée accélérée par un champ électrique

Une particule (masse m , charge q), accélérée à partir du repos par un champ électrique $\mathbf{E}$ constant, rayonne de l'énergie électromagnétique. La puissance rayonnée est donnée par l'expression d'Abraham :

$$\mathcal{P}_r = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left[\gamma^6 \mathbf{a}^2 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \gamma^3 \mathbf{a} \right)^2 \right]$$

où γ désigne le facteur relativiste, $\mathbf{a}$ l'accélération, $\mathbf{v}$ la vitesse et où $1/4\pi\epsilon_0 \approx 9 \times 10^9 \text{ SI}$.

1. Donner l'expression de la puissance $\mathcal{P}_r$ dans le cas particulier considéré.

2. Comparer $\mathcal{P}_r$ à la puissance fournie par le champ électrique. Conclure pour des particules ultra-einsteiniennes.

3. La particule, en mouvement dans un champ magnétique uniforme $\mathbf{B}$, décrit un cercle de rayon R . Déterminer l'énergie rayonnée par tour. Étudier le cas où la particule est ultra-relativiste.

P6– 15. Accélérateur linéaire (Wideröe, Sloan et Lawrence)

Un accélérateur linéaire est constitué de plusieurs cylindres métalliques coaxiaux sur l'axe desquels on injecte un faisceau de protons (masse m , charge e) avec une vitesse initiale v_0 . Entre les cylindres successifs, existe une différence de potentiel sinusoïdale à laquelle correspond un champ électrique de la forme $\mathbf{E} = E_0 \sin(\omega t)$ le long de l'axe. À l'intérieur des cylindres, le champ est nul. La longueur des cylindres et des espaces entre cylindres est choisie de telle sorte que la durée de transit des protons à l'intérieur d'un cylindre et dans l'espace entre deux cylindres soit égal à une demi-période $T/2$ du champ.

1. Analyse newtonienne

a) Trouver, en fonction de E_0 et ω , la variation de vitesse $\Delta v = v_n - v_{n-1}$ entre les passages dans deux zones accélératrices consécutives $n-1$ et n .

b) Exprimer, en fonction de $l_0 = \pi v_0 / \omega$ et $\Delta l = \pi \Delta v / \omega$, les longueurs L_n et l_n de la n ème zone accélératrice et du n ème cylindre respectivement.

c) Les particules ont une énergie cinétique initiale de $0,5 \text{ MeV}$, une énergie cinétique finale de 5 MeV ; en outre, $E_0 = (\pi/2) \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ et $\omega/(2\pi) = 2 \times 10^8 \text{ Hz}$. Calculer le nombre total N de cylindres et la longueur totale L_t de l'accélérateur.

d) Comment faudrait-il modifier E_0 et ω pour que l'accélérateur puisse fonctionner avec des particules d'énergies cinétiques différentes ?

2. Selon le point de vue d'Einstein, déterminer la variation de vitesse Δv lors de la transition entre deux zones accélératrices consécutives. Trouver L_n et l_n .

P6– 16. Prisme magnétique

Des électrons pénètrent dans un espace en forme de prisme d'angle Φ . Dans cet espace règne un champ magnétique $\mathbf{B}$ constant, parallèle à l'arête du prisme et dirigé suivant l'axe Oz_0 du référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$. La trajectoire moyenne du pinceau incident, est normale à la face d'entrée, laquelle est représentée par l'axe Ox_0 passant par le point E tel que $OE = \rho_0$ (Fig. 6.17).

1. a) Écrire, sous forme vectorielle, la loi fondamentale de la dynamique d'Einstein, en introduisant le vecteur unitaire $\mathbf{e}_{z_0}$ porté par l'axe Oz_0 et $\omega_r = eB/(\gamma m_e)$, e étant la charge élémentaire, m_e la masse de l'électron et γ le facteur relativiste.

b) Expliciter la relation précédente en coordonnées cylindriques (ρ, φ, z_0) .

c) Déterminer la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ pour que la trajectoire dans le plan Ox_0y_0 soit une portion du cercle C_0 de rayon ρ_0 .

2. On se propose d'étudier les trajectoires des électrons au voisinage de la trajectoire moyenne C_m ; cette dernière est constituée par la droite tangente en E à C_0 avant le prisme, par C_0 dans le prisme et par la droite tangente en S à C_0 après le prisme. Le pinceau électronique incident, issu d'un point A_0 situé sur C_m , est assez peu ouvert pour que l'on puisse négliger la composante radiale de la vitesse des électrons à l'entrée du prisme ainsi que sa composante suivant l'axe Oz_0 .

a) Montrer que $\dot{\varphi}$ s'exprime en fonction de ω_r et de l'écart relatif $\Delta\rho/\rho_0$ sous la forme :

$$\dot{\varphi} = \omega_r \left(1 - \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \right) \quad \text{si} \quad \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \ll 1$$

b) Quelle est l'équation différentielle à laquelle satisfait $\Delta\rho$?

c) On pose $x = \Delta\rho$ et $z = \rho_0 \omega_r t$. On introduit ainsi le système d'axes $Axyz$ où A est un point de C_m repérant le plan de front, perpendiculaire à C_m , dans lequel se trouve la particule. Le vecteur unitaire $\mathbf{e}_y$ de l'axe Ay est ainsi égal à $-\mathbf{e}_{z_0}$ et l'axe Az est tangent à C_m .

i) Trouver l'équation différentielle reliant x à sa dérivée seconde x'' par rapport à z .

ii) En déduire les expressions de x et $x' = dx/dz$ en fonction de leurs valeurs x_e et x'_e à l'entrée du prisme.

3. On définit la matrice colonne X formée par les deux lignes x et x' .

a) Exprimer, en fonction de Φ et ρ_0 , la matrice de transfert $\mathcal{P}$ du prisme permettant de déterminer la matrice colonne X_s , à la sortie du prisme, à partir de la matrice colonne X_e à l'entrée.

b) On désigne par z_1 et z_2 les abscisses curvilignes de deux points A_1 et A_2 de C_m , situés de part et d'autre du prisme. Exprimer, en fonction de $\Delta z = z_2 - z_1$, la matrice de transfert $\mathcal{T}$ reliant les matrices colonnes X_1 et X_2 dans les deux plans de front passant par A_1 et A_2 .

c) Déterminer, en fonction de $z_i = \overline{SA_i}$ et ρ_0 , la matrice de transfert entre le plan de front situé en A_0 , en avant du prisme, et un plan de front passant par un point A_i de C_m , après le prisme, dans le cas particulier où $\Phi = \pi/2$.

d) Quelle est la relation entre z_0 , z_i et ρ_0 pour que A_i soit l'image de A_0 au sens de l'optique géométrique ? En déduire que A_0 , O et A_i sont alignés.

e) Trouver les éléments cardinaux du prisme $\pi/2$: distances focales objet et image, plans principaux et foyers principaux.

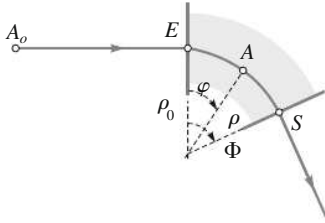


FIG. 6.17.

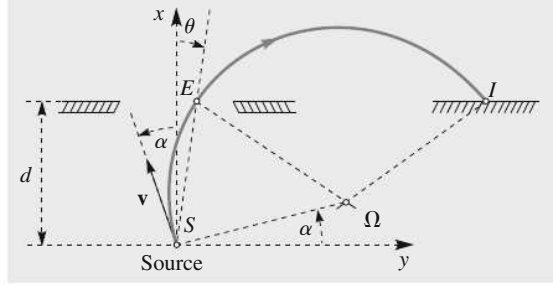


FIG. 6.18.

P6– 17. Focalisation radiale à l'aide d'un champ magnétique

Les particules émises, avec une vitesse v , par une source S décrivent des cercles grâce à un champ magnétique transversal $\mathbf{B}$. Le pinceau corpusculaire incident est défini par une fente d'entrée placée à la distance d de S (Fig. 6.18). On détecte ces particules par un détecteur plan placé dans le même plan que la fente.

1. Quel est le rayon R de la trajectoire circulaire en fonction du champ B , de la masse m des particules, de leur charge q et de leur vitesse v ?

2. Établir la relation entre la coordonnée y_I du point d'impact, lors de la détection et l'angle α que fait la vitesse initiale $\mathbf{v}$ avec la normale à la fente d'entrée.

3. On désigne par θ l'angle tel que $\tan \theta = y_E/d$, y_E étant la coordonnée suivant l'axe Sy du point E d'intersection de la trajectoire circulaire considérée avec la fente d'entrée. Montrer que :

$$y_I = 2R \cos \alpha - d \tan \theta = \frac{d}{\tan \phi} \quad \text{avec} \quad \phi = \theta + \alpha$$

4. Quelles sont les valeurs maximale et minimale de la coordonnée y_I du point d'impact sur le détecteur ? En déduire l'expression suivante de la distance Δy entre les points d'impact correspondants :

$$\Delta y = (4R^2 - d^2)^{1/2} - (4R^2 \cos^2 \varepsilon - d^2)^{1/2}$$

ε étant la valeur maximale de θ définie par la fente d'entrée. Que devient cette distance lorsque ε est suffisamment petit ? Commenter.

7

Collisions de particules rapides

Comme en mécanique newtonienne, on dit que deux particules entrent en collision lorsque, du fait de leur interaction, elles subissent des variations brutales de vitesse dans une zone quasi ponctuelle de l'espace.

Cette définition exprime soit notre incapacité à analyser la complexité de ce qui se passe dans la zone d'interaction, soit une attitude délibérée qui consiste à ne s'intéresser qu'aux états initial et final du système des deux particules. Ce manque d'information concernant la nature exacte de l'interaction se traduit nécessairement par une indétermination. En revanche, il conduit à établir des relations très générales puisque indépendantes de l'interaction. Dans beaucoup de problèmes concrets, les informations que nous tirerons d'une analyse générale s'avèreront très instructives.

L'étude des collisions en dynamique einsteinienne constitue le prolongement indispensable de ce qui est bien connu en mécanique newtonienne (cf. *Mécanique*), puisque les valeurs des vitesses considérées sont, le plus souvent, proches de c .

Énonçons d'abord les propriétés générales des collisions, précisément les lois de conservation.

I. — PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES COLLISIONS

I. 1. — Lois de conservation

a) Conservation de la quantité de mouvement totale

La propriété de conservation de la quantité de mouvement totale, au cours d'une collision entre particules, est une généralisation de celle, bien connue en mécanique newtonienne, relative à un système *isolé* ou pseudo-*isolé* (cf. *Mécanique*) : au cours d'une collision, la quantité de mouvement totale d'un système de particules se conserve, ce qui s'écrit, dans l'hypothèse d'additivité :

$$\mathbf{P}_{av} = \mathbf{P}_{ap} \quad \text{soit} \quad \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_f \mathbf{p}_f \quad \text{avec} \quad \mathbf{p}_i = \gamma_i m_i \mathbf{v}_i \quad \text{et} \quad \mathbf{p}_f = \gamma_f m_f \mathbf{v}_f$$

car on admet que la quantité de mouvement est une grandeur cinétique vectorielle additive ; l'indice i est utilisé pour les particules initiales et l'indice f pour les particules finales.

Notons que cette loi est *indépendante* de la nature précise de la collision.

Remarque : Dans la technique du calcul, il est judicieux de se garder d'expliciter trop tôt les quantités de mouvement en fonction des vitesses.

b) Conservation de l'énergie totale

La propriété de conservation de l'énergie totale, au cours d'une collision entre particules, est aussi une généralisation de celle, bien connue en mécanique newtonienne, relative à un système isolé ou pseudo-isolé dont les forces intérieures dérivent d'une énergie potentielle : l'énergie d'un système isolé de particules se conserve. Ainsi :

$$\mathcal{E}_{av} = \mathcal{E}_{ap} \quad \text{soit} \quad \sum_i \mathcal{E}_{k,i} + \mathcal{E}_{0,i} + \mathcal{E}_{p,av} = \sum_f \mathcal{E}_{k,f} + \mathcal{E}_{0,f} + \mathcal{E}_{p,ap}$$

en explicitant les différentes énergies. Comme la collision est un phénomène *localisé*, l'énergie potentielle se conserve aussi $\mathcal{E}_{p,av} = \mathcal{E}_{p,ap}$. L'équation de conservation de l'énergie se réduit donc à :

$$\sum_i \mathcal{E}_{k,i} + m_i c^2 = \sum_f \mathcal{E}_{k,f} + m_f c^2 \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_{k,i} = (\gamma_i - 1)m_i c^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{k,f} = (\gamma_f - 1)m_f c^2$$

Le tableau 7.1 donne la masse de quelques particules en $\text{MeV} \cdot \text{c}^{-2}$. Une autre unité, souvent employée dans ce contexte, est l'*unité de masse atomique* (u). On appelle ainsi la masse d'une particule fictive telle que, $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ étant le nombre d'Avogadro :

$$N_A \times \text{u.m.a} = 1 \text{ g} \quad \text{d'où} \quad 1 \text{ u} = 1,6604 \times 10^{-27} \text{ kg} = 931,468 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2} \approx 931,5 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2}$$

Particule			Masse en $\text{MeV} \cdot \text{c}^{-2}$	Masse en u
proton	(p^+)	${}^1_1H^+$	938,27	1,007 276
neutron	(n)	${}^1_0n$	939,565	1,008 665
deuton	(d)	${}^2_1H^+$	1 875,61	2,013 553
triton	(t)	${}^3_1H^+$	2 808,84	3,015 501
hélium	(α)	${}^4_2He^{2+}$	3 727,27	4,001 505
électron	(β^-)	${}^0_{-1}e$	0,511	0,000 549
deutérium		${}^2_1H$	1 876,07	2,014 102
tritium		${}^3_1H$	2 809,35	3,016 050
hélium		${}^4_2He$	3 728,30	4,002 603

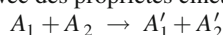
TAB. 7.1.

I. 2. — Collisions élastiques et collisions inélastiques

a) Collisions élastiques

Les collisions sont dites *élastiques* lorsque le *nombre et la nature* des particules sont *inchangés*.

Une telle collision sera représentée par une réaction où l'on retrouve dans l'état final les mêmes particules que dans l'état initial, mais avec des propriétés cinétiques différentes :



Comme la somme des énergies de masse ne varie pas, au cours d'une collision élastique :

$$\sum_i m_i c^2 = \sum_i m'_i c^2$$

la conservation de l'énergie se réduit à celle de l'énergie cinétique de l'ensemble :

$$\sum_i \mathcal{E}_{k,i} = \sum_i \mathcal{E}'_{k,i}$$

Cependant, en raison de la relation $\mathcal{E}^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$ qui relie la quantité de mouvement $p = \gamma m v$ à l'énergie $\mathcal{E} = \gamma m c^2$ d'une particule, il est généralement plus commode d'écrire, en relativité, dans le cas de collisions élastiques, la conservation de la somme des énergies cinétiques, en y incluant les énergies de masse des particules.

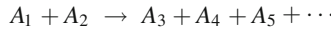
Exemple : $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$

Dans cette collision élastique entre deux électrons, ni le nombre de particules en interaction ni leur nature ne sont modifiés ; seules leur quantité de mouvement et leur énergie cinétique ont changé.

Remarque : Le concept de collision élastique est en réalité une idéalisation, puisque toute collision modifie nécessairement la nature des particules. Cette idéalisation doit être rapprochée de la notion de réversibilité en physique, définie comme une invariance par changement de signe de la variable temps (cf. *Thermodynamique*).

b) Collisions inélastiques

Les collisions sont dites *inélastiques* si le *nombre* ou la *nature* des particules sont modifiés après collision. Aussi les représente-t-on par la réaction suivante :



Comme :

$$\sum_i m_i c^2 \neq \sum_f m_f c^2 \quad \text{alors} \quad \sum_i \mathcal{E}_{k,i} \neq \sum_f \mathcal{E}_{k,f}$$

la conservation de l'énergie dans une collision inélastique conduit à l'équation :

$$\sum_i \mathcal{E}_{k,i} + \sum_i m_i c^2 = \sum_f \mathcal{E}_{k,f} + \sum_f m_f c^2 \quad \text{d'où} \quad \sum_f \mathcal{E}_{k,f} - \sum_i \mathcal{E}_{k,i} = \sum_i m_i c^2 - \sum_f m_f c^2$$

Par conséquent, la variation d'énergie cinétique est directement reliée à la variation de la somme des masses des particules qui constituent le système. Cette transformation de l'énergie cinétique en masse et vice-versa exprime l'*équivalence masse-énergie*. Il est alors commode d'introduire le défaut de la somme des masses des particules, historiquement appelé *défait de masse* :

$$\mu = \sum_i m_i - \sum_f m_f$$

Exemple : $p^+ + p^+ \rightarrow p^+ + p^+ + \pi^0$

Établissons, pour une collision inélastique, dans laquelle la cible est au repos, la relation entre la masse M du système des deux particules en interaction et la somme des masses des particules incidentes. D'après la définition de la masse, il vient :

$$M^2 c^4 = \mathcal{E}^2 - P^2 c^2 = \left(\sum_i \mathcal{E}_i \right)^2 - \left(\sum_i \mathbf{p}_i \right)^2 c^2 = (\mathcal{E}_1 + m_2 c^2)^2 - p_1^2 c^2$$

puisque $\mathcal{E}_2 = m_2 c^2$ et $\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$. Par conséquent :

$$M^2 c^4 = m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2\mathcal{E}_1 m_2 c^2 = (m_1 + m_2)^2 c^4 + 2(\mathcal{E}_1 - m_1 c^2) m_2 c^2$$

On retrouve bien la non-additivité des masses en relativité (cf. chapitre 5).

Remarque : Il convient de ne pas confondre le défaut de la somme des masses avec une variation hypothétique de la masse M du système. Nous avons vu que la masse M , définie à partir de la norme du quadrivecteur $4\text{-}P$, était invariante au cours d'une collision (cf. chapitre 5).

II. — RÉFÉRENTIEL DU CENTRE DE MASSE

L'analyse newtonienne des collisions montre que le référentiel du centre de masse, appelé parfois référentiel barycentrique, est un intermédiaire commode pour résoudre les problèmes de collision (cf. *Mécanique*). Il en est de même en relativité.

II.1. — Définition de $\mathcal{R}^*$

On appelle référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$ le référentiel en *translation* par rapport au référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, tel que la quantité de mouvement totale du système y soit nulle :

$$\mathbf{P}^* = \mathbf{0} \quad \text{soit aussi} \quad \sum_i \mathbf{p}_i^* = \mathbf{0}$$

Lorsque le système de particules en interaction peut être considéré comme *isolé*, comme c'est généralement le cas, ce référentiel $\mathcal{R}^*$ est aussi *galiléen*.

Remarque : La définition précédente de $\mathcal{R}^*$ généralise celle, adoptée en mécanique newtonienne, qui s'appuie sur la définition préalable du centre de masse par le barycentre du système de particules affectées de leurs masses respectives (cf. *Mécanique*).

Pour déterminer la vitesse d'entraînement $\mathbf{v}_e$ de $\mathcal{R}^*$ par rapport à $\mathcal{R}$, écrivons les formules de transformation du quadrivecteur $4\text{-}P = \sum_i 4\text{-}p_i$. Appelons Ox l'axe dirigé suivant la quantité de mouvement totale $\mathbf{P}$; il vient :

$$P_x^* = \gamma_e \left(P_x - \beta_e \frac{\mathcal{E}}{c} \right) = 0 \quad P_y^* = P_y = 0 \quad \text{et} \quad P_z^* = P_z = 0$$

d'où :

$$\beta_e = \frac{v_e}{c} = \frac{P_x c}{\mathcal{E}} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_e = \frac{\mathbf{P} c^2}{\mathcal{E}}$$

Exemple : Déterminons la vitesse de translation de $\mathcal{R}^*$ associé à deux particules, l'une animée d'une vitesse $\mathbf{v}_1$, par rapport au référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, et l'autre A_2 fixe dans $\mathcal{R}$ (Fig. 7.1).

Comme $\sum_i \mathcal{E}_i = \gamma_1 m_1 c^2 + m_2 c^2$ et $\sum_i p_x = \gamma_1 m_1 v_1$, on obtient :

$$v_e = \frac{c^2 \gamma_1 m_1 v_1}{\gamma_1 m_1 c^2 + m_2 c^2} = \frac{v_1}{1 + m_2 / \gamma_1 m_1} \quad \text{d'où} \quad \gamma_e^2 = \frac{(\gamma_1 m_1 + m_2)^2}{m_1^2 + m_2^2 + 2\gamma_1 m_1 m_2}$$

Dans le cas d'un électron projectile et d'un proton cible, on a généralement $m_2 \gg \gamma_1 m_1$; v_e est alors négligeable et $\mathcal{R}^*$ coïncide pratiquement avec $\mathcal{R}$. En revanche, si le mouvement de A_1 est ultra-einsteinien ($m_2 \approx \gamma_1 m_1$), v_e n'est plus négligeable.

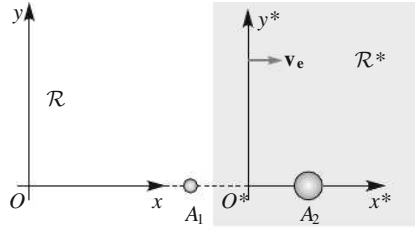


FIG. 7.1.

Si les deux particules sont identiques, $m_1 = m_2$, on trouve :

$$\gamma_e = \left(\frac{1 + \gamma_1}{2} \right)^{1/2}$$

Pour deux photons, de fréquences différentes ν_1 et ν_2 , dont les directions font, avec l'axe Ox , les angles θ_1 et θ_2 , on a :

$$\mathcal{E} = h(\nu_1 + \nu_2) \quad \text{et} \quad P_x c = h(\nu_1 \cos \theta_1 + \nu_2 \cos \theta_2) \quad \text{d'où} \quad \beta_e = \frac{\nu_1 \cos \theta_1 + \nu_2 \cos \theta_2}{\nu_1 + \nu_2}$$

Si les photons ont même fréquence ($\nu = \nu'$) et s'ils sont émis dans une même direction mais dans des sens opposés ($\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = \pi$), alors $v_e = 0$. S'ils sont émis dans le même sens ($\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = 0$), le résultat précédent donne $v_e = c$, ce qui doit être exclu, car les expressions utilisées supposent que γ_e soit fini ; physiquement, aucun référentiel ne peut se déplacer à la vitesse c .

II.2. — Propriétés générales des collisions dans $\mathcal{R}^*$

Le système considéré étant isolé, les propriétés générales des collisions dans $\mathcal{R}^*$ s'écrivent :

$$\sum_i \mathbf{p}_i^* = \sum_f \mathbf{p}_f^* = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \sum_i \mathcal{E}_i^* = \sum_f \mathcal{E}_f^*$$

Sur la figure 7.2, on a représenté les quantités de mouvements de deux particules en interaction, avant et après une collision élastique, dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}^*$.

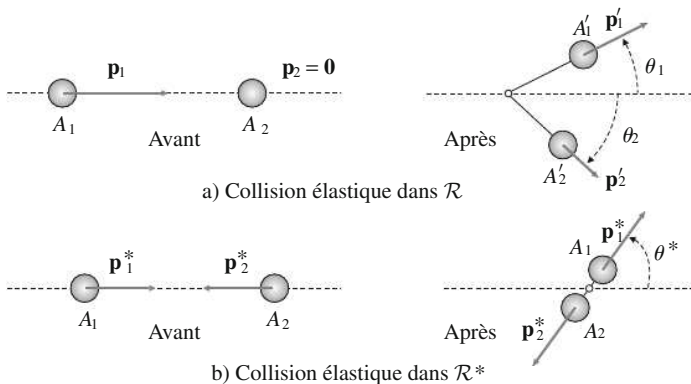


FIG. 7.2.

II.3. — Propriété caractéristique des collisions dans $\mathcal{R}^*$

Considérons une collision élastique entre deux particules A_1 et A_2 . En primant les grandeurs après collision, il vient, relativement à $\mathcal{R}^*$:

$$\mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^* = \mathbf{p}_1'^* + \mathbf{p}_2'^* = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_1^* + \mathcal{E}_2^* = \mathcal{E}_1'^* + \mathcal{E}_2'^*$$

On trouve, en introduisant la relation entre $\mathcal{E}$ et p pour chacune des particules :

$$p_1^{*2}c^2 = p_2^{*2}c^2 = \mathcal{E}_1^{*2} - m_1^2c^4 = \mathcal{E}_2^{*2} - m_2^2c^4 \quad \text{et} \quad p_1'^{*2}c^2 = p_2'^{*2}c^2 = \mathcal{E}_1'^{*2} - m_1^2c^4 = \mathcal{E}_2'^{*2} - m_2^2c^4$$

Par conséquent :

$$\mathcal{E}_2^{*2} - \mathcal{E}_1^{*2} = \mathcal{E}_2'^{*2} - \mathcal{E}_1'^{*2} = m_1^2c^4 - m_2^2c^4 \quad \text{soit} \quad (\mathcal{E}_2^* - \mathcal{E}_1^*)(\mathcal{E}_2^* + \mathcal{E}_1^*) = (\mathcal{E}_2'^* - \mathcal{E}_1'^*)(\mathcal{E}_2'^* + \mathcal{E}_1'^*)$$

d'où, en tenant compte de la conservation de l'énergie dans $\mathcal{R}^*$:

$$\mathcal{E}_2^* - \mathcal{E}_1^* = \mathcal{E}_2'^* - \mathcal{E}_1'^*$$

Finalement, la comparaison avec l'équation de conservation de l'énergie dans $\mathcal{R}^*$ donne :

$$\mathcal{E}_1^* = \mathcal{E}_1'^* \quad \mathcal{E}_2^* = \mathcal{E}_2'^* \quad p_1^* = p_1'^* = p_2^* = p_2'^*$$

Ainsi, dans $\mathcal{R}^*$, au cours d'une collision *élastique* entre deux particules, *chacune* d'elles *conserve* son énergie et la norme de sa quantité de mouvement. S'il n'en est pas ainsi, la collision est inélastique.

Cette propriété de conservation de l'énergie de chaque particule dans $\mathcal{R}^*$ est précieuse, car il suffit d'évaluer la variation d'énergie de la particule projectile pour savoir si la collision est élastique ou inélastique.

Remarque : Cette propriété caractéristique des collisions élastiques, dans le référentiel du centre de masse, est valable aussi en mécanique newtonienne (cf. *Mécanique*).

Le résultat précédent est utilisé en permanence en microscopie électronique où, en raison de la faible masse de l'électron, comparée à celle des atomes constituant l'objet à observer, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$ coïncident. Les collisions élastiques se réduisent alors à celles pour lesquelles les électrons incidents n'ont pas perdu d'énergie cinétique.

Il est instructif d'exprimer les énergies $\mathcal{E}_1^*$ et $\mathcal{E}_2^*$ en fonction de l'énergie totale $\mathcal{E}^*$. D'après ce qui précède, on a :

$$\mathcal{E}_2^{*2} - \mathcal{E}_1^{*2} = (\mathcal{E}_2^* - \mathcal{E}_1^*)(\mathcal{E}_2^* + \mathcal{E}_1^*) = m_2^2c^4 - m_1^2c^4$$

Par conséquent, puisque $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}_1^* + \mathcal{E}_2^*$:

$$\mathcal{E}_2^* - \mathcal{E}_1^* = \frac{m_2^2c^4 - m_1^2c^4}{\mathcal{E}^*}$$

Il en résulte que :

$$\mathcal{E}_1^* = \frac{\mathcal{E}^{*2} + (m_1^2c^4 - m_2^2c^4)}{2\mathcal{E}^*} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_2^* = \frac{\mathcal{E}^{*2} - (m_1^2c^4 - m_2^2c^4)}{2\mathcal{E}^*}$$

III. — COLLISIONS ÉLASTIQUES

De telles collisions entre une particule projectile A_1 (masse m_1) et une particule cible A_2 (masse m_2) au repos satisfont à la réaction (Fig. 7.2a) :

$$A_1 + A_2 \rightarrow A_1' + A_2'$$

dans laquelle la quantité de mouvement totale et l'énergie totale se conservent :

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_1 + m_2 c^2 = \mathcal{E}_1' + \mathcal{E}_2'$$

Il est naturel d'introduire les angles de diffusion des particules, par rapport à la direction incidente : $\theta_1 = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1')$ et $\theta_2 = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2')$ ou bien l'angle $\alpha = (\mathbf{p}_1', \mathbf{p}_2')$ que font entre elles les particules émergentes.

III.1. — Collision entre deux particules dans le référentiel $\mathcal{R}$

Afin d'exprimer l'angle α éliminons $\mathbf{p}_1$ et $\mathcal{E}_1$ entre les deux équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie. Il vient :

$$(\mathcal{E}_1' + \mathcal{E}_2' - m_2 c^2)^2 - (\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2')^2 c^2 = m_1^2 c^4$$

soit :

$$(\mathcal{E}_1' + \mathcal{E}_2')^2 - 2m_2 c^2 (\mathcal{E}_1' + \mathcal{E}_2') - p_1'^2 c^2 - p_2'^2 c^2 - 2p_1' p_2' c^2 \cos \alpha = m_1^2 c^4$$

On obtient, en développant et en simplifiant :

$$2m_2^2 c^4 + 2\mathcal{E}_1' \mathcal{E}_2' - 2m_2 c^2 (\mathcal{E}_1' + \mathcal{E}_2') - 2p_1' p_2' c^2 \cos \alpha = 0 \quad \text{d'où} \quad \cos \alpha = \frac{m_2^2 c^4 + \mathcal{E}_1' \mathcal{E}_2' - m_2 c^2 (\mathcal{E}_1' + \mathcal{E}_2')}{p_1' p_2' c^2}$$

On en déduit en exprimant les quantités de mouvement en fonction des énergies :

$$\cos \alpha = \frac{m_2^2 c^4 + \mathcal{E}_1' \mathcal{E}_2' - m_2 c^2 (\mathcal{E}_1' + \mathcal{E}_2')}{(\mathcal{E}_1'^2 - m_1^2 c^4)^{1/2} (\mathcal{E}_2'^2 - m_2^2 c^4)^{1/2}}$$

Si la collision concerne deux particules de même masse m , la relation précédente devient :

$$\cos \alpha = \frac{(\mathcal{E}_1' - mc^2)(\mathcal{E}_2' - mc^2)}{(\mathcal{E}_1'^2 - m^2 c^4)^{1/2} (\mathcal{E}_2'^2 - m^2 c^4)^{1/2}} = \frac{(\mathcal{E}_1' - mc^2)^{1/2} (\mathcal{E}_2' - mc^2)^{1/2}}{(\mathcal{E}_1' + mc^2)^{1/2} (\mathcal{E}_2' + mc^2)^{1/2}}$$

On voit que $\cos \alpha$ n'est pas nul et par conséquent que la collision entre deux particules, de même masse, n'implique pas, comme en mécanique newtonienne, un angle de $\pi/2$ entre les particules émergentes (cf. *Mécanique*). On retrouve aisément le résultat newtonien en faisant dans la relation précédente :

$$\mathcal{E}_1' \approx mc^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_2' \approx mc^2$$

Pour une telle collision entre deux particules de même masse, par exemple des protons (Fig. 7.3a), on peut vérifier que la relation vectorielle de conservation de la quantité de mouvement est bien vérifiée (Fig. 7.3b).

En effet, en mesurant les rayons de courbure des trajectoires incurvées par un champ magnétique (cf. chapitre 6), on obtient les normes des quantités de mouvement connaissant p_1 , puisque :

$$\frac{p_1}{R_1} = \frac{p_1'}{R_1'} = \frac{p_2'}{R_2'}$$

On en déduit p_1' , p_2' , $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_1'$ et $\mathcal{E}_2'$; on constate alors que la relation scalaire de conservation de l'énergie est bien satisfaite.

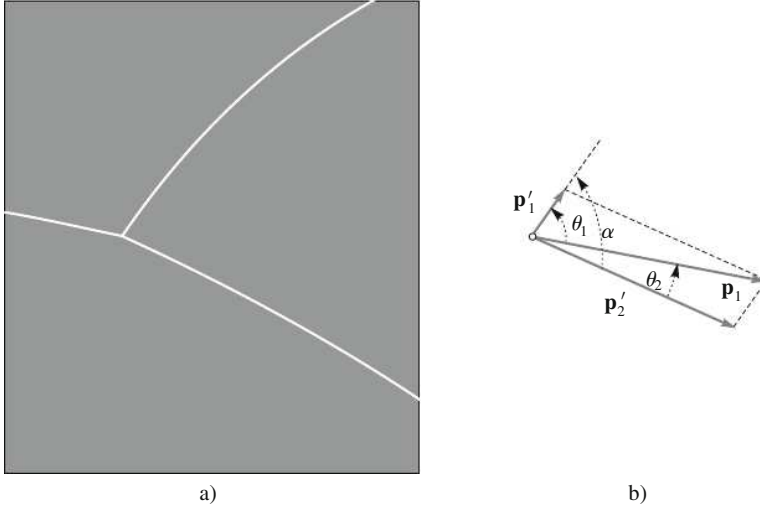


FIG. 7.3.

Lorsque ce n'est pas le cas, il est nécessaire de revenir sur l'hypothèse même d'une collision élastique : on a pu oublier la création d'une particule neutre (neutron, neutrino, photon, etc.) qui, elle, ne laisse aucune trace dans un détecteur sensible uniquement aux particules chargées (cf. chapitre 8). Nous reviendrons plus loin sur ce point en analysant en détail les collisions inélastiques.

Remarque : L'exploitation technique des résultats expérimentaux est grandement facilitée si l'on adopte comme unité le MeV pour les énergies, le $\text{MeV} \cdot \text{c}^{-1}$ pour les quantités de mouvement et le $\text{MeV} \cdot \text{c}^{-2}$ pour les masses. Par exemple, pour la collision élastique entre deux protons de la figure 7.3, on écrit :

$$p_1 = 2607 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-1} \quad p_2 = 0 \quad \text{et} \quad m_1 = m_2 = m_p \approx 938 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2}$$

III. 2. — Détermination de la masse d'une particule projectile

Supposons que la collision élastique concerne une particule cible connue et une particule projectile, de masse inconnue, dont on sait déterminer la valeur p_1 de la quantité de mouvement, grâce à un champ magnétique. Comme on souhaite éliminer les caractéristiques de la particule projectile après collision, écrivons les équations de conservation sous la forme :

$$\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}'_1 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}'_2 + m_2 c^2$$

ce qui donne :

$$(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}'_2 + m_2 c^2)^2 - (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_2)^2 c^2 = m_1^2 c^4$$

Il vient, en effectuant et en simplifiant :

$$\mathcal{E}_1^2 + (\mathcal{E}'_2 - m_2 c^2)^2 - 2\mathcal{E}_1(\mathcal{E}'_2 - m_2 c^2) - p_1^2 c^2 - p_2'^2 c^2 + 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}'_2 c^2 = m_1^2 c^4$$

soit :

$$(\mathcal{E}'_2 - m_2 c^2)^2 - 2\mathcal{E}_1(\mathcal{E}'_2 - m_2 c^2) - p_2'^2 c^2 + 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}'_2 c^2 = 0$$

On trouve :

$$\mathcal{E}_1 \mathcal{E}'_2 - p_1 p'_2 c^2 \cos \theta_2 = m_2 c^2 (m_2 c^2 - \mathcal{E}'_2 + \mathcal{E}_1) \quad \text{soit} \quad p_1 c (\mathcal{E}'_2 - m_2 c^4)^{1/2} \cos \theta_2 = (\mathcal{E}_1 + m_2 c^2)(\mathcal{E}'_2 - m_2 c^2)$$

si l'on remplace p'_2 par son expression en fonction de l'énergie et si l'on désigne par θ_2 l'angle de diffusion expérimentalement accessible que fait la cible avec la direction incidente, après collision. Il en résulte, en élevant au carré :

$$p_1^2 c^2 \frac{(\mathcal{E}'_2 - m_2 c^4)}{(\mathcal{E}'_2 - m_2 c^2)^2} \cos^2 \theta_2 = (\mathcal{E}_1 + m_2 c^2)^2$$

Plaçons-nous dans le cas où l'énergie de masse $m_2 c^2$ de la particule cible est faible devant l'énergie $\mathcal{E}_1$ du projectile, avant collision. Il vient :

$$p_1^2 c^2 \frac{(\mathcal{E}'_2 - m_2 c^4)}{(\mathcal{E}'_2 - m_2 c^2)^2} \cos^2 \theta_2 \approx \mathcal{E}_1^2 = p_1^2 c^2 + m_1^2 c^4$$

d'où :

$$m_1^2 c^4 \approx p_1^2 c^2 \left[\frac{(\mathcal{E}'_2 - m_2 c^4)}{(\mathcal{E}'_2 - m_2 c^2)^2} \cos^2 \theta_2 - 1 \right]$$

C'est ainsi que fut déterminée, pour la première fois en 1943, par L. Leprince-Ringuet et M. Lhéritier, la masse de la particule K^+ , au cours d'une collision élastique avec un électron au repos (Fig. 7.4) :

$$K^+ + e \rightarrow K^+ + e$$

Les valeurs des quantités mesurées étaient les suivantes :

$$p_1 = 510 \text{ MeV} \cdot c^{-1} \quad \mathcal{E}'_2 = 1,77 \text{ MeV} \quad \text{et} \quad \theta_2 = 20^\circ \quad \text{d'où} \quad m_1 c^2 = 510 \text{ MeV}$$

sachant évidemment que $m_2 c^2 = m_e c^2 \approx 0,511 \text{ MeV} \ll \mathcal{E}_1$. Cette valeur expérimentale de 510 MeV pour $m_{K^+} c^2$ est à comparer à celle retenue actuellement de 493,7 MeV.

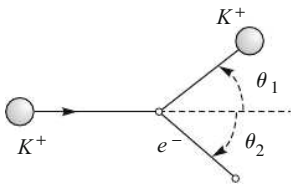


FIG. 7.4.

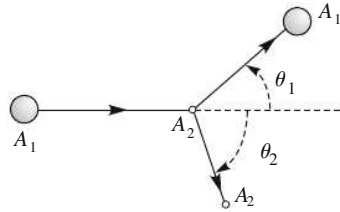


FIG. 7.5.

III. 3. — Étude générale d'une diffusion élastique par une cible au repos

Dans une collision élastique entre deux particules, le problème posé est généralement le suivant : une particule projectile très rapide A_1 est diffusée élastiquement par une particule cible A_2 , fixe dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$. Comment exprimer les angles de diffusion des particules, par rapport à la direction incidente (Fig. 7.5) : $\theta_1 = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_1)$ et $\theta_2 = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_2)$?

La forme de l'interaction n'étant pas connue, il est impossible de déterminer ces valeurs ; cependant on pourra relier θ_1 et θ_2 à un même paramètre qu'il est commode de prendre égal à l'angle de diffusion de la particule incidente dans $\mathcal{R}^*$ (Fig. 7.2b) : $\theta^* = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_1^*)$.

a) Expression des angles de diffusion

Écrivons les formules de transformation de $4-p_1$ et $4-p_2$ dans un changement de référentiel galiléen entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$. En introduisant les quantités $p^* = |\mathbf{p}^*| = |\mathbf{p}_1^*| = |\mathbf{p}_2^*| = |\mathbf{p}_2'^*|$, $\mathcal{E}_1^* = \mathcal{E}_1'^*$ et $\mathcal{E}_2^* = \mathcal{E}_2'^*$, on obtient, pour A_1 :

$$p_1' \cos \theta_1 = \gamma_e (p^* \cos \theta^* + \beta_e \mathcal{E}_1^*/c) \quad \text{et} \quad p_1' \sin \theta_1 = p^* \sin \theta^*$$

d'où, en divisant membre à membre :

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta^*}{\gamma_e (\cos \theta^* + \beta_e \mathcal{E}_1^*/p^*c)}$$

De même pour A_2 :

$$p_2' \cos \theta_2 = \gamma_e (-p^* \cos \theta^* + \beta_e \mathcal{E}_2^*/c) \quad \text{et} \quad p_2' \sin \theta_2 = -p^* \sin \theta^*$$

d'où :

$$\tan \theta_2 = \frac{\sin \theta^*}{\gamma_e (\cos \theta^* - \beta_e \mathcal{E}_2^*/p^*c)}$$

Pour une collision élastique entre deux particules *identiques*, nous avons, puisque $\mathcal{E}_1^* = \mathcal{E}_2^*$:

$$\beta_e \frac{\mathcal{E}_1^*}{p^*c} = \beta_e \frac{\mathcal{E}_2^*}{p^*c}$$

D'autre part, les formules de transformation de Lorentz appliquées à $4-p_2$ entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$ donnent, puisque la cible est au repos dans $\mathcal{R}$:

$$0 = \gamma_e (-p^* + \beta_e \mathcal{E}_2^*/c) \quad \text{soit} \quad \beta_e \frac{\mathcal{E}_2^*}{p^*c} = 1$$

Il en résulte que :

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta^*}{\gamma_e (\cos \theta^* + 1)} \quad \text{et} \quad \tan \theta_2 = \frac{\sin \theta^*}{\gamma_e (\cos \theta^* - 1)}$$

soit, puisque $\gamma_e^2 = (1 + \gamma_1)/2$:

$$\tan \theta_1 = \left(\frac{2}{\gamma_1 + 1} \right)^{1/2} \tan \left(\frac{\theta^*}{2} \right) \quad \text{et} \quad \tan \theta_2 = - \left(\frac{2}{\gamma_1 + 1} \right)^{1/2} \cotan \left(\frac{\theta^*}{2} \right)$$

La relation entre θ_1 et θ_2 peut donc s'écrire simplement :

$$\tan \theta_1 \times \tan \theta_2 = -2 \frac{1}{\gamma_1 + 1} \quad \text{d'où} \quad \tan \theta_1 \times \tan \theta_2 = -1 \quad \text{si} \quad \gamma_1 = 1$$

b) Perte d'énergie de la particule incidente

Dans le référentiel du laboratoire, la perte d'énergie de la particule incidente est l'énergie $Q = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_1'$ acquise par la particule cible A_2 . Comme l'énergie et la quantité de mouvement de A_2 valent respectivement $Q + m_2 c^2$ et $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1'$, on a la relation suivante :

$$(Q + m_2 c^2)^2 - (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1')^2 c^2 = m_2^2 c^4 \quad \text{ce qui se met sous la forme} \quad Q = \frac{1}{2m_2} \left[(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1')^2 - \frac{Q^2}{c^2} \right]$$

Par conséquent :

$$Q = -\frac{1}{2m_2} \|4 \cdot P\|^2 \quad \text{avec} \quad 4 \cdot P = \left(\frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}'_1}{c}, \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1 \right)$$

Comme $\|4 \cdot P\|^2$ est invariant par changement de référentiel galiléen, il vient :

$$Q = \frac{1}{2m_2} \left[(\mathbf{p}_1^* - \mathbf{p}'_1)^2 - \frac{(\mathcal{E}_1^* - \mathcal{E}'_1)^2}{c^2} \right]$$

La collision étant élastique, on a $\mathcal{E}_1^* = \mathcal{E}'_1^*$ et $p_1^* = p'_1^*$. Il en résulte (Fig. 7.2b) :

$$(\mathbf{p}_1^* - \mathbf{p}'_1)^2 = 4p_1^{*2} \sin^2 \left(\frac{\theta^*}{2} \right) = 4p^{*2} \sin^2 \left(\frac{\theta^*}{2} \right) \quad \text{d'où} \quad Q = \frac{\mathbf{p}_1^* - \mathbf{p}'_1^*}{2m_2} = \frac{2p^{*2}}{m_2} \sin^2 \left(\frac{\theta^*}{2} \right)$$

D'autre part, la vitesse de A_2 par rapport à $\mathcal{R}^*$, avant la collision, étant $-\mathbf{v}_e$, p^* vaut :

$$p^* = \gamma_e m_2 v_e = \beta_e \gamma_e \beta_e m_2 c = (\gamma_e^2 - 1)^{1/2} m_2 c \quad \text{avec} \quad \gamma_e = (1 - v_e^2/c^2)^{-1/2}$$

Finalement, on obtient :

$$Q = 2(\gamma_e^2 - 1) m_2 c^2 \sin^2 \left(\frac{\theta^*}{2} \right)$$

soit, en tenant compte de l'expression de γ_e^2 en fonction de γ_1 :

$$Q = \frac{2m_1^2(\gamma_1^2 - 1)}{m_1^2 + m_2^2 + 2\gamma_1 m_1 m_2} m_2 c^2 \sin^2 \left(\frac{\theta^*}{2} \right)$$

On en déduit la valeur maximale de Q :

$$Q_{\max} = \frac{2m_1^2(\gamma_1^2 - 1)}{m_1^2 + m_2^2 + 2\gamma_1 m_1 m_2} m_2 c^2$$

Pour une collision entre deux particules *identiques* ($m_1 = m_2 = m$), $Q_{\max}$ se réduit à :

$$Q_{\max} = (\gamma_1 - 1) m c^2$$

La particule incidente peut donc perdre complètement son énergie cinétique en la cédant à la particule cible.

Remarque : Ce résultat suppose admise l'hypothèse classique de la discernabilité de deux particules identiques en interaction. En physique quantique, cette hypothèse étant exclue, la valeur maximale admise de $Q_{\max}$ est, dans ce cas, non pas $(\gamma_1 - 1) m c^2$ mais la moitié de cette valeur.

c) Approximation newtonienne

On retrouve les expressions newtoniennes de $\tan \theta_1$ et $\tan \theta_2$, en faisant $v_1 \ll c$ dans les expressions précédentes :

$$\gamma_e \approx 1 \quad \mathcal{E}_1^* \approx m_1 c^2 \quad \mathcal{E}_2^* \approx m_2 c^2 \quad p^* \approx m_1 v_1^* \approx m_1 (v_1 - v_e)$$

Comme $v_e = \beta_e c \approx v_1/(1 + m_2/m_1)$, on obtient :

$$p^* \approx \frac{m_2}{1 + m_2/m_1} v_1 \quad \text{et} \quad \frac{p^* c}{\beta_e} \approx m_2 c^2$$

Ainsi :

$$\tan \theta_1 \approx \frac{\sin \theta^*}{\cos \theta^* + m_1/m_2} \quad \text{et} \quad \tan \theta_2 \approx \frac{\sin \theta^*}{\cos \theta^* - 1} = -\frac{1}{\tan \theta^*/2} \quad \text{soit} \quad |\theta_2| = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta^*}{2}$$

Lorsque les particules sont identiques, ces expressions deviennent :

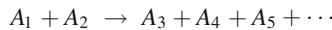
$$\tan \theta_1 \approx \frac{\sin \theta^*}{\cos \theta^* + 1} = \tan \left(\frac{\theta^*}{2} \right) \quad \text{et} \quad \tan \theta_2 \approx \frac{\sin \theta^*}{\cos \theta^* - 1} = -\frac{1}{\tan \theta^*/2} \quad \text{d'où} \quad \tan \theta_1 \times \tan \theta_2 = -1$$

Les deux particules identiques sont diffusées à 90° (cf. *Mécanique*). On retrouve aussi la perte d'énergie maximale de la particule incidente, dans l'approximation newtonienne, en faisant $\gamma_1^2 - 1 \approx \beta_1^2$ dans l'expression générale de $Q_{\max}$:

$$Q_{\max} \approx \frac{2m_1^2 \beta_1^2}{(m_1 + m_2)^2} m_2 c^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \mathcal{E}_{k,1}$$

IV. — COLLISIONS INÉLASTIQUES

Il est commode de représenter les collisions inélastiques par une réaction de la forme :



dans laquelle A_1 et A_2 désignent les particules incidentes et A_3, A_4, A_5 , etc. les particules émergentes. Cette notation souligne que, dans de telles collisions, le nombre ou la nature des particules sont modifiés.

IV.1. — Lois de conservation supplémentaires

Les collisions inélastiques sont répertoriées différemment suivant la nature des particules incidentes et émergentes. Comme le nombre et la nature des particules changent, il est intéressant de prendre en compte les lois de conservation supplémentaires auxquelles elles doivent satisfaire en dehors de la conservation de la quantité de mouvement et de celle de l'énergie :

i) la conservation de la charge électrique Q ;

ii) la conservation du nombre B de baryons, lesquels sont des états liés de trois quarks (cf. chapitre 8) ; le nombre baryonique des protons et des neutrons vaut 1, alors qu'il vaut 0 pour les leptons, lesquels sont des particules légères, telles que les électrons, les muons et leurs antiparticules (cf. chapitre 8).

iii) la conservation du nombre L de leptons, lequel vaut 0 pour les protons, les neutrons et leurs antiparticules (cf. chapitre 8).

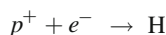
Le tableau 7.2 fournit les valeurs de Q et B pour quelques particules. On en déduit celles des antiparticules correspondantes en changeant les signes de Q et de B .

Particules	Masse ($\text{MeV} \cdot \text{c}^{-2}$)	Charge Q (en unité e)	Nombre baryonique B
proton p^+	938,27	+1	+1
neutron n	939,565	0	+1
électron e^-	0,511	-1	0
positron e^+	0,511	+1	0
photon γ	0	0	0
neutrino ν_e	$2,8 \times 10^{-6}$	0	0
méson π^0	135	0	0
méson π^+	139,6	+1	0
méson π^-	139,6	-1	0
méson K^+	493,7	1	0
méson K^0	498	0	0
méson μ^+	105,6	1	0
méson μ^-	105,6	-1	0

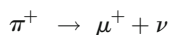
TAB. 7.2.

Exemples

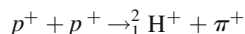
1) Formation de l'atome d'hydrogène à partir d'un électron et d'un proton :



2) Particule donnant spontanément deux particules ; désintégration du méson π^+ en un méson μ^+ et un neutrino ν :

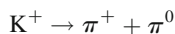


3) Collisions entre particules donnant deux ou plus de deux particules



où ${}_1^2\text{H}^+$ le deuton.

Remarque : Historiquement, on a proposé d'autres lois de conservation, comme la conservation du nombre d'étrangeté S (de strange en anglais), appelée ainsi car les particules à l'époque se comportaient de façon étrange. Cependant cette loi est parfois violée, comme dans la désintégration d'un méson K^+ de nombre d'étrangeté 1, selon la réaction suivante, établie expérimentalement en 1947 :



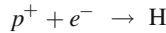
En effet, les pions π^+ et π^0 étant des particules de nombres d'étrangeté nuls, l'étrangeté n'est pas conservée.

IV.2. — Transformation réciproque de masse en énergie

La transformation réciproque de masse en énergie est plus ou moins importante selon la nature des collisions inélastiques. Dans la physique atomique ou moléculaire, sa contribution est négligeable, alors que son rôle est décisif dans les réactions nucléaires.

a) Défaut de la somme des masses dans l'atome d'hydrogène

Analysons la réaction de formation d'un atome d'hydrogène dans son état fondamental, à partir d'un proton et d'un électron selon la collision inélastique :



Dans le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$, l'énergie de l'atome s'écrit :

$$\mathcal{E}^* = m_H c^2 \quad \text{soit} \quad \mathcal{E}^* = m_p c^2 + m_e c^2 + \mathcal{E}_k^* + \mathcal{E}_p$$

en séparant les énergies de masse, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle d'interaction électrostatique :

$$m_H c^2 = m_p c^2 + m_e c^2 + \mathcal{E}_k^* + \mathcal{E}_p \quad \text{et} \quad \mu c^2 = m_p c^2 + m_e c^2 - m_H c^2 = \mathcal{E}_k^* + \mathcal{E}_p = -13,6 \text{ eV}$$

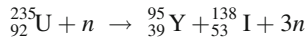
car, dans l'état fondamental : $\mathcal{E}_k^* + \mathcal{E}_p = -13,6 \text{ eV}$. On voit que le défaut de la somme des masses est ici négligeable, puisqu'il ne représente qu'une très faible fraction ($\sim 10^{-8}$) de l'énergie de masse des réactifs :

$$\mu c^2 \approx 0 \quad \text{et} \quad m_H c^2 \approx m_p c^2 + m_e c^2$$

Il en est de même pour toute la chimie atomique et moléculaire où les énergies mises en jeu sont très faibles devant les énergies de masse. Aussi, dans ce contexte, admet-on la conservation de la somme des masses d'un système et identifie-t-on la masse de ce dernier à la somme des masses de ses constituants.

b) Défaut de la somme des masses dans la fission d'un noyau lourd

La réaction suivante est une réaction importante de fission d'un noyau lourd, le noyau de l'uranium 235 :



Parmi les produits de réaction, I désigne l'iode et Y l'yttrium. Dans cette réaction, le défaut de la somme des énergies de masse est $\mu c^2 = 240 \text{ MeV}$, d'où l'énergie libérée par mole de noyaux ($\approx 240 \text{ g}$) :

$$Q_m = \mu c^2 \times N_A = 240 \times 6,12 \times 10^{23} \text{ MeV} \approx 2 \times 10^{13} \text{ J}$$

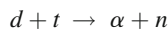
Ce résultat est énorme, comparé à l'énergie $4 \times 10^5 \text{ J}$ fournie par la combustion de 12 g de carbone dans 32 g d'oxygène.

La fission de noyaux d'uranium 235 est à la base du fonctionnement des centrales nucléaires : l'énergie cinétique des neutrons est récupérée pour produire de la vapeur d'eau, laquelle fait tourner une turbine qui produit de l'électricité (cf. chapitre 8).

Remarque : La forme guerrière d'une centrale nucléaire est la bombe A (atomique).

c) Défaut de la somme des masses dans la fusion de deux noyaux légers

Une réaction de fusion typique est l'interaction d'un deutéron d (noyau de deutérium ${}^2_1\text{H}^+$) et d'un triton t (noyau de tritium ${}^3_1\text{H}^+$) donnant un hélium α (noyau d'hélium ${}^4_2\text{He}^{2+}$) et un neutron :



Le défaut de la somme des énergies de masse vaut ici (cf. TAB 7.2) :

$$\mu c^2 = m_\alpha c^2 + m_n c^2 - m_d c^2 - m_t c^2 = 1875,56 + 2808,84 - 3727,27 - 939,55 \approx 17,6 \text{ MeV}$$

ce qui représente la fraction $3,8 \times 10^{-3}$ de la somme des énergies de masse des réactifs. On en déduit l'énergie libérée par mole de réactifs (deutéron et triton), c'est-à-dire pour 5 g de matière :

$$Q_m = \mu c^2 \times N_A = 17,57 \times 6,02 \times 10^{23} \text{ MeV} \approx 1,7 \times 10^{12} \text{ J}$$

Compte tenu de la masse molaire, ce résultat est du même ordre de grandeur que celui obtenu dans la fission.

Remarques : 1) La fusion de noyaux légers permet de comprendre le rayonnement énergétique des étoiles (cf. chapitre 8).

2) La fusion est aussi à la base du fonctionnement de la bombe H (à hydrogène). La bombe à neutrons ou bombe N, conçue en 1979, n'est qu'une bombe H de faible puissance. Dans ce cas, les effets mécaniques destructeurs sont plus faibles que les effets d'irradiation qui déciment l'ennemi, d'où son intérêt guerrier.

IV . 3 . — Seuil énergétique d'une collision inélastique

Une collision inélastique, entre deux particules A_1 et A_2 , qui donne de nouvelles particules A_3 , A_4 , A_5 , etc., ne peut se produire qu'à la condition que l'énergie totale du système soit suffisante. Nous nous proposons d'établir l'expression du seuil énergétique.

a) Cas où la cible est au repos

Soit deux particules, le projectile A_1 et la cible A_2 au repos par rapport au référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$. Supposons qu'après la collision apparaissent plusieurs particules A_3 , A_4 , A_5 , etc.

$$A_1 + A_2 \rightarrow A_3 + A_4 + A_5 + \dots$$

Une telle réaction n'est possible que si l'énergie du système $\{A_1, A_2\}$ est supérieure à une valeur minimale appelée *énergie seuil* $\mathcal{E}_s$.

Pour déterminer ce seuil, il est commode de se placer dans le référentiel $\mathcal{R}^*$, seul référentiel où, en raison de la définition de $\mathcal{R}^*$ ($\mathbf{P}^* = \mathbf{0}$), les particules émergentes peuvent être *simultanément* au repos ($\mathbf{p}_f = \mathbf{0}$ quel que soit f). Ainsi :

$$\mathcal{E}^* \geq (m_3 + m_4 + m_5 + \dots) c^2 \quad \text{soit} \quad \mathcal{E}^* \geq \sum_f m_f c^2$$

Afin d'exprimer cette condition en termes énergétiques du référentiel $\mathcal{R}$, utilisons l'invariance de la norme 4-P :

$$\mathcal{E}^2 - p^2 c^2 = \mathcal{E}^{*2} - p^{*2} c^2 = \mathcal{E}^{*2} \quad \text{soit} \quad (\mathcal{E}_1 + m_2 c^2)^2 - p_1^2 c^2 = \mathcal{E}^{*2}$$

La condition précédente peut ainsi s'écrire :

$$(\mathcal{E}_1 + m_2 c^2)^2 - p_1^2 c^2 \geq \left(\sum_f m_f c^2 \right)^2 \quad \text{ce qui donne} \quad \mathcal{E}_1 \geq \frac{(\sum_f m_f c^2)^2 - (m_1^2 + m_2^2) c^4}{2m_2 c^2}$$

Il vient, pour l'énergie cinétique $\mathcal{E}_{k,1}$, qui est aussi celle des deux particules incidentes, puisque $\mathcal{E}_{k,2} = 0$:

$$\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_{k,1} = \mathcal{E}_1 - m_1 c^2 \geq \frac{(\sum_f m_f c^2)^2 - (m_1^2 + m_2^2) c^4 - 2m_1 m_2 c^4}{2m_2 c^2}$$

Retenons donc :

$$\mathcal{E}_{k,1} \geq \mathcal{E}_{k,1}^s \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_{k,1}^s = \frac{(\sum_f m_f c^2)^2 - (\sum_i m_i c^2)^2}{2m_2 c^2}$$

Ce résultat peut être obtenu à l'aide de la représentation pythagoricienne de la relation entre l'énergie et la quantité de mouvement d'une particule (cf. chapitre 5). En effet, sur la figure 7.6a, on voit que :

$$AB^2 = (p_3 + p_4 + p_5 + \dots)^2 c^2 + (m_3 + m_4 + m_5 + \dots)^2 c^4$$

Or, dans cette représentation, une ligne brisée entre deux points est plus longue qu'une ligne droite. Par conséquent :

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 + m_2 c^2 = \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4 + \mathcal{E}_5 + \dots \geq AB \quad \text{et} \quad p_1 + p_2 = p_1 \leq p_3 + p_4 + p_5 + \dots$$

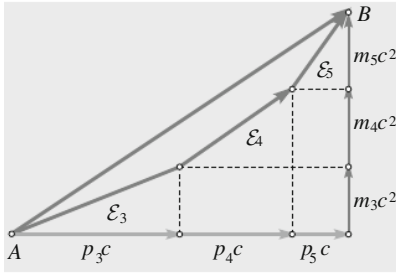
puisque $\mathcal{E}_2 = m_2 c^2$ et $p_2 = 0$. Il en résulte (Fig. 7.6b) :

$$(\mathcal{E}_1 + m_2 c^2)^2 \geq AB^2 \quad \text{avec} \quad AB^2 \geq p_1^2 c^2 + (m_3 + m_4 + m_5 + \dots)^2 c^4$$

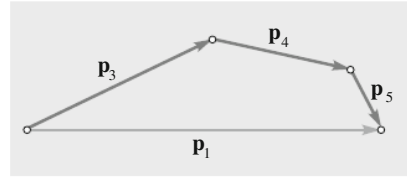
On en déduit :

$$(\mathcal{E}_1 + m_2 c^2)^2 \geq p_1^2 c^2 + (m_3 + m_4 + m_5 + \dots)^2 c^4 \quad \text{soit} \quad \mathcal{E}_1 \geq \frac{(m_3 + m_4 + m_5 + \dots)^2 c^4 - (m_1^2 + m_2^2) c^4}{2m_2 c^2}$$

On retrouve bien le résultat déjà établi.



a)



b)

FIG. 7.6.

Exemples :

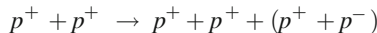
i) Seuil énergétique du proton incident dans la réaction $p^+ + p^+ \rightarrow p^+ + n + \pi^+$.

La formule précédente donne :

$$\mathcal{E}_{k,1}^s = \frac{(m_p + m_n + m_{\pi^+})^2 c^4 - 4m_p^2 c^4}{2m_p c^2} \approx 293 \text{ MeV}$$

ii) Découverte de l'antiproton

Une collision inélastique entre protons peut produire une paire proton-antiproton selon la réaction suivante :



Dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$ où le proton cible est fixe, l'expression du seuil énergétique de production de la paire proton-antiproton donne :

$$\mathcal{E}_{k,1}^s = \frac{(4m_p c^2)^2 - (2m_p c^2)^2}{2m_p c^2} = 6m_p c^2 \sim 6 \text{ GeV}$$

C'est par cette réaction que les physiciens américains E. Segrè et O. Chamberlain ont pu mettre en évidence l'antiproton en 1955, sur le synchrotron de 6 GeV à Berkeley ; cette découverte leur a valu, peu après, le prix Nobel en 1959.

b) Cas où la cible est en mouvement

On a toujours $\mathcal{E}^{*2} \geq (m_3 + m_4 + m_5 + \dots)^2 c^4$ avec :

$$\mathcal{E}^{*2} = \mathcal{E}^2 - P^2 c^2 = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 c^2$$

Par conséquent, en développant et en simplifiant, on obtient :

$$m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 - 2p_1 p_2 c^2 \cos \theta \geq (m_3 + m_4 + m_5 + \dots)^2 c^4$$

θ étant l'angle que fait $\mathbf{p}_2$ avec $\mathbf{p}_1$. Pour déterminer l'énergie-seuil, il est nécessaire de connaître θ .

Il est intéressant de noter que la condition énergétique pour qu'une réaction de collision puisse se réaliser est toujours moins coûteuse dans le référentiel du centre de masse que dans tout autre référentiel. En effet :

$$\mathcal{E}^2 - P^2 c^2 = \mathcal{E}^{*2} \quad \text{implique} \quad \mathcal{E} \geq \mathcal{E}^*$$

C'est précisément ce que les scientifiques européens du CERN ont réalisé avec succès dans le cas de la production d'une paire proton-antiproton ; le proton-cible est mis en mouvement de telle sorte que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$ coïncident. Pour la réaction de production des antiprotons à partir de protons incidents, on a, dans $\mathcal{R}^*$:

$$\mathcal{E}^* \geq 4m_p c^2 \quad \text{d'où} \quad \mathcal{E}_k^{*s} = \mathcal{E}^{*s} - 2m_p c^2 = 2m_p c^2$$

au lieu de $\mathcal{E}_k^s = 6m_p c^2$! Un tel gain énergétique a été obtenu pour la première fois au CERN, en 1971, par la technique des anneaux de stockage (Fig. 7.7a). Cette technique consiste à donner aux protons initiaux, projectile et cible, des vitesses opposées. Précisément, à l'aide de champs magnétiques, on fait décrire aux particules incidentes des trajectoires sensiblement circulaires, en sens opposé. Sur la figure 7.7a, on a représenté le collisionneur ISR (*Intersecting Storage Rings*) du CERN, avec ses huit zones de collision, dans lesquelles on a produit des antiprotons à moindre coût.

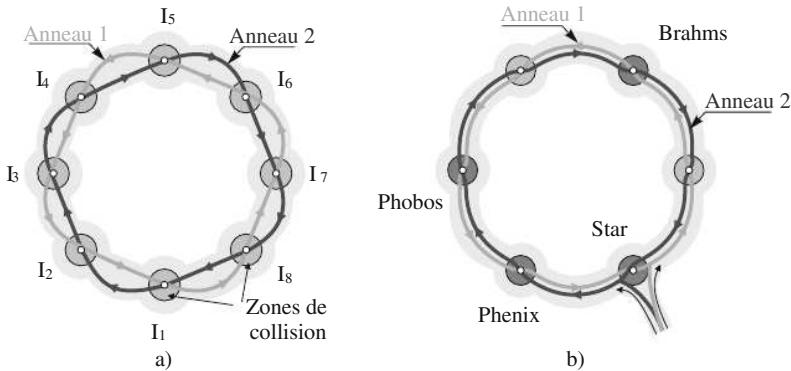


FIG. 7.7.

Depuis, cette technique des anneaux de stockage s'est largement développée. Ainsi, récemment on a construit sous terre, à Brookhaven (Long Island, Etats-Unis), un collisionneur d'ions lourds relativistes (RHIC pour *Relativistic Heavy Ions Collisionor*), de 3,8 km de diamètre (Fig. 7.7b). Les ions, dont

la masse est comprise entre $1 \text{ GeV} \cdot \text{c}^{-2}$ et $190 \text{ GeV} \cdot \text{c}^{-2}$, seront accélérés jusqu'à des énergies cent fois supérieures. Ils peuvent entrer en collision en six points de leurs trajectoires. Le but recherché est de se rapprocher de conditions énergétiques analogues à celles présumées de l'Univers primordial (cf. chapitre 10).

Remarque : Dans le prochain collisionneur du CERN, LHC (Large Hadron Collider), l'énergie de chaque proton sera de 7 TeV . Calculons l'énergie équivalente d'un proton-projectile envoyé sur un proton-cible :

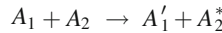
$$\mathcal{E}^{*2} = \mathcal{E}^2 - P^2 c^2 = (\mathcal{E}_1 + m_p c^2)^2 - p_1^2 c^2 = 2m_p^2 c^2 + 2\mathcal{E}_1 m_p c^2$$

d'où

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\mathcal{E}^{*2} - 2m_p^2 c^2}{2m_p c^2} \approx \frac{14^2}{2 \times 0,938 \times 10^{-3}} \approx 104,5 \times 10^3 \text{ TeV}$$

V. — DIFFUSION INÉLASTIQUE D'UNE PARTICULE PAR UN ATOME

L'importance de ce sujet est considérable puisqu'une telle diffusion concerne tout le domaine de l'excitation des atomes d'un matériau quelconque traversé par une particule incidente. On peut schématiser une telle diffusion par l'équation de réaction :



où l'atome cible A_2 change d'état par excitation ou ionisation. Notons que le projectile A_1 peut être absorbé comme dans l'effet photo-électrique, auquel cas A'_1 disparaît.

La diffusion inélastique des particules chargées par des atomes a été beaucoup étudiée, en particulier par le physicien allemand H. A. Bethe (récompensé par le prix Nobel en 1971 pour ses travaux sur les réactions de fusion dans les étoiles) ; elle fait encore l'objet de recherches, notamment dans le domaine des rayonnements ionisants.

Les collisions inélastiques entre particule et atome sont plus précisément des collisions entre la particule projectile et l'électron atomique en interaction avec le cœur de l'atome (Fig. 7.8).

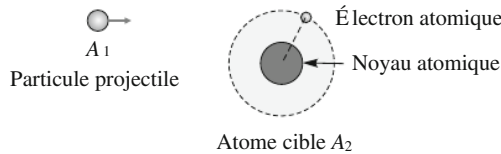


FIG. 7.8.

L'interaction étant coulombienne, on montre alors que la diffusion à faible angle est beaucoup plus probable que celle à fort angle et que les valeurs minimale et maximale de l'angle de diffusion jouent un rôle important dans la détermination du pouvoir d'arrêt des matériaux traversés par des particules chargées (cf. chapitre 8).

Comme pour la diffusion élastique, il est commode d'introduire le carré de la pseudo-norme du quadrivecteur $4\text{-}P$ égal à la différence des quadrivecteurs $4\text{-}p_1$ et $4\text{-}p'_1$ de la particule projectile A_1 , précisément la grandeur énergétique Q , suivante :

$$Q = -\frac{\|4\text{-}P\|^2}{2m_2} = \frac{1}{2m_2} \left[(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)^2 - \frac{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}'_1)^2}{c^2} \right]$$

m_2 étant la masse de la particule cible, c'est-à-dire celle m_e de l'électron atomique. Notons qu'en raison de l'interaction de l'électron avec le noyau de l'atome, l'énergie transférée à l'atome Q ne s'identifie plus à $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}'_1$.

La valeur maximale Q_{max} est facile à déterminer, puisque l'énergie transférée à l'électron atomique est dans ce cas très grande devant son énergie de liaison ($\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}'_1$) : l'électron atomique peut être considéré comme libre et Q_{max} interprété comme le transfert maximal d'énergie au cours de la collision élastique *particule incidente-électron atomique*. Il en résulte, d'après l'analyse déjà faite, que :

$$Q_{max} = \frac{2m_1^2(\gamma_1^2 - 1)}{m_1^2 + m_e^2 + 2\gamma_1 m_1 m_e} m_e c^2$$

Si la particule incidente est un électron, on trouve :

$$Q_{max} = (\gamma_1 - 1)m_e c^2$$

c'est-à-dire la valeur de l'énergie cinétique de la particule incidente, ce qui était prévisible. En réalité, la valeur retenue pour Q_{max} dans ce dernier cas est $(\gamma_1 - 1)m_e c^2/2$ en raison de l'indiscernabilité des particules en interaction, électron incident et électron atomique.

Quant à la valeur minimale Q_{min} , elle correspond à l'existence d'une valeur minimale des énergies d'excitation atomique. Explicitons $-\|4-P\|^2$ en fonction de l'angle de diffusion θ_1 :

$$-\|4-P\|^2 = p_1^2 + p_1'^2 - 2p_1 p_1' \cos \theta_1 - \frac{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}'_1)^2}{c^2}$$

Or, pour les *faibles* valeurs de Q , θ_1 est petit et $p \approx p'$. Par conséquent :

$$-\|4-P\|^2 \approx (p_1 - p_1')^2 + p_1^2 \theta_1^2 - \frac{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}'_1)^2}{c^2}$$

D'autre part, comme $\mathcal{E}_1^2 - p_1^2 c^2 = \mathcal{E}_1'^2 - p_1'^2 c^2$, on a :

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}'_1 = (p_1 - p_1')c^2 \frac{p_1 + p_1'}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}'_1} \quad \text{soit} \quad p_1 - p_1' \approx \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}'_1}{p_1 c} \times \frac{\mathcal{E}_1}{c} = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}'_1}{\beta_1 c}$$

Ainsi, $-\|4-P\|^2$ s'écrit :

$$-\|4-P\|^2 \approx p_1^2 \theta_1^2 + \frac{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}'_1)^2}{c^2} \left(\frac{1}{\beta_1^2} - 1 \right) = p_1^2 \theta_1^2 + \frac{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}'_1)^2}{\gamma_1^2 \beta_1^2 c^2}$$

La valeur minimale de l'énergie transférée à l'atome Q est donc :

$$Q_{min} = -\frac{\|4-P\|^2}{2m_e} = \frac{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}'_1)^2}{2\gamma_1^2 \beta_1^2 m_e c^2}$$

VI. — COLLISIONS AVEC PHOTONS

Les photons sont des particules de masse nulle qui ont été introduites en 1905 par Einstein pour interpréter le rayonnement des corps et l'effet photo-électrique, c'est-à-dire l'action d'un rayonnement lumineux sur la matière (cf. *Quantique*). Rappelons que cette particule est caractérisée par une énergie $\mathcal{E}_\gamma$ directement reliée à la fréquence ν du rayonnement ou à sa longueur d'onde λ , dans le vide :

$$\mathcal{E}_\gamma = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad \text{soit} \quad \mathcal{E}_\gamma(\text{eV}) = \frac{hc}{10^{-6} e \lambda(\mu\text{m})} = \frac{1,2398}{\lambda(\mu\text{m})}$$

VI. 1. — Collision élastique Compton

On appelle *effet Compton* l'apparition d'un rayonnement diffusé par un matériau, avec une fréquence différente de la fréquence du rayonnement incident, selon l'angle de diffusion θ .

a) Nature du phénomène

Comme son nom l'indique, cet effet a été découvert par le physicien américain A.H. Compton, en 1923. En irradiant du graphite avec des rayons X associés à la raie K_α du molybdène, il a obtenu, avec un spectromètre à réseau cristallin (cf. *Optique*), deux raies spectrales (Fig. 7.9a) :

i) la première centrée autour de la fréquence ν des photons incidents, qui correspond à une longueur d'onde de 71,1 pm, soit à une énergie :

$$\mathcal{E}_\gamma = \frac{1,24}{71,1 \times 10^{-6}} = 17,4 \text{ keV}$$

ii) la seconde centrée sur une autre fréquence ν' , inférieure à ν et dépendant de l'angle de diffusion θ . Expérimentalement, Compton a trouvé, entre les deux raies (Fig. 7.9b), l'écart en longueur d'onde suivant, en picomètre :

$$\Delta\lambda(\text{pm}) = \lambda' - \lambda \approx 4,8 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

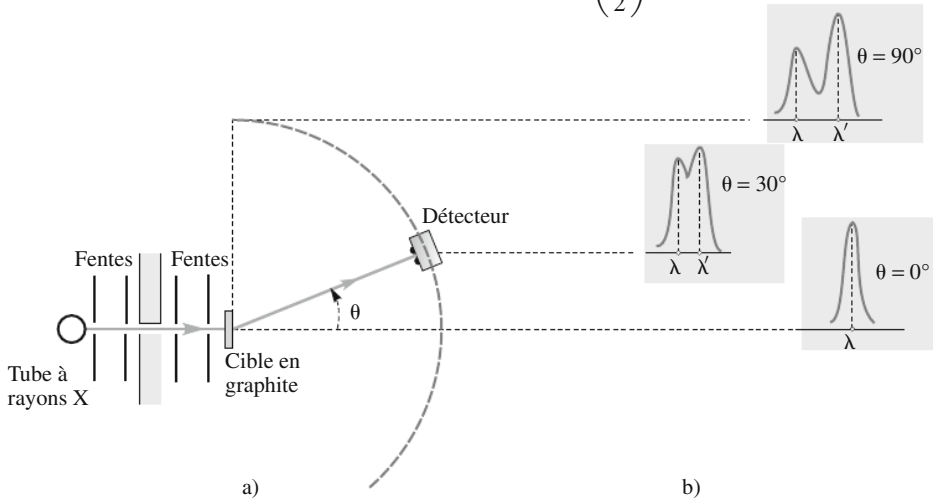


FIG. 7.9.

b) Interprétation

Compton expliqua le résultat précédent en considérant la collision élastique entre un photon X , particule se déplaçant à la vitesse c de la lumière dans le vide, et un électron libre du graphite, selon la collision :

$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma' + e'^-$$

dans laquelle l'électron cible e^- est au repos et le photon projectile γ est diffusé sous l'angle θ par rapport à sa direction incidente. Comme il y a conservation de la somme des masses des particules en interaction, la collision est élastique :

$$\sum_i m_i c^2 = \sum_f m_f c^2 = m_e c^2$$

Exprimons la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie :

$$\mathbf{p} + \mathbf{0} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}'_e \quad \text{et} \quad \mathcal{E} + m_e c^2 = \mathcal{E}' + \mathcal{E}'_e$$

avec $\mathcal{E} = pc$, $\mathcal{E}' = p'c$ et $\mathcal{E}'_e - p_e^2 c^2 = m_e^2 c^4$.

En éliminant p_e et $\mathcal{E}'_e$ entre les deux équations de conservation, on trouve :

$$(\mathcal{E} - \mathcal{E}' + m_e c^2)^2 - (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 c^2 = m_e^2 c^4$$

soit :

$$(\mathcal{E} - \mathcal{E}')^2 + 2m_e c^2 (\mathcal{E} - \mathcal{E}') - p^2 c^2 - p'^2 c^2 + 2pcp'c \cos \theta = 0$$

Si l'on tient compte des relations entre énergie et quantité de mouvement des photons, du type $\mathcal{E} = pc$, on trouve :

$$2m_e c^2 (\mathcal{E} - \mathcal{E}') = 2\mathcal{E}\mathcal{E}' (1 - \cos \theta) \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{\mathcal{E}'} - \frac{1}{\mathcal{E}} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

ce qui donne, en introduisant les longueurs d'onde $\lambda = hc/\mathcal{E}$ et $\lambda' = hc/\mathcal{E}'$:

$$\lambda' - \lambda = \lambda_C (1 - \cos \theta) \quad \text{où} \quad \lambda_C = \frac{h}{m_e c} = 2,426\,308\,9 \text{ pm}$$

est la longueur d'onde Compton.

En déterminant la longueur d'onde du rayonnement diffusé pour plusieurs angles de diffusion θ , on constate que la prévision des résultats expérimentaux est remarquable. Pour $\theta \neq 0$, on observe deux pics, l'un centré sur la longueur d'onde incidente λ , l'autre centré sur la longueur d'onde λ' , reliée à λ et θ , par la relation précédente (Fig. 7.9b). Notons que $\lambda' > \lambda$, puisque le photon diffusé perd de l'énergie.

L'écart observé peut être aisément expliqué par le modèle approché de l'électron cible *libre*. Ce modèle est d'autant plus satisfaisant que l'énergie acquise par l'électron sous forme cinétique est plus grande.

La présence du premier pic doit être attribuée à la diffusion Compton par les particules lourdes de la cible, précisément les cœurs des atomes, pour lesquels la longueur d'onde de Compton est beaucoup plus faible que celle associée aux électrons externes, qui sont pratiquement libres. Quant au fond continu, qui s'étend sur tout le spectre, il est dû à la diffusion Thomson que l'on explique à l'aide du modèle de l'électron élastiquement lié, soumis au champ électrique de l'onde électromagnétique incidente (pulsation ω), loin de la résonance : $\omega \gg \omega_0$ (cf. *Électromagnétisme*).

Remarques : 1) Il convient de bien distinguer l'effet Compton et l'effet photo-électrique. Ils font intervenir tous deux un photon incident et un électron cible. Cependant, contrairement à l'effet Compton, l'effet photoélectrique est le résultat d'une collision inélastique entre un photon incident et un métal par l'intermédiaire d'un électron en interaction avec le reste du métal. Après collision, la cible métallique a changé de nature puisqu'un électron a été arraché à l'édifice.

2) On introduit parfois la longueur d'onde de Compton « barrée » pour l'électron :

$$\lambda_C = \frac{\lambda_C}{2\pi} = 0,386\,159\,05 \text{ pm}$$

3) Ce travail a valu à Compton le prix Nobel en 1927.

VI. 2. — Création d'une paire électron-positron

L'action d'un photon sur une cible matérielle telle qu'un électron peut donner, en plus de l'électron-cible, une paire électron-positron :

$$\gamma + e^- \rightarrow e^- + (e^- + e^+)$$

Calculons l'énergie-seuil, à partir de l'expression générale, établie au paragraphe V :

$$\mathcal{E}_{k,1}^s = \frac{(3m_e c^2)^2 - (m_e c^2)^2}{2m_e c^2} = 4m_e c^2 \approx 2,044 \text{ MeV}$$

Cette énergie correspond à une longueur d'onde dans le domaine du rayonnement γ :

$$\lambda(\text{nm}) = \frac{1239,8}{2,044 \times 10^6} \approx 0,6 \times 10^{-3} \text{ nm} \quad \text{soit} \quad \lambda \approx 0,6 \text{ pm}$$

Le positron fut découvert par l'américain d'origine suédoise C. Anderson, en 1932, alors qu'il observait les traces produites par les photons γ du rayon cosmique dans une chambre de Wilson (cf. chapitre 8) ; dans ce cas, la particule cible de la collision était un noyau d'hydrogène.

Remarque : Ignorant les prévisions de Dirac sur les antiparticules, Anderson établit le premier, par l'expérience, l'existence du positron ; les trajectoires analysées sur les clichés ressemblaient en tout point à celles décrites par des particules ayant la masse d'un électron, mais dotées d'une charge électrique égale à e et non $-e$. D'autres physiciens, comme I. Curie et F. Joliot, avaient observé de telles trajectoires, mais les avaient interprétées comme des électrons se déplaçant vers la source de rayonnement qu'ils utilisaient.

La présence de la particule-cible est indispensable ; en effet, les lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie de la réaction :

$$\gamma \rightarrow e^- + e^+$$

sont incompatibles. En effet, d'une part, la conservation de la quantité de mouvement donne :

$$\frac{h\nu}{c} \mathbf{e} = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 \quad \text{soit} \quad \frac{h\nu}{c} \leq p_2 + p_3 \quad \text{et} \quad h\nu \leq p_2 c + p_3 c$$

en raison de la règle des longueurs dans le triangle de conservation des quantités de mouvement. D'autre part, la conservation de l'énergie se traduit par l'équation :

$$h\nu = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 \quad \text{d'où} \quad h\nu \geq p_2 c + p_3 c$$

puisque $\mathcal{E}_2 = (p_2^2 c^2 + m_e^2 c^4)^{1/2}$ et $\mathcal{E}_3 = (p_3^2 c^2 + m_e^2 c^4)^{1/2}$. On trouve ainsi, de façon contradictoire :

$$h\nu \leq p_2 c + p_3 c \quad \text{et} \quad h\nu = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 \geq p_2 c + p_3 c$$

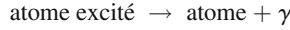
ce qui établit l'impossibilité de la matérialisation d'un photon en l'absence de cible.

VI. 3. — Émission et absorption de photons par un atome

L'émission et l'absorption de photons par un atome doivent être traitées comme des collisions inélastiques dans lesquelles on exprime la conservation de la quantité de mouvement et celle de l'énergie du système total.

a) Émission

L'émission d'un photon par un atome ou un noyau, passant d'un niveau excité d'énergie $\mathcal{E}_{0,2} = m_2 c^2$ à son niveau fondamental d'énergie $\mathcal{E}_{0,1} = m_1 c^2 < \mathcal{E}_2$, peut être considérée comme une collision inélastique (Fig. 7.10a) :



Désignons par $\mathbf{p}_a$ la quantité de mouvement acquise par l'atome, par $\mathcal{E}_a$ son énergie et par $\mathcal{E}_{\gamma,e} = h\nu_e$ l'énergie du photon émis. Les conservations de la quantité de mouvement et de l'énergie du système, qui est isolé, s'écrivent, respectivement :

$$\mathbf{0} = \mathbf{p}_a + \frac{\mathcal{E}_{\gamma,e}}{c} \mathbf{e} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{0,2} = \mathcal{E}_a + \mathcal{E}_{\gamma,e} = (p_a^2 c^2 + \mathcal{E}_{0,1}^2)^{1/2} + \mathcal{E}_{\gamma,e}$$

En utilisant la relation entre $\mathbf{p}_a$ et $\mathcal{E}_a$, on élimine ces deux quantités selon :

$$(\mathcal{E}_{0,2} - \mathcal{E}_{\gamma,e})^2 = \mathcal{E}_{\gamma,e}^2 + \mathcal{E}_{0,1}^2 \quad \text{d'où} \quad \mathcal{E}_{\gamma,e} = \frac{\mathcal{E}_{0,2}^2 - \mathcal{E}_{0,1}^2}{2\mathcal{E}_{0,2}}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\mathcal{E}_{\gamma,e} = (\mathcal{E}_{0,2} - \mathcal{E}_{0,1}) \left(\frac{\mathcal{E}_{0,2} + \mathcal{E}_{0,1}}{2\mathcal{E}_{0,2}} \right) \quad \text{soit} \quad \mathcal{E}_{\gamma,e} = (\mathcal{E}_{0,2} - \mathcal{E}_{0,1}) \left(1 - \frac{\mathcal{E}_{0,2} - \mathcal{E}_{0,1}}{2\mathcal{E}_{0,2}} \right)$$

Comme $\mathcal{E}_{0,2} - \mathcal{E}_{0,1} \ll \mathcal{E}_{0,2}$, l'énergie $\mathcal{E}_{\gamma,e}$ du photon émis ne diffère que légèrement de la différence $\mathcal{E}_{0,2} - \mathcal{E}_{0,1}$. Posant, $\mathcal{E}_{0,2} - \mathcal{E}_{0,1} = h\nu_{12}$, la relation précédente s'écrit aussi :

$$\frac{\nu_e - \nu_{12}}{\nu_{12}} = -\frac{h\nu_{12}}{2m_2 c^2}$$

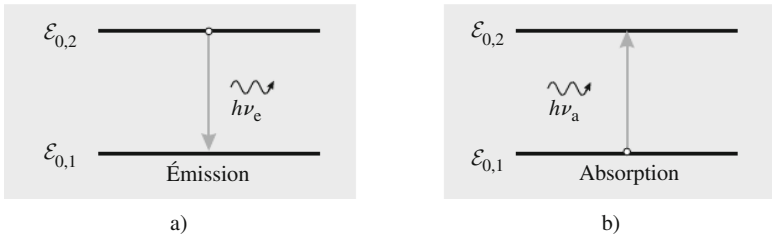
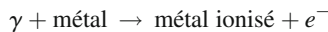


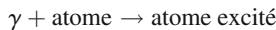
FIG. 7.10.

b) Absorption

L'effet photo-électrique est un exemple d'absorption de photon par un métal avec émission d'électron (cf. *Quantique*). On résume cette absorption par l'équation de réaction :



Un autre exemple important est l'absorption d'un photon par un atome, ce qui produit un atome excité (Fig. 7.10b) :



Avec des notations analogues aux précédentes, $\mathcal{E}_{\gamma,a} = h\nu_a$ étant l'énergie du photon absorbé, les conservations de la quantité de mouvement et de l'énergie donnent respectivement :

$$\frac{\mathcal{E}_{\gamma,a}}{c} \mathbf{e} + \mathbf{0} = \mathbf{p}_a \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{0,1} + \mathcal{E}_{\gamma,a} = \mathcal{E}_a = (p_a^2 c^2 + \mathcal{E}_{0,2}^2)^{1/2}$$

puisque $\mathcal{E}_{0,2}$ est l'énergie de masse de l'atome dans l'état final. Comme précédemment, il vient, en éliminant $\mathbf{p}_a$ et $\mathcal{E}_a$:

$$(\mathcal{E}_{0,1} + \mathcal{E}_{\gamma,a})^2 = \mathcal{E}_{\gamma,a}^2 + \mathcal{E}_{0,2}^2 \quad \text{d'où} \quad \mathcal{E}_{\gamma,a} = \frac{\mathcal{E}_{0,2}^2 - \mathcal{E}_{0,1}^2}{2\mathcal{E}_{0,1}}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\mathcal{E}_{\gamma,a} = (\mathcal{E}_{0,2} - \mathcal{E}_{0,1}) \left(\frac{\mathcal{E}_{0,2} + \mathcal{E}_{0,1}}{2\mathcal{E}_{0,1}} \right) \quad \text{soit} \quad \mathcal{E}_{\gamma,a} = (\mathcal{E}_{0,2} - \mathcal{E}_{0,1}) \left(1 + \frac{\mathcal{E}_{0,2} - \mathcal{E}_{0,1}}{2\mathcal{E}_{0,1}} \right)$$

Comme $\mathcal{E}_{0,2} - \mathcal{E}_{0,1} \ll \mathcal{E}_{0,1}$, l'énergie $\mathcal{E}_{\gamma,a}$ du photon émis ne diffère, ici aussi, que légèrement de la différence $\mathcal{E}_{0,2} - \mathcal{E}_{0,1}$. Posant, comme pour l'émission $\mathcal{E}_{0,2} - \mathcal{E}_{0,1} = h\nu_{12}$, la relation précédente devient :

$$\frac{\nu_a - \nu_{12}}{\nu_{12}} = \frac{h\nu_{12}}{2m_1 c^2}$$

c) Absorption résonnante par les atomes

Les photons émis ou absorbés par les atomes ont une énergie de quelques eV, alors que leur masse est de l'ordre du GeV. Il en résulte que les effets de recul sont faibles. Ainsi pour les atomes de mercure, on a $\mathcal{E}_{0,1} \approx 187 \text{ GeV}$ et $\mathcal{E}_{0,2} - \mathcal{E}_{0,1} \approx 5 \text{ eV}$. Il en résulte que :

$$\mathcal{E}_{\gamma,e} = \mathcal{E}_{0,2} - \mathcal{E}_{0,1} - \frac{(\mathcal{E}_{0,2} - \mathcal{E}_{0,1})^2}{2\mathcal{E}_{0,2}} \approx \mathcal{E}_{0,2} - \mathcal{E}_{0,1} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{\gamma,a} = \mathcal{E}_{0,2} - \mathcal{E}_{0,1} + \frac{(\mathcal{E}_{0,2} - \mathcal{E}_{0,1})^2}{2\mathcal{E}_{0,1}} \approx \mathcal{E}_{0,2} - \mathcal{E}_{0,1}$$

avec une précision égale à :

$$\frac{\mathcal{E}_{0,2} - \mathcal{E}_{0,1}}{2\mathcal{E}_{0,2}} \approx \frac{\mathcal{E}_{0,2} - \mathcal{E}_{0,1}}{2\mathcal{E}_{0,1}} \sim \frac{5}{2 \times 187 \times 10^9} \approx 1,3 \times 10^{-11}$$

On en déduit la différence, notée $2R$, entre l'énergie du photon absorbé et celle du photon émis :

$$2R = \mathcal{E}_{\gamma,a} - \mathcal{E}_{\gamma,e} \approx \frac{(\mathcal{E}_{0,2} - \mathcal{E}_{0,1})^2}{\mathcal{E}_{0,1}}$$

Il est naturel de comparer ce décalage énergétique à la largeur spectrale à mi-hauteur $\Delta\mathcal{E}_{1/2}$ de la raie d'émission ou d'absorption. Un ordre de grandeur réaliste de cette dernière est fournie par l'effet Doppler-Fizeau (cf. chapitre 3). Les atomes, initialement au repos, sont mis en mouvement par l'émission ou l'absorption d'un photon. On sait que la variation relative de fréquence est donnée, à faible vitesse, par l'expression :

$$\left| \frac{\Delta\nu}{\nu} \right|_{DF} = \frac{v}{c}$$

Si l'on donne à v la valeur v_q de la vitesse quadratique moyenne des atomes ou des molécules, dans une lampe spectrale, de température T , on a (cf. *Thermodynamique*) :

$$\left| \frac{\Delta\nu}{\nu} \right|_{DF} = \left(\frac{3k_B T}{mc^2} \right)^{1/2} \left(\frac{3RT}{M_m c^2} \right)^{1/2} \quad \text{car} \quad \frac{1}{2} m v_q^2 = \frac{3}{2} k_B T$$

M_m étant la masse molaire.

Pour une lampe à vapeur de sodium, à $T = 500$ K, qui émet une double raie intense, à la longueur d'onde $\lambda_D = 589,3$ nm, on trouve, puisque $\mathcal{E}_D = hc/(e\lambda_D) = 2,108$ eV :

$$\left| \frac{\Delta\nu_{1/2}}{\nu} \right|_{DF} = 2,45 \times 10^{-6} \quad \text{d'où} \quad \Delta\mathcal{E}_{1/2} = h\Delta\nu_{1/2} = 2,45 \times 10^{-6} \times \mathcal{E}_D = 5,2 \times 10^{-6} \text{ eV}$$

alors que :

$$2R \approx \frac{(\mathcal{E}_{0,2} - \mathcal{E}_{0,1})^2}{\mathcal{E}_{0,1}} = \frac{2,108^2}{23 \times 0,938 \times 10^9} \approx 2 \times 10^{-10} \text{ eV}$$

Ainsi, $2R \ll \Delta\mathcal{E}_{1/2}$.

L'énergie de recul dans les atomes est donc très faible devant la largeur des raies. Il en résulte que ces atomes peuvent absorber le rayonnement qu'ils émettent (Fig.7.11a). C'est l'*absorption résonnante* que l'on peut mettre en évidence expérimentalement en éclairant, à l'aide d'une lampe à vapeur de sodium, une enceinte contenant des atomes de sodium, à une température de 500 K (lampe de sodium récemment éteinte dont on a enlevé la cache protecteur). La lampe éteinte s'illumine dans toutes les directions (Fig.7.11b).

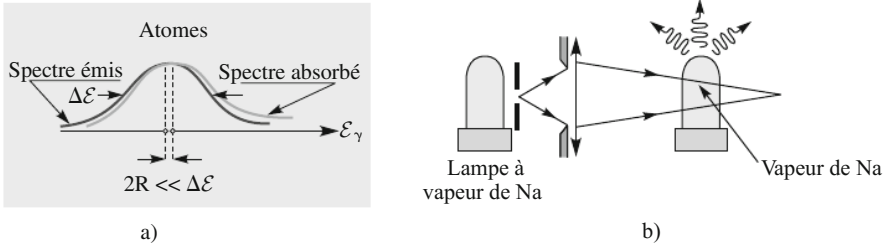


FIG. 7.11.

VI. 4. — Émission et absorption d'un photon par un noyau. Effet Mössbauer

a) Absorption résonnante par les noyaux

Avec les noyaux, les effets de recul sont plus importants, car $\mathcal{E}_{0,2} - \mathcal{E}_{0,1} \sim 1$ MeV. Par exemple, pour le noyau de nickel 60 :

$$\mathcal{E}_{0,2} - \mathcal{E}_{0,1} = 1,33 \text{ MeV} \quad \text{et} \quad m_{Ni}c^2 = 55,8 \text{ GeV} \quad \text{d'où} \quad 2R = \frac{(\mathcal{E}_{0,2} - \mathcal{E}_{0,1})^2}{m_{Ni}c^2} \approx 31,7 \text{ eV}$$

Or, avec de tels noyaux, on a :

$$\left| \frac{\Delta\mathcal{E}_{1/2}}{\mathcal{E}_\gamma} \right| \sim 10^{-6} \quad \mathcal{E}_\gamma \sim 1 \text{ MeV} \quad \text{d'où} \quad \Delta\mathcal{E}_{1/2} \sim 1 \text{ eV}$$

Il en résulte que, contrairement à ce que l'on a trouvé avec des atomes, $2R \gg \Delta\mathcal{E}_{1/2}$.

Ainsi, l'absorption résonnante est difficile à réaliser avec les noyaux (Fig. 7.12).

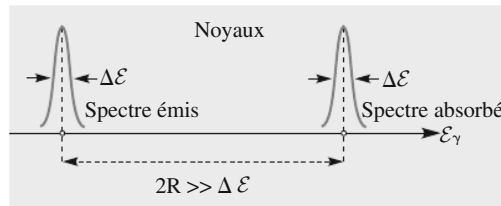


FIG. 7.12.

b) Effet Mössbauer

En 1958, le physicien américain R. Mössbauer fut surpris de constater, en abaissant la température, que l'absorption résonnante de photons, d'énergie 129 keV, produite avec des noyaux radioactifs d'iridium 191, augmentait, alors qu'un refroidissement implique généralement une réduction de la largeur spectrale des raies et donc une diminution de l'absorption.

Il attribua ce phénomène à la forte énergie de liaison de ces noyaux avec les atomes du cristal, de l'ordre de 10 eV. Si la température est inférieure à la température de Debye, qui est la température caractéristique de la décroissance de la capacité thermique du cristal (cf. *Thermodynamique*), c'est ce dernier, avec une masse de l'ordre de 10^{20} fois la masse du noyau, qui participe au recul, et non les seuls noyaux radioactifs ; il en résulte que les énergies de recul sont alors extrêmement faibles, et que, comme pour les atomes, on a, à basse température : $2R \ll \Delta\mathcal{E}$.

Cette découverte, qui valut le prix Nobel à son auteur en 1961, est appelée depuis *l'effet Mössbauer*. Elle est à l'origine d'une technique de détermination précise de l'intensité spectrale d'une source : la spectrométrie Mössbauer.

CONCLUSION

Rappelons les points essentiels.

1) Les deux lois principales de conservation dans une collision quelconque sont :

$$\sum_i \mathbf{p}_i = \sum_f \mathbf{p}_f \quad \text{et} \quad \sum_i \mathcal{E}_i = \sum_f \mathcal{E}_f$$

2) On distingue les collisions élastiques, pour lesquelles le nombre et la nature des particules sont inchangés, des autres collisions qualifiées d'inélastiques. Dans ces dernières, l'énergie cinétique totale n'est pas conservée.

3) Le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$, qui est galiléen et tel que la quantité de mouvement totale du système est nulle, présente un intérêt technique considérable. Par exemple, dans $\mathcal{R}^*$, on peut savoir si la collision est élastique ou non en comparant la perte d'énergie subie par la particule incidente uniquement.

4) La variation d'énergie cinétique d'un système de particules est égale au défaut de la somme des énergies de masse du système :

$$\Delta\mathcal{E}_k = \mu c^2 \quad \text{avec} \quad \mu c^2 = \sum_i m_i c^2 - \sum_f m_f c^2$$

C'est cette équation qui traduit le plus clairement l'équivalence masse-énergie.

5) La réalisation d'une collision inélastique est soumise à une condition énergétique sur les particules en interaction. Dans le référentiel du centre de masse, cette condition s'écrit :

$$\mathcal{E}^* \geq \sum_f m_f c^2$$

car, dans $\mathcal{R}^*$, toutes les particules émergentes peuvent être simultanément au repos. Dans le référentiel du laboratoire où la particule cible A_2 est au repos, cette condition devient :

$$\mathcal{E}_{k,1} \geq \mathcal{E}_{k,1}^s \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_{k,1}^s = \frac{(\sum_f m_f c^2)^2 - (\sum_i m_i c^2)^2}{2m_2 c^2}$$

6) Le cas particulier des photons s'inscrit dans l'analyse générale des collisions. Il suffit simplement de prendre en compte la valeur nulle de leur masse.

EXERCICES ET PROBLÈMES

P7– 1. Collision élastique symétrique

Une particule heurte élastiquement une particule identique dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$. La diffusion des deux particules est symétrique par rapport à la direction incidente. On appelle α l'angle que font entre elles les trajectoires après collision.

1. Donner l'expression de α en fonction de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_{k,1}$ de la particule projectile. Retrouver le résultat newtonien.

2. Pour quelle valeur de $\mathcal{E}_{k,1}$, l'angle α entre les trajectoires est-il égal à 45° , lorsque les particules sont des protons ?

P7– 2. Collision élastique entre deux électrons

Un électron A_1 , d'énergie cinétique $\mathcal{E}_{k,1} = 3 \text{ MeV}$ dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, rencontre un second électron au repos A_2 . La collision est élastique. On désigne par θ l'angle de diffusion que fait, avec la direction incidente, la quantité de mouvement $\mathbf{p}'_1$ de l'électron diffusé A'_1 , par $\mathcal{E}_1$ l'énergie de A_1 et par $\mathcal{E}'_1$ celle de A'_1 .

1. a) Quel est le facteur relativiste γ_1 de l'électron projectile ? Application numérique.

b) Établir, en fonction de γ_1 , l'expression du rapport β_C de la vitesse du référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$ du système sur la vitesse de la lumière dans le vide. Application numérique.

c) Même question pour le facteur relativiste γ_C associé à $\mathcal{R}^*$. Application numérique.

2. a) Calculer la vitesse du projectile par rapport à $\mathcal{R}^*$.

b) En déduire son énergie cinétique en MeV dans $\mathcal{R}^*$. Que devient cette dernière après la collision ?

3. a) Écrire, dans $\mathcal{R}$, les équations caractéristiques de cette collision relatives à la quantité de mouvement et à l'énergie.

b) Montrer que l'angle θ est relié aux énergies cinétiques $\mathcal{E}_{k,1}$ et $\mathcal{E}'_{k,1}$ par la relation suivante :

$$\cos^2 \theta = \frac{\mathcal{E}'_{k,1}(\mathcal{E}_{k,1} + \alpha m_e c^2)}{\mathcal{E}_{k,1}(\mathcal{E}'_{k,1} + \alpha m_e c^2)}$$

α étant un facteur numérique à déterminer.

c) En déduire l'énergie cinétique $\mathcal{E}'_{k,1}$ de A'_1 en fonction de θ et de $\mathcal{E}_{k,1}$. Application numérique pour $\theta = \pi/3$.

d) Quelle est la valeur maximale de $\mathcal{E}'_{k,1}$? Ce résultat était-il prévisible ?

P7– 3. Angle minimal de diffusion entre deux particules identiques

On étudie une collision élastique entre deux particules identiques dont l'une A_1 a une vitesse $\mathbf{v}_1$, avec $v_1 = 0,6c$, et l'autre A_2 est immobile.

1. Exprimer, en fonction de l'angle de diffusion θ^* dans $\mathcal{R}^*$ et de γ_1 , facteur relativiste de A_1 , les tangentes des angles de diffusion : $\theta_1 = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_1)$ et $\theta_2 = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_2)$.

2. Trouver $\tan \theta_1 - \tan \theta_2$ et $\tan \theta_1 \times \tan \theta_2$. En déduire que la différence angulaire $\theta_1 - \theta_2$ est minimale pour $\theta^* = \pi/2$.

3. Calculer l'angle minimal de diffusion $\theta = (\mathbf{p}'_2, \mathbf{p}'_1)$ que font entre elles les vitesses des particules émergentes.

P7– 4. Angle maximal de diffusion

On considère, dans le référentiel du laboratoire, la collision élastique d'une particule projectile A_1 , de masse m_1 , et d'une particule cible A_2 , de masse $m_2 < m_1$. L'angle de diffusion de A_1 est l'angle θ_1 égal à $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_1)$, $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}'_1$ étant les quantités de mouvement de A_1 avant et après la collision.

1. Exprimer $\tan \theta_1$ en fonction de l'angle de diffusion θ^* , de l'énergie $\mathcal{E}_1^*$, de la quantité de mouvement p^* de A_1 dans le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$. On introduit les grandeurs habituelles associées à la vitesse de $\mathcal{R}^*$ par rapport à $\mathcal{R}$: β_e et $\gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2}$.

2. En différenciant $(\tan \theta_1)^{-1}$, montrer qu'il existe un angle maximal de diffusion θ_1^m défini par le rapport des masses m_2/m_1 . Application à la collision d'un proton sur un électron.

P7– 5. Énergie communiquée à une particule

1. Exprimer, en fonction de l'angle de diffusion θ^* dans le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$, la perte d'énergie Q d'une particule A_1 (masse m_1), au cours d'une collision élastique avec une particule A_2 (masse m_2), au repos dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$. On note γ_1 le facteur relativiste de A_1 dans $\mathcal{R}$.

2. Évaluer le rapport $r_1 = (\mathcal{E}'_{k,1})_m / \mathcal{E}_{k,1}$ des énergies cinétiques de A_1 , $(\mathcal{E}'_{k,1})_m$ étant l'énergie cinétique minimale de A_1 après la collision.

3. On suppose que $m_2 \gg m_1$. Comparer les valeurs de r_1 dans les limites newtonienne et ultra-einsteinienne ($\gamma_1 m_1 \gg m_2$). Conclure.

4. Mêmes questions pour $m_2 \ll m_1$: limites newtonienne et ultra-einsteinienne ($\gamma_1 m_2 \gg m_1$).

P7– 6. Désintégration d'une particule immobile en deux particules

Une particule, de masse m_1 , immobile dans le référentiel du laboratoire, se désintègre en donnant naissance à deux nouvelles particules, de masses respectives m_2 et m_3 .

1. Calculer les énergies des deux nouvelles particules, en fonction des masses m_1 , m_2 et m_3 .

2. Application aux réactions suivantes :

$$(I) \quad K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$$

$$(II) \quad K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$$

$$(III) \quad \pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu$$

$$(IV) \quad K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$$

P7– 7. Désintégration d'un méson K^+

Un méson K^+ (énergie de masse $m_K c^2 = 493,7 \text{ MeV}$), au repos, se désintègre en plusieurs pions chargés, de même masse ($m_\pi c^2 = 139,6 \text{ MeV}$).

1. Montrer qu'il peut se désintégrer au plus en trois pions.

2. Quels sont les angles que font entre elles les trajectoires des trois pions issus de la désintégration, lorsqu'ils ont même énergie ?

3. Trouver les énergies minimale et maximale que peut avoir l'un des trois pions. Application numérique en MeV .

P7– 8. Perte d'énergie au cours d'une collision inélastique électron-atome

Au cours d'une collision inélastique électron-atome, l'angle de diffusion de l'électron incident de vitesse v_1 est θ et l'énergie qu'il perd pour exciter l'atome est $\Delta\mathcal{E}$. Cette énergie est très inférieure à son énergie cinétique ; en outre, l'atome est initialement immobile. On désigne par $\mathbf{p}$ la quantité de mouvement acquise par l'atome.

1. Sachant que la norme de la quantité de mouvement de l'électron varie peu ($p_1 \approx p'_1$), trouver une relation entre $p_1 - p'_1$, $\Delta\mathcal{E}$ et v_1 .

2. On définit l'angle θ_0 par $\theta_0 = \Delta\mathcal{E}/(p_1 v_1)$. Exprimer $P = \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1\|$ en fonction de θ_0 et θ , lorsque θ est petit.

3. Calculer θ_0 pour $\gamma_1 = 3$, lorsque $\Delta\mathcal{E} = 15 \text{ eV}$, puis lorsque $\Delta\mathcal{E} = 1550 \text{ eV}$.

P7– 9. Seuil énergétique de l'excitation d'un atome d'aluminium par un électron

Une particule A_1 (masse m_1) subit une collision inélastique avec un atome A_2 au repos (masse m_2). Après collision, les deux particules A_1 et A_2 deviennent A_3 et A_4 , A_3 étant identique à A_1 et A_4 désignant l'atome excité, c'est-à-dire l'atome A_2 avec une énergie interne augmentée de $\Delta\mathcal{E}_n$.

1. Déterminer le seuil énergétique de la collision.

2. Comparer le résultat trouvé à celui obtenu en mécanique newtonienne.

3. Application lorsque A_1 est un électron, A_2 un atome d'aluminium et $\Delta\mathcal{E}_n = 1550 \text{ eV}$ (raie caractéristique K). On donne $m_{Al}c^2 = 25,132 \text{ GeV}$.

P7– 10. Anneaux de stockage

Pour produire des collisions proton-proton à très grande énergie, on utilise des anneaux de stockage, lesquels permettent de réaliser des collisions entre deux protons, de même énergie cinétique $\mathcal{E}_k^*$ et de quantités de mouvement opposées.

Quelle devrait être l'énergie cinétique $\mathcal{E}_k$ communiquée à un proton pour que, lors d'une collision avec un proton cible immobile, on dispose de la même énergie dans le référentiel du centre de masse ? Application : $\mathcal{E}_k^* = 28 \text{ GeV}$.

P7– 11. Transformation réciproque paire proton-antiproton en paire électron-positron

On étudie la transformation réciproque d'une paire proton-antiproton ($p + \bar{p}$) en une paire électron-positron ($e + \bar{e}$) dans le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$:

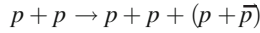
$$p + \bar{p} \rightarrow e + \bar{e} \quad \text{et} \quad e + \bar{e} \rightarrow p + \bar{p}$$

1. Montrer qu'une paire proton-antiproton au repos peut toujours se transformer en une paire électron-positron.

2. À quelle condition sur l'énergie cinétique du système, exprimée dans $\mathcal{R}^*$, une paire électron-positron, initialement au repos, peut-elle se transformer en une paire proton-antiproton ? Application numérique en utilisant le GeV comme unité.

P7– 12. Production d'une paire proton-antiproton

On produit une paire proton-antiproton par collision d'un proton projectile et d'un proton cible, en réalisant la réaction :



1. Quel est, dans $\mathcal{R}^*$, le seuil énergétique de l'ensemble ? En déduire le seuil énergétique de la particule A_1 , lorsque la cible est au repos dans $\mathcal{R}$.

2. Dans la suite, on suppose que, dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, le proton cible est en mouvement vers le proton projectile, dans la direction définie par ces particules, avec une énergie cinétique de $\mathcal{E}_{k,2} = 30 \text{ MeV}$. Montrer que l'énergie $\mathcal{E}_1$ du proton projectile, dans $\mathcal{R}$, satisfait à l'inégalité suivante :

$$\mathcal{E}_1^2 - 14 \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2^2 + \alpha \leq 0$$

α étant une quantité que l'on déterminera, en fonction de $m_p c^2$.

3. En déduire que :

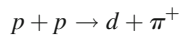
$$\mathcal{E}_1 \geq U - [48(\mathcal{E}_2^2 - m_p^2 c^4)]^{1/2}$$

U étant une énergie que l'on exprimera en fonction de $\mathcal{E}_2$. Calculer, en GeV, le seuil énergétique du proton projectile dans le référentiel du laboratoire.

4. Retrouver, à l'aide de l'expression précédente, le seuil énergétique demandé la question 1.

P7– 13. Production d'un deuton par une collision proton-proton

On produit un deuton en réalisant la collision suivante entre deux protons incidents :

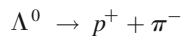


1. Quel est, dans $\mathcal{R}^*$, le seuil énergétique de la réaction ?

2. Calculer le seuil énergétique du proton projectile dans le référentiel $\mathcal{R}$ où le proton-cible est au repos.

P7– 14. Désintégration d'un hypéron Λ^0

Un hypéron Λ^0 au repos se désintègre en un proton et un méson π^- selon la réaction suivante :



1. Montrer que la quantité de mouvement p_2 des protons issus de la désintégration est telle que :

$$p_2 c = \alpha \left(\frac{A_1 A_2}{A_0} \right)^{1/2}$$

où α est un facteur numérique à déterminer et :

$$A_0 = m_\Lambda^2 c^4 \quad A_1 = A_0 - (m_p c^2 + m_\pi c^2)^2 \quad A_2 = A_0 - (m_p c^2 - m_\pi c^2)^2$$

2. Calculer les valeurs des quantités de mouvement et des énergies cinétiques des particules émergentes. On donne $m_1 c^2 = 1\,115,6 \text{ MeV}$.

P7– 15. Désintégration d'un hypéron Σ^-

Un hypéron Σ^- , d'énergie cinétique $0,25 \text{ GeV}$, se désintègre en un neutron et un pion π^- , dont le vecteur quantité de mouvement fait un angle $\pi/2$ avec la direction de la particule initiale.

1. Trouver les énergies cinétiques des particules émergentes. On donne $m_\Sigma c^2 = 1\,197,4 \text{ MeV}$.

2. Quel est l'angle que fait le vecteur quantité de mouvement du neutron avec la direction initiale de l'hypéron ?

P7– 16. Énergie et masse d'un système de particules

1. Système isolé de particules en interaction

On étudie la réaction suivante de matérialisation d'un photon en une paire électron-positron :

$$\gamma + e^- \rightarrow e^- + (e^- + e^+)$$

dans laquelle l'électron cible est immobile dans $\mathcal{R}$.

a) Trouver, en justifiant le calcul, le seuil énergétique de la réaction, en fonction de $m_e c^2$, dans $\mathcal{R}^*$ et dans $\mathcal{R}$. En déduire le seuil énergétique du photon incident et sa longueur d'onde ; quel est le domaine spectral concerné ?

b) Calculer la masse M du système, au seuil, en fonction de m_e . Comparer cette masse à la somme des masses avant et après la collision. Commenter.

2. Système isolé de particules sans interaction

Un système isolé est constitué de N particules, de masses $\{m_i\}$, dont les vitesses $\{\mathbf{v}_i\}$ sont toutes dirigées suivant l'axe Ox du référentiel galiléen $\mathcal{R}$. On suppose que leurs distances sont assez grandes pour que l'on puisse négliger leurs interactions.

a) Établir la relation entre la vitesse du centre de masse $\mathbf{v}_e$ du système, sa quantité de mouvement $\mathbf{P}$ et son énergie $\mathcal{E}$.

b) En utilisant la loi de conservation de la quantité de mouvement totale du système, montrer que la somme des énergies des particules libres se conserve dans $\mathcal{R}$.

c) Quelle est l'expression de la masse M du système en fonction des masses $\{m_i\}$ et des facteurs relativistes $\{\gamma_i^*\}$ dans $\mathcal{R}^*$?

P7– 17. Désintégration d'une particule étrange en trois particules

Une particule (masse m_1), au repos dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$, se désintègre en trois particules (masses respectives m_3 , m_4 , m_5), d'énergies $\mathcal{E}_3$, $\mathcal{E}_4$, $\mathcal{E}_5$, et de quantités de mouvement $\mathbf{p}_3$, $\mathbf{p}_4$, $\mathbf{p}_5$.

1. a) Expliciter les relations entre les énergies et les quantités de mouvement des particules issues de la désintégration.

b) Établir la condition sur les masses pour qu'une telle désintégration soit possible.

c) Que se passe-t-il lorsque la particule initiale est un photon ? Comparer à la réaction suivante de matérialisation d'un photon en interaction avec un proton au repos :

$$\gamma + p^+ \rightarrow p^+ + (e^- + e^+)$$

Calculer, en MeV, l'énergie du photon pour que la réaction précédente puisse se produire.

2. On considère la réaction suivante de désintégration d'un méson étrange K^0 en trois mésons π :

$$K^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^+ + \pi^-$$

a) Trouver, en fonction des masses, les énergies des particules produites lorsque la quantité de mouvement de π^0 est nulle.

b) Même question si les quantités de mouvement de π^+ et π^- sont égales.

c) Montrer, par des considérations simples, que le cas précédent correspond à une valeur maximale de l'énergie de π^0 . En déduire, en MeV, l'étendue du spectre énergétique des mésons π^0 .

P7– 18. Collision élastique d'un photon avec un miroir mobile

Un miroir plan, de masse M , se déplace à la vitesse constante $\mathbf{u}$, perpendiculairement à son plan par rapport au référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$: $u \ll c$. Une source lumineuse ponctuelle S fixe dans $\mathcal{R}$ émet, dans la direction et le sens opposé de $\mathbf{u}$, des photons dont la fréquence dans $\mathcal{R}$ est ν . On se propose d'étudier la collision de ces photons avec le miroir, sachant que $h\nu \ll Mc^2$.

1. Écrire les lois de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement au cours de l'interaction photon-miroir. En déduire la relation approchée donnant la fréquence ν' du photon réfléchi en fonction de ν et $\beta_e = u/c$. Application numérique pour $u = 0,01c$.

2. Retrouver cette relation en utilisant les formules de l'effet Doppler-Fizeau.

P7– 19. Énergie acquise par l'électron dans l'effet Compton

On étudie l'énergie acquise par un électron, initialement au repos, à la suite d'une collision Compton, dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, ainsi que dans le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$.

1. a) En quoi consiste l'effet Compton ? La collision Compton est-elle élastique ou inélastique ? Justifier.

b) Établir l'expression de l'énergie $\mathcal{E}'_\gamma$ du photon diffusé en fonction de celle $\mathcal{E}_\gamma$ du photon incident et de l'angle de diffusion θ . Application à la diffusion de rayons X d'énergie $\mathcal{E}_\gamma = 12 \text{ keV}$ par du graphite. Calculer, en keV, l'énergie des photons diffusés sous un angle de 60° .

2. a) Exprimer, en fonction de l'angle de diffusion θ et du rapport $\alpha = \mathcal{E}_\gamma / (m_e c^2)$, l'énergie cinétique acquise par l'électron, après diffusion Compton.

b) En déduire sa valeur maximale. Quel est, en pm, l'écart spectral dans le cas de photons incidents d'énergie 12 keV ?

3. a) Exprimer, en fonction de α , le rapport β_e de la vitesse v_C du centre de masse sur la constante c . Application à la diffusion de rayons X d'énergie 12 keV. Comparer ce rapport à celui que l'on aurait obtenu en adoptant la définition géométrique du centre de masse en mécanique newtonienne.

b) À l'aide des formules de transformation du quadrivecteur quantité de mouvement-énergie, entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$, trouver, en fonction de $\mathcal{E}_\gamma$ et β_e , l'expression de l'énergie du photon dans $\mathcal{R}^*$, avant la collision. Y-a-t-il un lien entre le résultat trouvé et l'effet Doppler-Fizeau ? Si oui, justifier.

Application numérique pour des photons incidents de 12 keV.

c) Quelle est, en fonction de β_e , l'énergie cinétique de l'électron dans $\mathcal{R}^*$, avant la collision ? Application numérique pour des photons incidents de 12 keV.

d) En déduire les énergies du photon et de l'électron dans $\mathcal{R}^*$ après la collision.

4. En projetant la relation vectorielle de conservation de la quantité de mouvement dans $\mathcal{R}$, établir la relation suivante entre l'angle de diffusion θ et la valeur absolue de l'angle φ que fait la vitesse de l'électron après collision avec la direction du photon incident :

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \tan|\varphi| = \frac{1}{1+K}$$

K étant un facteur que l'on exprimera en fonction de α . Calculer $|\varphi|$ pour des rayons X de 12 keV, diffusés sous l'angle $\theta = 60^\circ$.

P7– 20. Effet Compton avec l'électron cible en mouvement

Dans le référentiel du laboratoire, un laser envoie des photons, de fréquence ν , sur des électrons qui se déplacent dans le sens opposé avec une énergie totale $\mathcal{E}$.

1. Quelle est l'expression de la fréquence ν' des photons diffusés, en fonction de ν , $\mathcal{E}$, de la quantité de mouvement p des électrons et de l'angle de diffusion θ des photons ?

2. Retrouver l'effet Compton avec l'électron-cible au repos.

3. Calculer l'énergie des photons diffusés sous l'angle $\theta = \pi$, lorsque l'énergie cinétique des électrons est 3 MeV et l'énergie des photons incidents 2 eV. En déduire la nature du rayonnement diffusé.

P7– 21. Désintégration symétrique du méson π^0 en deux photons

Un méson π^0 , de vitesse v , se désintègre en vol, symétriquement, en deux photons de même énergie.

Déterminer la valeur des angles de diffusion des photons par rapport à la direction de la particule incidente. Application : $v = c/2$.

P7– 22. Matérialisation d'un photon

On considère les réactions de matérialisation d'un photon γ suivantes :

$$\gamma \rightarrow e^+ + e^- \quad \text{et} \quad \gamma + X^+ \rightarrow X^+ + (e^+ + e^-)$$

où X^+ , e^- et e^+ désignent respectivement un noyau lourd, un électron et un positron.

1. Montrer que la première réaction est impossible.

2. Trouver le seuil énergétique de la seconde.

P7– 23. Collision inélastique photon-proton

On réalise la collision suivante entre un photon et un proton immobile dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$:

$$\gamma + p^+ \rightarrow n + \pi^+$$

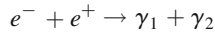
1. Établir la relation entre l'énergie $\mathcal{E}_\gamma$ dans $\mathcal{R}$ du photon incident et l'énergie totale du système dans le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$.

2. Quel est, en MeV, le seuil énergétique de la réaction dans $\mathcal{R}^*$?

3. Calculer le seuil énergétique du photon dans $\mathcal{R}$.

P7– 24. Annihilation d'une paire électron-positron

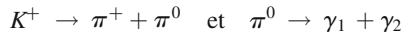
Un électron et un positron, de même énergie cinétique $\mathcal{E}_k$, s'annihilent en produisant deux photons suivant la réaction suivante :



1. Les particules incidentes se déplacent avec des vitesses opposées. Calculer les énergies $\mathcal{E}_{\gamma,1}$ et $\mathcal{E}_{\gamma,2}$ des photons produits, pour $\mathcal{E}_k = 3 \text{ MeV}$.
2. Les vitesses des particules incidentes font entr'elles un angle α au moment de leur rencontre, et les photons sont émis dans la même direction et dans des sens opposés. Établir les expressions des énergies $\mathcal{E}_{\gamma,1}$ et $\mathcal{E}_{\gamma,2}$ en fonction de $\mathcal{E}_k$ et de α . Application lorsque $\mathcal{E}_k = 3 \text{ MeV}$ et $\alpha = 2\pi/3$.

P7– 25. Désintégrations successives

Un méson K^+ , au repos dans le référentiel du laboratoire, se désintègre en un méson π^+ et un méson π^0 . Ce dernier se désintègre à son tour, en deux photons de même énergie dans des directions faisant les angles θ_1 et θ_2 avec la vitesse du méson π^0 . On a donc successivement :



1. Trouver les énergies $\mathcal{E}_{\pi^+}$ et $\mathcal{E}_{\pi^0}$ des mésons après la première désintégration.
2. Calculer les angles de diffusion θ_1 et θ_2 .
3. Montrer que la relation entre la fréquence ν des photons émis et celle ν_0 des photons émis par un méson π^0 immobile, peut se mettre sous la forme :

$$\nu = \frac{\nu_0}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)}$$

θ étant un angle que l'on précisera et γ le facteur relativiste associé à une quantité β que l'on déterminera. Commenter.

P7– 26. Émission et absorption d'un photon par un atome et un noyau

On étudie l'émission ou l'absorption d'un photon par un atome ou un noyau, de masse m , au repos, lors d'une transition entre deux niveaux d'énergie qui diffèrent de $\Delta\mathcal{E}$.

1. Déterminer la longueur d'onde λ_0 du rayonnement émis ou absorbé en négligeant l'énergie cinétique de l'atome ou du noyau après l'émission ou l'absorption. Application à l'atome de sodium ($\Delta\mathcal{E} = 2,1 \text{ eV}$) et au noyau de fer 57 ($\Delta\mathcal{E} = 14,4 \text{ keV}$).

2. a) Pourquoi l'atome ou le noyau peuvent-ils être considérés comme des particules newtoniennes ?

b) Montrer que les longueurs d'onde λ_e et λ_a des photons respectivement émis et absorbés sont légèrement différentes de λ_0 , si on ne néglige pas l'énergie cinétique de l'atome ou du noyau.

c) Exprimer, en fonction de $\Delta\mathcal{E}$ et mc^2 , les écarts relatifs $(\lambda_e - \lambda_0)/\lambda_0$ et $(\lambda_a - \lambda_0)/\lambda_0$. Applications. On rappelle les valeurs des masses molaires du sodium et du fer : $23 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $57 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ respectivement.

3. En réalité, l'atome ou le noyau ne sont pas fixes. Il en résulte, en raison de l'effet Doppler-Fizeau, que les longueurs d'onde λ_e et λ_a ne sont pas uniques. On doit les considérer comme des distributions spectrales, de largeur $\Delta\lambda$, autour de λ_e et λ_a .

a) Le sodium est sous forme d'un gaz monoatomique en équilibre thermique à la température $T = 300 \text{ K}$. Calculer l'ordre de grandeur de la vitesse d'agitation thermique des atomes ainsi que l'élargissement $\Delta\lambda$.

b) Les noyaux de fer sont ceux d'un cristal de masse $m = 1 \text{ g}$. Le noyau qui émet un photon peut être considéré comme rigidement lié au cristal, de sorte que c'est l'ensemble qui recule lors de l'émission du photon. Comparer $(\lambda_e - \lambda_0)/\lambda_0$ à $\Delta\mathcal{E}_\gamma/(mc^2)$ sachant que la largeur énergétique naturelle de la raie émise vaut $4,6 \text{ neV}$.

P7– 27. Perte d'énergie maximale d'une particule au cours d'une collision élastique

En traversant la matière, des particules très rapides perdent une partie de leur énergie incidente par collision avec les électrons atomiques. En raison de la grande énergie cinétique que ces derniers acquièrent au cours d'une collision, on peut considérer que la collision entre la particule-projectile A_1 , de masse m_1 , et l'électron atomique-cible au repos (masse m_e) est élastique. On désigne par θ_1 l'angle de diffusion de A_1 et par θ_2 l'angle que fait, après collision, l'électron cible avec la direction incidente du projectile. On étudie les trois cas suivants :

i) A_1 est un hélium (particule α), d'énergie cinétique $\mathcal{E}_{k,1} = 5 \text{ MeV}$,

ii) A_1 est un électron, d'énergie cinétique $\mathcal{E}_{k,1} = 3 \text{ MeV}$,

iii) A_1 est un photon, d'énergie cinétique $\mathcal{E}_{k,1} = 2 \text{ MeV}$.

1. Calculer, dans les trois cas, pour le projectile A_1 , l'énergie $\mathcal{E}_1$ en MeV, le facteur relativiste γ_1 , le facteur β_1 , rapport de sa vitesse sur c , et la quantité de mouvement p_1 en $\text{MeV} \cdot c^{-1}$. Quelle est, en pm, la valeur de la longueur d'onde du photon incident ?

2. a) Exprimer les lois auxquelles satisfont le vecteur quantité de mouvement et l'énergie du système de particules.

b) On désigne par p'_2 la norme de la quantité de mouvement de l'électron cible A_2 , après collision et par $\mathcal{E}'_{k,2}$ son énergie cinétique. Quelle est la relation entre $p'_2 c$ et $\mathcal{E}'_{k,2}$?

c) En éliminant, dans les lois précédentes sur les collisions, les caractéristiques dynamiques de la particule incidente diffusée A'_1 , établir la relation suivante entre $\mathcal{E}'_{k,2}$, $p'_2 c$ et θ_2 :

$$\mathcal{E}'_{k,2}(\mathcal{E}_1 + K) = p_1 c p'_2 c \cos \theta_2$$

dans laquelle K est une combinaison de constantes fondamentales dont on donnera la dimension physique, l'expression et la valeur.

d) Dédire de l'équation précédente et de la relation entre $p'_2 c$ et $\mathcal{E}'_{k,2}$ obtenue en b), l'expression de $\mathcal{E}'_{k,2}$ en fonction de θ_2 .

3. a) Montrer que la perte d'énergie maximale $\mathcal{Q}_{\max}$ du projectile A_1 pour expression :

$$\mathcal{Q}_{\max} = \frac{2(\gamma_1 + 1) m_e c^2 m_1 c^2}{m_1^2 c^4 + m_e^2 c^4 + 2\gamma_1 m_e c^2 m_1 c^2} \mathcal{E}_{k,1}$$

b) Que vaut $\mathcal{Q}_{\max}$ lorsque le projectile A_1 est l'électron ? Approximation newtonienne. Commenter.

c) Même question lorsque A_1 est l'hélium. Approximation newtonienne. Montrer qu'en mécanique einsteinienne, $\mathcal{Q}_{\max}$ peut être de l'ordre de $\mathcal{E}_{k,1}$, pour une certaine valeur du facteur relativiste γ_1 que l'on calculera. Quelle est alors la vitesse de l'hélium ?

4. a) Trouver $Q_{\max}$ lorsque A_1 est un photon de fréquence ν . Application numérique.
 b) En déduire la fréquence ν' du photon diffusé en fonction de ν . Quelle est la valeur de l'écart correspondant en longueur d'onde, $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$? Commenter.

P7– 28. Fusée rapide

Une fusée se déplace, à la vitesse $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$, suivant un axe Ox , dans l'espace intersidéral $\mathcal{R} = Oxyz$, en éjectant un gaz avec une vitesse $\mathbf{u} = -u\mathbf{e}_x$ par rapport à la fusée. On se propose d'établir l'équation du mouvement du centre de masse de la fusée en dynamique d'Einstein.

1. Quelle est la vitesse d'éjection w de la masse élémentaire dm de gaz, par rapport à $\mathcal{R}$, en fonction des vitesses u et v ?

2. Exprimer les lois de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement, entre les instants voisins t et $t + dt$.

3. En déduire, en introduisant $\gamma_v = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ et $\gamma_w = (1 - w^2/c^2)^{-1/2}$, que :

$$d(\gamma_v M) = -\gamma_w dm \quad \text{et} \quad \frac{dM}{M} = -\frac{\gamma_v^2 dv}{u}$$

4. Établir la relation entre v , u et M , sachant qu'à l'instant initial $v = v_0$ et $M = M_0$. Calculer le rapport M/M_0 pour $v = 0,3c$, $u = 0,1c$ et $v_0 = 0$.

5. Que devient la relation précédente dans l'approximation newtonienne?

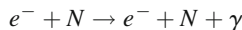
P7– 29. Trajet d'un électron dans un microscope entre son émission et sa détection

Dans un canon de microscope électronique, des électrons sont arrachés, sans vitesse initiale, d'une cathode métallique puis accélérés, grâce à une anode portée au potentiel V_a par rapport à la cathode.

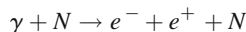
1. Exprimer le facteur relativiste γ_a à la sortie de l'anode, en fonction de V_a . Calculer sa valeur pour $V_a = 1,5$ MV. En déduire la valeur du rapport β_a de la vitesse v_a de la particule sur c , vitesse de la lumière dans le vide, ainsi que celle de la quantité de mouvement p_a en MeV $\cdot c^{-1}$.

2. Une fois la vitesse v_a acquise, l'électron pénètre dans une région où règne un champ magnétique constant $\mathbf{B}$, normal à la direction de $\mathbf{v}_a$. Calculer, en mT, la valeur du champ magnétique qui est nécessaire pour que la trajectoire des électrons soit un cercle de rayon $R = 12$ cm.

3. Les électrons, qui émergent de la zone d'action du champ magnétique, pénètrent dans un détecteur et y subissent la collision suivante avec des noyaux immobiles :



γ représentant un photon émis. Le photon émergent interagit alors avec ce même type de noyau selon la collision :



a) Les deux collisions précédentes sont-elles élastiques ou inélastiques? Justifier.

b) Quel est le seuil énergétique du projectile dans la première collision? Conclure.

c) Même question pour le photon dans la seconde collision? Trouver, en pm, la longueur d'onde seuil du photon γ dans la seconde collision. Comparer sa valeur à la longueur d'onde Compton relative aux électrons. Quel est le domaine spectral concerné, rayonnements IR, V, UV, X, γ ?

8

Physique nucléaire et applications

L'étude des collisions inélastiques a révélé la possibilité de produire de nouvelles particules, pourvu que l'énergie des particules incidentes soit suffisante. Rappelons que c'est dans ce contexte qu'ont été inventées puis découvertes des particules telles que les neutrinos, le positron et l'antiproton.

Comme les énergies mises en jeu dans l'exploration des constituants des noyaux atomiques sont bien plus élevées que dans le cas des atomes ou des molécules, un domaine spécifique de la physique a émergé, la *physique nucléaire*. Son objectif principal est la détermination des éléments irréductibles à partir desquels les noyaux se sont constitués.

Il convient avant tout de rappeler les caractéristiques du noyau des atomes.

I. — LE NOYAU

La première expérience permettant d'analyser le noyau atomique fut réalisée par le physicien néo-zélandais E. Rutherford en 1911, à l'Université de Manchester en Angleterre. Il eut l'idée de bombarder une cible d'or avec des particules α qui sont des noyaux d'hélium de charge $2e$, appelés hélions, d'énergie cinétique suffisante (cf. *Mécanique*). Il constata que seule une faible proportion d'hélions, environ 10^{-5} , étaient déviés et que les angles de déviation étaient en général très faibles.

Il put ainsi en déduire que, contrairement à l'hypothèse de J.J. Thomson, les centres répulsifs étaient chargés positivement et concentrés dans une zone de très faible dimension par rapport à l'atome, appelée le *noyau*, autour duquel gravitaient des charges électriques négatives, les électrons. L'atome se présente alors comme une structure pratiquement vide, entre le noyau, de très forte concentration matérielle, et les électrons relativement très éloignés du noyau.

I. 1. — Ordre de grandeur des dimensions du noyau

Connaissant la valeur de l'énergie cinétique des particules α , dans l'expérience précédente, $\mathcal{E}_k = 7,68 \text{ MeV}$, on peut estimer l'ordre de grandeur de la taille d'un noyau en calculant la longueur d'onde de De Broglie associée aux particules α incidentes qui heurtent la cible (cf. *Quantique*). Comme $\mathcal{E}_k \ll m_\alpha c^2$ qui vaut $3\,727 \text{ MeV}$, on a :

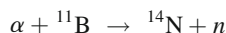
$$\mathcal{E}_k \approx \frac{p^2}{2m_\alpha} \quad \text{d'où} \quad \lambda_{DB} = \frac{h}{p} = \frac{hc}{(2m_\alpha c^2 \mathcal{E}_k)^{1/2}} \approx 5,2 \times 10^{-15} \text{ m} \quad \text{soit} \quad \lambda_{DB} \approx 5 \text{ fm}$$

Retenons que la taille d'un noyau est de l'ordre du femtomètre, appelé aussi le fermi, en hommage au physicien italien E. Fermi ($1 \text{ F} = 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$).

I. 2. — Constituants du noyau

De multiples autres expériences de bombardement d'atomes, par des particules α ou des électrons, ont été réalisées depuis, notamment par Rutherford et le physicien britannique J. Chadwick.

Dans ce contexte, le premier établit, en 1919, la présence, dans le noyau, du proton, lequel fut découvert par Goldstein en 1887. Le second mit en évidence, en 1932, l'existence de l'autre constituant du noyau, le neutron, en envoyant des particules α sur une cible en bore selon la réaction :



Ces expériences ont permis d'établir que le noyau est constitué de *nucléons*, d'une part les protons, de charge e et de masse $m_p \approx 938,27 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2}$, les neutrons, de charge nulle comme leur nom l'indique, et de masse voisine de m_p , $m_n \approx 939,565 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2}$.

On désigne généralement par A le nombre de nucléons, Z le nombre de protons dans le noyau et N le nombre de neutrons. On a, ainsi :

$$A = Z + N$$

Ainsi, on désigne le noyau d'uranium 238 par ${}^{238}\text{U}$ avec :

$$A = 238 \text{ nucléons} \quad Z = 92 \text{ protons} \quad \text{et} \quad N = A - Z = 146 \text{ neutrons}$$

I. 3. — Relation entre le rayon du noyau et le nombre de nucléons

Il existe une relation simple, entre le nombre de nucléons A et le rayon r du noyau, que l'on a vérifié expérimentalement en bombardant différents noyaux :

$$r = r_0 A^{1/3} \quad \text{avec} \quad r_0 = 1,1 \text{ fm}$$

On interprète simplement la dépendance en $A^{1/3}$ en admettant que le volume $\mathcal{V}$ du noyau est proportionnel au nombre de nucléons : $\mathcal{V} = 4\pi r^3/3 = \text{Cte} \times A$.

Par exemple, selon ce modèle, le rayon d'un noyau de carbone est $r_C = 1,1 \times 12^{1/3} = 2,5 \text{ fm}$, résultat que confirment des expériences de diffraction d'électrons par des noyaux de carbone.

On peut déduire du rayon d'un noyau un ordre de grandeur de sa masse volumique. Ainsi, pour un noyau de carbone :

$$\rho = \frac{m_C}{4\pi r^3/3} = \frac{12 \times 1,67 \times 10^{-27}}{4\pi \times 2,5^3 \times 10^{-45}/3} = 2,4 \times 10^{17} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

ce qui est considérable, comparée à la masse volumique de l'eau ($10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$). Ainsi, la presque totalité de la masse des atomes est concentrée dans le noyau.

Remarque : Des expériences plus fines ont montré que l'on pouvait adopter le modèle suivant pour la masse volumique du noyau ρ , en fonction de la seule coordonnée radiale r :

$$\rho(r) = \frac{\rho(0)}{1 + \exp[(r - r_0)/(0,228r_n)]} \quad \text{avec} \quad r_n = 2,4 \text{ fm} \quad \text{et} \quad r_0 = 1,1 \text{ fm}$$

I. 4. — Isotopes et isomères

a) Isotopes

Les noyaux qui ont un même nombre de protons ne contiennent pas nécessairement le même nombre de neutrons. On les appelle des *isotopes*. Le nombre d'électrons des atomes correspondants étant le même, leurs propriétés chimiques sont identiques. Conventionnellement, on désigne un noyau selon :

$${}^A_Z\text{X}_N^{n+} \quad \text{soit} \quad {}^{57}_{26}\text{Fe}_{31}^{2+}$$

pour l'isotope 57 du fer. Très souvent, on se contente de l'écriture moins explicite ${}^{57}_{26}\text{Fe}$, en omettant le nombre de neutrons et la charge des noyaux.

Autres exemples :

i) Le noyau d'hydrogène a trois isotopes, le noyau le plus simple le proton ${}^1_1\text{H}$, le deuton ${}^2_1\text{H}$ et le triton ${}^3_1\text{H}$. Les nombres de neutrons contenus dans ces noyaux sont respectivement 0, 1 et 2.

ii) Le noyau d'hélium a deux isotopes : le noyau d'hélium 4, ${}^4_2\text{He}$, qui est superfluide à très basse température (cf. *Thermodynamique*), et le noyau d'hélium 3, ${}^3_2\text{He}$, qui a des propriétés ordinaires à cette même température. Les nombres de neutrons sont respectivement 2 et 1.

iii) Le noyau d'uranium a trois isotopes naturels : le noyau d'uranium 238, ${}^{238}_{92}\text{U}$, le plus répandu sur Terre (99,27 %), le noyau d'uranium 235 ${}^{235}_{92}\text{U}$ (0,72 %), et le noyau d'uranium 234 ${}^{234}_{92}\text{U}$ (0,0055 %) ; les nombres de neutrons sont respectivement 146, 143 et 142. On sépare ces noyaux par diffusion, car leur coefficient de diffusion D varie avec la masse selon la loi de Graham, selon laquelle D proportionnel à $m^{-1/2}$ (cf. *Thermodynamique*).

b) Isomères

Comme en chimie, les isomères des noyaux sont caractérisés par des valeurs identiques de A , de Z et donc de N , mais ils se trouvent dans des états d'énergie différents ; l'état fondamental correspond à la valeur la plus faible de cette énergie, alors que les états excités sont d'énergie plus élevée. En se désexcitant vers l'état fondamental, ils émettent un rayonnement γ dont l'énergie est de l'ordre du MeV.

I. 5. — Cohésion du noyau

On explique la cohésion des nucléons (protons et neutrons) dans un noyau par l'existence d'une force entre nucléons, capable de compenser la répulsion électrostatique entre protons. Cette force, dite d'*interaction forte*, est donc, à l'échelle du noyau, plus intense que la force de répulsion coulombienne.

Comme cette force s'oppose à l'interpénétration des nucléons, elle est répulsive lorsque les nucléons sont trop proches les uns des autres. Pour des distances plus grandes, de l'ordre de 1 fm, elle est attractive. Enfin, elle s'effondre lorsque la distance est de quelques fm (~ 5 fm) ; elle est donc de très courte portée. Cette interaction ne dépend pas uniquement de la distance r entre les nucléons ; elle est aussi une fonction de l'état de chaque nucléon, précisément de leur moment cinétique interne ou *spin* (cf. *Quantique*).

Sur la figure 8.1, on a représenté le graphe donnant la dépendance de l'énergie potentielle d'interaction forte $\mathcal{E}_p(r)$ avec la distance r entre deux nucléons. L'énergie potentielle passe par une valeur minimale pour $r = r_0$: la force est répulsive lorsque $r < r_0$, et attractive si $r > r_0$.

On peut mettre $\mathcal{E}_p(r)$ sous une forme proche de l'interaction coulombienne $\mathcal{E}_p = K/r$:

$$\mathcal{E}_p = -\frac{g_s^2}{r} \exp(-\mu r)$$

g_s^2 et μ étant des caractéristiques de l'interaction forte (strong en anglais), le facteur $\exp(-\mu r)$ traduisant un écrantage ; le signe moins exprime le caractère attractif de l'interaction forte.

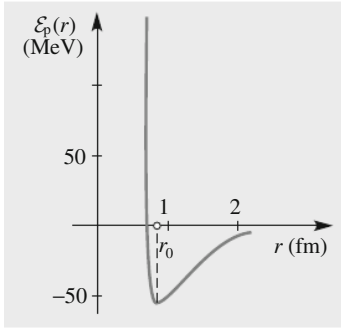


FIG. 8.1.

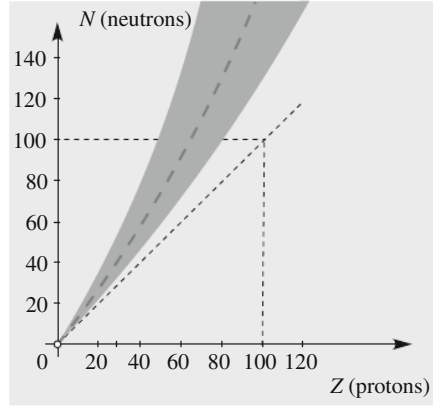


FIG. 8.2.

i) Le coefficient d'interaction g_s^2 , qui s'exprime en $\text{J} \cdot \text{m}$ ou mieux en $\text{MeV} \cdot \text{fm}$, est de l'ordre de $\hbar c$, précisément :

$$g_s^2 \sim \hbar c = \frac{1,05 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{10^6 \times 1,6 \times 10^{-19}} \approx 200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$$

ii) La distance $1/\mu$, qui traduit un affaiblissement exponentiel de l'interaction, s'obtient à l'aide de l'énergie de masse $m_\pi c^2 = 138 \text{ MeV}$ des mésons π , lesquels peuvent être considérés comme des intermédiaires entre nucléons :

$$\frac{1}{\mu} \sim \frac{\hbar c}{m_\pi c^2} = \frac{1,05 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{138 \times 10^6 \times 1,6 \times 10^{-19}} = 1,4 \text{ fm}$$

Remarque : La force correspondant à l'interaction forte se déduit de l'énergie potentielle précédente selon :

$$\mathbf{F} = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} \mathbf{e}_r = -\frac{g_s^2}{r^2} (1 + \mu r) \exp(-\mu r) \mathbf{e}_r$$

En raison de la faible portée de l'interaction nucléaire, chaque nucléon n'est attiré que par ses proches voisins, indépendamment de la taille du noyau, contrairement à la répulsion électrostatique qui, elle, de portée infinie, implique tous les protons du noyau. Finalement, la cohésion des noyaux et donc leur stabilité dépendent à la fois de l'attraction forte et de la répulsion électrostatique. Sur la figure 8.2, on a représenté la *vallée de stabilité* des noyaux à l'aide d'un diagramme Z, N , dans lequel on a porté en abscisse le nombre Z de protons et en ordonnée le nombre $N = A - Z$ de neutrons. Pour $Z < 20$, les noyaux stables sont ceux pour lesquels $Z = N$; pour $Z > 20$, l'influence de la répulsion électrostatique implique que les noyaux stables aient plus de neutrons que de protons. La vallée de stabilité suit la bissectrice du diagramme (Z, N) pour Z faible et passe au-dessus de la bissectrice pour Z grand.

Deux autres raisons limitent la stabilité des noyaux :

i) L'agitation des nucléons à l'intérieur des noyaux, surtout quand ces derniers possèdent un excès de nucléons de même nature,

ii) L'impossibilité pour deux nucléons, de même type, de se trouver dans le même état, car les nucléons sont des fermions (cf. *Thermodynamique*).

La grande stabilité de certains noyaux lourds, pourtant riches en protons, conforte le modèle des états des nucléons disposés en couches fortement remplies ; c'est le cas de l'étain 100.

I. 6. — Niveaux d'énergie des noyaux

On peut estimer l'énergie d'un nucléon du noyau en assimilant l'énergie potentielle de confinement, due à l'interaction entre nucléons, à un puits d'énergie potentielle, carré et infiniment profond, de largeur $L = 1 \text{ fm}$. Il vient, pour l'état fondamental ($n = 1$), d'après l'analyse quantique (cf. *Quantique*) :

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m_n L^2} \quad \text{soit} \quad \mathcal{E} = \frac{10^{-68} \pi^2}{2 \times 1,67 \times 10^{-27} \times 10^{-30} \times 1,6 \times 10^{-19}} \approx 200 \text{ MeV}$$

Ainsi, l'énergie d'un noyau, dont le nombre de nucléons est A , est de l'ordre de $200A \text{ MeV}$. Il est instructif de comparer cette énergie à l'énergie potentielle électrostatique de Z protons distribués uniformément dans un volume sphérique de rayon R . Il vient (cf. *Électromagnétisme*) :

$$\mathcal{E}_p = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{(4\pi\epsilon_0)R} = 0,6 \frac{Z^2 q_e^2}{R} \quad \text{avec} \quad q_e^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

On trouve :

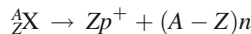
$$\mathcal{E}_p = Z^2 \frac{0,6 \times 230,71 \times 10^{-30}}{10^{-15} \times 1,6 \times 10^{-19}} = 0,86 Z^2 \text{ MeV}$$

ce qui est nettement inférieur à la valeur $200A \text{ MeV}$ calculée précédemment : pour $Z = 50$ et $N = 50$, $\mathcal{E} = 20\,000 \text{ MeV}$, alors que $\mathcal{E}_p = 2\,150 \text{ MeV}$.

I. 7. — Énergie de liaison d'un noyau atomique

a) Définition

L'énergie de liaison $\mathcal{E}_l$ du noyau ${}_Z^A\text{X}$ est l'énergie qu'il faut fournir au noyau, au repos, pour séparer, *sans énergie cinétique*, les Z protons et les $A - Z$ neutrons qui le forment. C'est donc l'énergie que nécessite la réaction générale suivante pour se produire :



Le bilan énergétique de la réaction s'écrit, en fonction des masses M , m_p et m_n du noyau, du proton et du neutron, respectivement :

$$\mathcal{E}_l + Mc^2 = Zm_p c^2 + (A - Z)m_n c^2$$

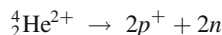
On en déduit l'expression de l'énergie de liaison :

$$\mathcal{E}_l = Zm_p c^2 + (A - Z)m_n c^2 - Mc^2$$

Comme il est nécessaire, pour dissocier un noyau atomique, de vaincre les forces nucléaires responsables de sa cohésion, cette énergie de liaison est toujours *positive*. Les masses sont le plus souvent données en unité de masse atomique (u). Rappelons sa valeur :

$$1 \text{ u} = 1,660\,54 \times 10^{-27} \text{ kg} = 931,468 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2} \approx 931,5 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2}$$

Exemple : Calculons l'énergie de liaison du noyau d'hélium à l'aide de la réaction :



On a :

$$\mathcal{E}_l = 2m_p c^2 + 2m_n c^2 - m_\alpha c^2 = 2 \times 938,27 + 2 \times 939,565 - 3\,727,27 = 28,4 \text{ MeV}$$

b) Énergie de liaison par nucléon

Désignons l'énergie de liaison moyenne par nucléon par b (de l'anglais, *binding energy* qui signifie énergie de liaison) :

$$b = \frac{\mathcal{E}_l}{A}$$

Sur la figure 8.3, on a représenté la courbe donnant l'énergie de liaison par nucléon b en fonction de A : b augmente d'abord rapidement pour les noyaux légers, passe par un maximum large pour les noyaux moyennement lourds puis diminue lentement pour des valeurs plus grandes de A .

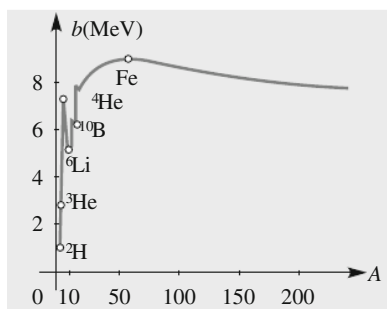


FIG. 8.3.

La valeur maximale est celle du noyau de fer (${}^{56}_{26}\text{Fe}$) : $b_{Fe} = 8,79$ MeV. Pour le noyau d'hélium (${}^4_2\text{He}^{2+}$), cette énergie est $b_{He} = 7,07$ MeV, alors que, pour un noyau lourd, tel que celui de l'uranium ${}^{238}_{92}\text{U}$, elle vaut $b_U = 7,6$ MeV. Il en résulte que la rupture d'un noyau lourd en deux parties (fission) ou l'agrégation de deux noyaux légers libérerait de l'énergie (fusion).

Remarque : À l'aide de la figure, on voit que l'hélium et le fer apparaissent comme les éléments les plus stables, le premier parmi les éléments légers, le second parmi les lourds.

I. 8. — Transmutation nucléaire

La première transmutation nucléaire fut réalisée en 1932 par les physiciens britannique J. Cockroft et irlandais E. Walton, à partir d'une prévision et d'une suggestion du physicien d'origine russe G. Gamow. En projetant des protons sur des cibles de lithium 7, ils observèrent la production de paires de noyaux d'hélium ; en pénétrant dans les cibles qui contiennent trois protons et quatre neutrons, ils forment des noyaux de béryllium 8, avec quatre protons et quatre neutrons, lesquels fissionnent en deux noyaux d'hélium. Le bilan énergétique confirme bien la transformation einsteinienne d'énergie en masse.

Jusqu'en 1939, on pensait qu'il était impossible de créer des noyaux transuraniens, c'est-à-dire plus lourds que le noyau d'uranium. C'était une erreur, car dès 1940 on put fabriquer le neptunium ($Z = 93$) et le plutonium ($Z = 94$). Puis, en bombardant des cibles d'uranium ou de plutonium avec des neutrons ou des particules α , on produisit successivement :

- en 1944, l'américium, $Z = 95$,
- en 1944, le curium, $Z = 96$,
- en 1949, le berkelium, $Z = 97$,
- en 1950, le californium, $Z = 98$,
- en 1952, l'einsteinium, $Z = 99$ et le fermium, $Z = 100$,
- en 1955, le mendelevium, $Z = 101$.

Pour obtenir des éléments plus lourds, on a bombardé des cibles de plutonium, de californium, d'américium et de plomb avec des noyaux de carbone, d'oxygène, de néon, de bore et d'azote. On a pu ainsi mettre en évidence, par cette technique dite de *fusion chaude* :

- en 1957, le nobelium (de A. Nobel), $Z = 102$,
- en 1961, le lawrencium (de E. Lawrence), $Z = 103$,
- en 1969, le rutherfordium (de E. Rutherford), $Z = 104$,
- en 1967, le dubnium (du centre russe de Dubna), $Z = 105$,
- en 1974, le seaborgium (de G. Seaborg), $Z = 106$.

Depuis 1981, on fabrique des éléments encore plus lourds, en projetant, sur des cibles d'éléments moins lourds comme le plutonium, des projectiles un peu plus lourds tels que des noyaux de calcium :

- en 1981, le nielsbohrium (de N. Bohr) $Z = 107$,
- en 1984, le hassium (de N. Hasse), $Z = 108$,
- en 1982, le meitnerium (de L. Meitner), $Z = 109$.

Par opposition à la précédente, cette technique est dite de *fusion froide*, à ne pas confondre avec l'hypothétique fusion froide électrochimique évoquée plus loin.

Les éléments $Z = 110$, $Z = 111$, $Z = 112$ et $Z = 114$ ont été obtenus respectivement en 1994, 1996 et 1999. Le dernier est issu de collisions produites au centre russe de Dubna, entre des projectiles de $^{48}_{20}\text{Ca}$ et des cibles de $^{244}_{94}\text{Pu}$; il a un nombre de nucléons égal à $A = 289$ et il est relativement stable puisque sa demi-vie est de 30 s. Notons qu'à ce jour l'élément $Z = 113$ n'a pu être mis en évidence.

Remarque : Jusqu'à présent, aucun noyau *sans proton*, et donc constitué de neutrons uniquement, n'a pu être mis en évidence ! Les physiciens pensent créer bientôt de tels noyaux en provoquant une désintégration du bore 15.

II. — RADIOACTIVITÉ

La radioactivité a été découverte par le physicien français H. Becquerel en 1896 sur des cristaux de sulfate double d'uranium et de potassium : l'élément uranium émet spontanément un rayonnement intense capable d'impressionner une plaque photographique. Ce phénomène a été ensuite longuement étudié par M. Curie, physicienne française d'origine polonaise, et P. Curie, son époux spécialiste de piézo-électricité. Ils prouvèrent l'existence de corps de radioactivité aussi forte ou plus forte que celle de l'uranium : le thorium, le polonium et le radium.

II.1. — Nature des rayonnements des corps naturels radioactifs

Historiquement, l'analyse soignée des rayonnements provenant d'une source naturelle radioactive a montré que, contrairement à toute attente, les noyaux n'émettaient pas leurs constituants mais trois rayonnements bien distincts par leurs propriétés.

i) Rayonnement α : ce sont des noyaux d'hélium ^4_2He , de charge positive $2e$, qui sont très vite arrêtés par la matière.

ii) Rayonnement β^- : ce sont des électrons, évidemment de charge négative $-e$, très pénétrants en raison de leur énergie cinétique importante,

iii) Rayonnement γ : c'est un rayonnement électromagnétique très énergétique, puisque les photons associés ont une énergie de l'ordre de 1 MeV.

Sur la figure 8.4, on a représenté ces trois rayonnements, les deux premiers déviés par un champ magnétique dans des directions opposées, le troisième insensible à ce champ.

Remarque : Notons que le troisième rayonnement concerne des particules de masse nulle, contrairement aux deux premiers.

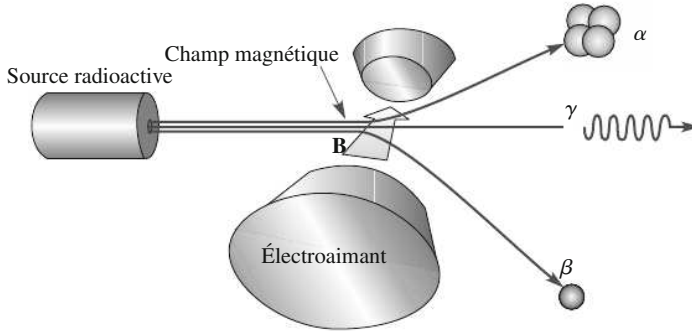


FIG. 8.4.

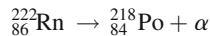
II.2. — Loi de désintégration radioactive

a) Caractère aléatoire de la désintégration radioactive

La désintégration radioactive est un phénomène *aléatoire* : on ne sait pas quel atome va se désintégrer, mais la probabilité $P(t)$ pour qu'un noyau ne soit pas désintégré, à l'instant t , varie au cours du temps, selon la loi exponentielle décroissante suivante :

$$P_0(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

C'est bien ce que montre l'analyse expérimentale faite, par exemple, sur le noyau de radon 222 ($^{222}_{86}\text{Rn}$) qui donne, par désintégration α , du polonium 218 selon :



On compte, à plusieurs instants t_i , pendant une même durée $\theta < |t_j - t_i|$, quels que soient i et j , le nombre $n(t_i, t_i + \theta)$ d'impulsions reçues par le détecteur et donc le nombre de noyaux qui se sont désintégrés, pendant θ . On a donc :

$$n(t_i, t_i + \theta) = N(t_i) - N(t_i + \theta) = N(0) \exp(-\lambda t_i) [1 - \exp(-\lambda \theta)]$$

On en déduit, si t_0 est l'un de ces instants :

$$\frac{n(t_i, t_i + \theta)}{n(t_0, t_0 + \theta)} = \exp[-\lambda(t_i - t_0)] \quad \text{d'où} \quad \ln\left(\frac{n_i}{n_0}\right) = \ln\left[\frac{n(t_i, t_i + \theta)}{n(t_0, t_0 + \theta)}\right] = -\lambda(t_i - t_0)$$

En traçant le graphe de $\ln(n_i/n_0)$, en fonction de t_i , on en déduit la pente λ de la droite obtenue. Cette quantité, homogène à l'inverse d'une durée, est appelée la *constante radioactive* de la désintégration (Fig. 8.5a). Il en résulte que la réaction de désintégration suit la loi radioactive :

$$N(t) = N(0) \exp(-\lambda t) = N(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Une manière de justifier la loi expérimentale précédente consiste à effectuer un bilan de particules. Entre les instants voisins t et $t + dt$, la variation dN du nombre de particules N , qui ne se sont pas encore désintégrées, est l'opposée du nombre dN_d de particules qui se sont désintégrées, pendant la durée dt . Or ce nombre est proportionnel à la fois à N et à dt :

$$dN = -Cte \times N dt \quad \text{soit} \quad \frac{dN}{N} = -\frac{dt}{\tau}$$

en introduisant la constante de temps caractéristique τ . On trouve alors aisément, par intégration de l'équation différentielle précédente (cf. annexe 1) :

$$N(t) = Cte \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = N(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{puisque} \quad Cte = N(0)$$

Sur la figure 8.5b, on a représenté le nombre de noyaux non désintégrés au cours du temps. La pente à l'origine de $N(t)$ coupe l'axe des abscisses à l'instant $\tau = 1/\lambda$.

Une autre façon plus rapide pour déterminer λ consiste à porter directement sur un graphe le nombre d'impulsions détectées, en fonction de t_i , puis à faire passer numériquement, par tous les points, une courbe ayant la forme d'une exponentielle décroissante.

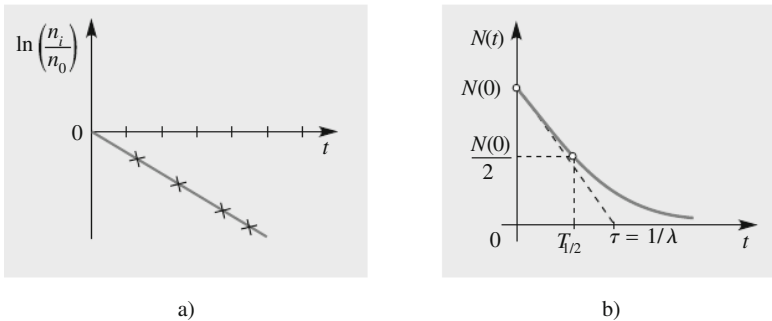


FIG. 8.5.

b) Justification probabiliste de la loi de désintégration radioactive

La loi exponentielle $P(t) = \exp(-t/\tau)$ peut être établie simplement à partir de considérations statistiques associées à la distribution de Poisson (cf. *Thermodynamique*). En effet, la probabilité élémentaire p_e pour que se produise une désintégration, pendant la durée élémentaire dt , est très faible, puisque $p_e = dt/\tau$, alors que, pendant la durée finie t , le nombre d'épreuves est un nombre très grand $N = t/dt$. On a donc :

$$p_e \ll 1 \quad \text{et} \quad N \gg 1 \quad \text{avec} \quad p_e N = \frac{t}{\tau}$$

Ces conditions définissent une loi statistique de Poisson, donnant la probabilité pour qu'un noyau ait subi n désintégrations, à l'instant t :

$$P_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{t}{\tau}\right)^n \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

On en déduit la probabilité pour qu'il n'y ait eu aucune désintégration, entre les instants $t = 0$ et t :

$$P_0 = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

La durée τ représente aussi la durée moyenne entre deux désintégrations ; en effet :

$$\int_0^{\infty} t \, dP(t) \quad \text{avec} \quad dP(t) = P_0(t) \times \frac{dt}{\tau}$$

puisque la probabilité pour qu'un noyau se désintègre, entre les instants t et $t + dt$, est le produit des probabilités de deux événements indépendants, la probabilité $P_0(t)$, pour qu'à l'instant t , le noyau ne soit pas encore désintégré, par celle dt/τ pour qu'il le soit pendant la durée dt (cf. *Thermodynamique*). Il en résulte :

$$\int_0^{\infty} t \, dP(t) = \int_0^{\infty} \left(-\frac{t}{\tau}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt = \tau \int_0^{\infty} (-x) \exp(-x) dx$$

d'où :

$$\int_0^{\infty} t \, dP(t) = \tau \left\{ [x \exp(-x)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \exp(-x) dx \right\} = \tau$$

Remarque : On peut établir autrement la loi de décroissance exponentielle de la probabilité $P_0(t)$. Comme précédemment, on découpe l'intervalle de temps t , entre l'instant origine 0 et l'instant t , en un grand nombre N d'intervalles élémentaires dt . Entre 0 et dt la probabilité pour qu'il n'y ait pas de désintégration est $1 - dt/\lambda$. La probabilité pour qu'il en soit encore ainsi, à l'instant t est donc, puisque les événements successifs sont indépendants :

$$\left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) \cdots = \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right)^N = \left(1 - \frac{t}{N\tau}\right)^N$$

Cette dernière expression donne précisément la loi recherchée puisque, en faisant tendre N vers l'infini, $N = t/dt$ étant très grand, on trouve :

$$P_0(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

c) Demi-vie d'une substance radioactive

On introduit généralement la *demi-vie* $T_{1/2}$ d'une substance radioactive qui est la durée au bout de laquelle le nombre de noyaux non désintégrés est égale à la moitié du nombre initial de noyaux. Elle est reliée à τ ou λ selon :

$$N(t + T_{1/2}) = \frac{1}{2}N(t) \quad \text{soit} \quad N(0) \exp\left(-\frac{t + T_{1/2}}{\tau}\right) = \frac{N(0)}{2} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

d'où :

$$T_{1/2} = \tau \ln 2 = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}$$

En général, on caractérise la décroissance radioactive par $T_{1/2}$, de laquelle on déduit, si besoin est, τ et λ .

d) Vitesse de désintégration radioactive

La *vitesse de désintégration* est définie par l'équation suivante :

$$v_d = -\frac{dN}{dt} \quad \text{soit} \quad v_d = \frac{N}{\tau} = \lambda N$$

si la source considérée est *seule* à contribuer à la variation de la population des noyaux considérés. Elle est représentée graphiquement par l'opposé de la pente du graphe $N(t)$.

e) Activité d'une substance radioactive

Nous définissons l'activité d'une substance radioactive par la quantité A :

$$A = \lambda N = \frac{N}{\tau} \quad \text{ce qui s'écrit} \quad A = A_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{avec} \quad A_0 = \lambda N_0 = \frac{N_0}{\tau}$$

Comme on l'a vu précédemment, l'activité mesure la vitesse de désintégration pour un corps radioactif seul, car alors :

$$A = \lambda N = \frac{N}{\tau} = -\frac{dN}{dt}$$

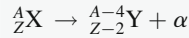
Elle s'exprime en nombre de désintégrations par seconde, unité appelée le *becquerel* Bq. Comme cette unité est très petite, on utilise le plus souvent le *curie* Ci qui est approximativement l'activité d'un gramme de radium 224 :

$$1 \text{ Ci} = 3,7 \times 10^{10} \text{ Bq}$$

À titre de comparaison, le corps humain a une activité de 10^4 Bq, alors qu'un gramme d'uranium naturel a une activité de $1,3 \times 10^{10}$ Bq, soit environ 0,35 Ci.

II.3. — Radioactivité α

Une désintégration α d'un noyau ${}^A_Z X$ est décrite par la réaction suivante :



la particule α étant un hélium ${}^4_2\text{H}^{2+}$. Une telle désintégration est due à l'instabilité des noyaux de fort A et à la stabilité des noyaux d'hélium.

On voit que le nombre de nucléons et le nombre de protons sont bien conservés dans cette réaction. Écrivons les lois de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement, sachant que le noyau est initialement au repos :

$$m_X c^2 = \mathcal{E}_Y + \mathcal{E}_\alpha \quad \text{et} \quad \mathbf{0} = \mathbf{p}_Y + \mathbf{p}_\alpha$$

Pour établir l'expression de l'énergie cinétique de la particule α en fonction de l'énergie libérée μc^2 , éliminons l'énergie et la quantité de mouvement du noyau Y :

$$(m_X c^2 - \mathcal{E}_\alpha)^2 - p_\alpha^2 c^2 = m_Y^2 c^4 \quad \text{d'où} \quad \mathcal{E}_\alpha = \frac{m_X^2 c^4 + m_\alpha^2 c^4 - m_Y^2 c^4}{2m_X c^2}$$

On en déduit :

$$\mathcal{E}_{k,\alpha} = \frac{(m_X c^2 - m_\alpha c^2)^2 - m_Y^2 c^4}{2m_X c^2} = \frac{(m_X c^2 - m_\alpha c^2 + m_Y c^2)(m_X c^2 - m_\alpha c^2 - m_Y c^2)}{2m_X c^2}$$

soit, puisque $\mu c^2 = m_X c^2 - m_Y c^2 - m_\alpha c^2$:

$$\mathcal{E}_{k,\alpha} = \mu c^2 \frac{m_X c^2 + m_Y c^2 - m_\alpha c^2}{2m_X c^2}$$

Si on néglige les énergies de liaison des noyaux, ce qui est le plus souvent légitime, l'expression précédente se simplifie :

$$\mathcal{E}_{k,\alpha} = \mu c^2 \frac{m_X c^2 + m_Y c^2 - m_\alpha c^2}{2m_X c^2} \approx \mu c^2 \frac{A + (A - 4) - 4}{2A} \quad \text{d'où} \quad \mathcal{E}_{k,\alpha} = \mu c^2 \frac{A - 4}{A}$$

Exemple : Dans la désintégration suivante de l'uranium $^{238}_{92}\text{U} \rightarrow ^{234}_{90}\text{Th} + \alpha$, où :

$$m_{\text{U}}c^2 = 221\,697,7 \text{ MeV} \quad m_{\text{Th}}c^2 = 217\,966 \text{ MeV} \quad \text{et} \quad m_{\alpha}c^2 = 3\,727,4 \text{ MeV}$$

on trouve $Q = 4,3 \text{ MeV}$ et $\mathcal{E}_{k,\alpha} = 4,3 \times 0,983 = 4,23 \text{ MeV}$. Notons que, $\mathcal{E}_{k,\alpha}$ étant très faible devant les énergies de masse des noyaux, le calcul de cette énergie cinétique peut être conduit dans l'approximation newtonienne.

L'interprétation de la désintégration α a été proposée en 1929 par le physicien américain d'origine russe G. Gamow. Elle suppose qu'une particule α , formée à l'intérieur d'un noyau, puisse franchir une barrière d'énergie potentielle, d'origine électrostatique, dont la hauteur est supérieure à son énergie cinétique. Un tel franchissement n'est interprété que dans le cadre de la mécanique quantique, par effet tunnel (cf. *Quantique*).

Dans le tableau 8.1, on a rassemblé les valeurs des demi-vies $T_{1/2}$ pour quelques noyaux subissant une radioactivité α .

Noyau	$^{216}_{86}\text{Rn}$	$^{222}_{86}\text{Rn}$	$^{235}_{89}\text{Ac}$	$^{222}_{89}\text{Ac}$	$^{228}_{90}\text{Th}$
$T_{1/2}$	1,9 ans	45 μs	3,82 jours	$7,04 \times 10^8$ ans	5 s

Noyau	$^{238}_{92}\text{U}$	$^{230}_{92}\text{U}$	$^{237}_{93}\text{Np}$	$^{238}_{94}\text{Pu}$
$T_{1/2}$	$4,17 \times 10^9$ ans	20,8 j	$2,14 \times 10^6$ ans	88 ans

TAB. 8.1.

À titre d'exemple, la demi-vie du radon 222 est $0,33 \times 10^6$ soit 3,82 jours, d'où l'on déduit la constante de désintégration λ et sa durée de vie τ :

$$\lambda = \frac{0,693}{T_{1/2}} = 2,1 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{1}{\lambda} = 0,47 \times 10^6 \text{ s}$$

On peut calculer la probabilité pour qu'un noyau de radon se désintègre au bout d'une seconde :

$$1 - P(1) = 1 - \exp(-\lambda) \approx \lambda = 2,1 \times 10^{-6}$$

Si la masse initiale de radon est de 1 μg , son activité initiale est :

$$A(0) = \lambda N(0) = \lambda N_A \frac{m}{A} = 2,1 \times 10^{-6} \times 6,02 \times 10^{23} \times \frac{10^{-9}}{0,222} = 5,7 \times 10^9 \text{ Bq}$$

Au bout de $t_m = 30$ jours, l'activité se réduit à :

$$A = \lambda N = \lambda N(0) \exp(-\lambda t_m) = A(0) \exp(-\lambda t_m) = 24,5 \times 10^6 \text{ Bq}$$

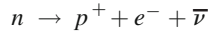
II.4. — Radioactivité β^-

Dans la radioactivité β^- , qui est caractérisée par l'émission d'un électron, un neutron du noyau est transformé en proton. La désintégration β^- d'un noyau ^A_ZX se traduit donc par la réaction :



Ce type de désintégration concerne des noyaux de faible stabilité, car, si N est trop grand, cette désintégration provoque un rapprochement vers le centre de la vallée de stabilité nucléaire (Fig. 8.2). L'anti-neutrino $\bar{\nu}$ permet de satisfaire à la conservation de l'énergie de la réaction.

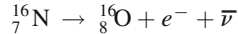
La radioactivité β^- n'a pu être interprétée que par l'introduction de l'interaction faible à la base de la transformation d'un neutron en trois particules, proton, électron et antineutrino :



Cette réaction est effectivement possible car la masse du neutron est supérieure à la somme des masses du proton et de l'électron.

Exemples

i) Désintégration β^- du noyau d'azote 16 :

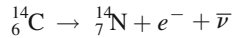


Cette désintégration est possible car la masse du noyau d'azote est supérieure à la somme des masses du noyau d'oxygène et de l'électron :

$$m_N c^2 = 14\,906,1 \text{ MeV} \quad m_O c^2 = 14\,895,2 \text{ MeV} \quad \text{et} \quad m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}$$

La demi-vie du noyau d'azote est de 7,3 s.

ii) Désintégration β^- du noyau de carbone 14 :



Notons que l'existence de l'antiparticule neutre $\bar{\nu}$ a été proposée par W. Pauli en 1931, précisément parce que la somme des quantités de mouvement du proton et de l'électron n'était pas nulle, comme celle du neutron, et que la conservation de l'énergie n'était pas satisfaite. La particule ne fut mise en évidence que 25 ans plus tard (!), par F. Reines et C. Cowan.

II.5. — Radioactivité γ

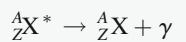
La radioactivité γ des noyaux est l'émission d'un rayonnement électromagnétique de fréquence ν dont le quantum d'énergie $\mathcal{E} = h\nu$ est de l'ordre du MeV :

$$\nu = \frac{\mathcal{E}}{h} = \frac{1,6 \times 10^{-13}}{6,626 \times 10^{-34}} \approx 2,4 \times 10^{20} \text{ Hz} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{c}{\nu} \approx 1,25 \times 10^{-12} \text{ m} = 1,25 \text{ pm}$$

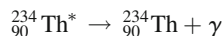
On retrouve cette valeur en rappelant la relation bien connue entre la longueur d'onde, en micron, du rayonnement émis et l'énergie des photons, en électron-volt :

$$\lambda(\mu\text{m}) = \frac{hc}{\mathcal{E}(\text{eV})} 10^6 \times e = \frac{1,239}{\mathcal{E}(\text{eV})}$$

On décrit la radioactivité gamma par l'équation :



On note, dans ce type de radioactivité, aucune modification du nombre de nucléons A ou du nombre de protons Z , mais seulement une réorganisation des nucléons à l'intérieur d'un noyau excité ${}^A_Z\text{X}^*$. Par exemple, le thorium 234 excité émet un rayonnement γ d'énergie 0,05 MeV en se désexcitant (Fig. 8.6a) :



De la même façon, le noyau de mercure 198 peut se trouver dans deux états excités ; il en résulte trois émissions γ associées à des transitions vers des niveaux d'énergie plus faible (Fig. 8.6b) : la première d'énergie 0,412 MeV, la deuxième d'énergie 0,676 MeV, la troisième d'énergie 1,088 MeV.

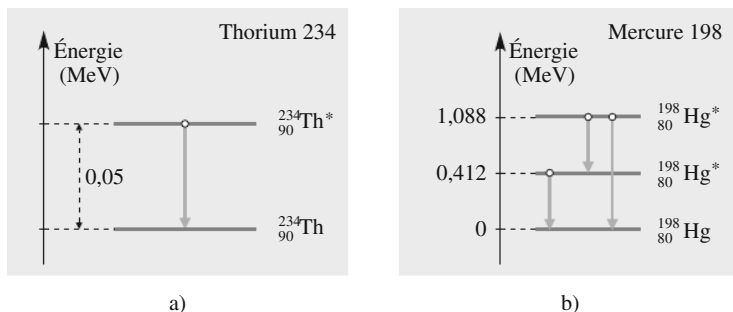
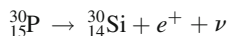


FIG. 8.6.

II.6. — Radioactivité β^+

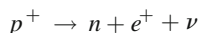
En 1934, les physiciens français F. et I. Joliot-Curie ont établi expérimentalement que des noyaux instables, produits artificiellement, pouvaient émettre aussi des positrons, antiparticules des électrons, de charge e . Ils avaient synthétisé l'isotope radioactif $^{30}_{15}\text{P}$, lequel se désintègre en donnant un noyau de silicium, un positron et un neutrino :



La radioactivité β^+ est décrite par la réaction suivante :



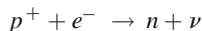
Cette désintégration concerne les noyaux qui sont à la marge de la vallée de stabilité (Fig. 8.2), car Z est trop grand. Là aussi le neutrino ν permet de satisfaire la loi de conservation de l'énergie. Elle peut se réduire à la réaction de transformation d'un proton en neutron :



Notons cependant que l'énergie de masse du proton étant inférieure à celle du neutron, cette réaction n'est possible qu'à l'intérieur d'un noyau, lequel doit modifier son énergie de liaison afin de fournir au moins l'énergie suivante :

$$m_n c^2 + m_e c^2 - m_p c^2 = 939,6 + 0,511 - 938,3 = 1,81 \text{ MeV}$$

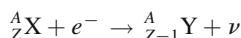
La transformation précédente d'un proton en neutron à l'intérieur d'un noyau suggère la réaction analogue suivante de *capture d'électron* :



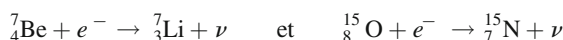
Une telle réaction ne peut pas se produire spontanément, puisque :

$$m_p c^2 + m_e c^2 < m_n c^2$$

Cependant, elle est plus facile à réaliser dans un noyau que la réaction de désintégration β^+ , car l'énergie que le noyau doit fournir est plus faible. La réaction générale de capture est la suivante :



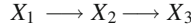
Citons deux exemples de réaction de capture :



de demi-vies 53 jours et 2 mn, respectivement.

II. 7. — Filiations radioactives

Un noyau X_1 se désintègre en un noyau X_2 , lequel à son tour se désintègre en donnant un noyau X_3 . Le schéma réactionnel est alors le suivant :



Si l'on désigne respectivement par $N_1(t)$, $N_2(t)$, $N_3(t)$, les nombres de radionucléides X_1 , X_2 , X_3 à l'instant t , les populations $N_1(t)$, $N_2(t)$, $N_3(t)$ satisfont aux équations différentielles suivantes :

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 \quad \frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \quad \text{et} \quad \frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2$$

λ_1 et λ_2 étant les constantes radioactives des deux réactions $X_1 \longrightarrow X_2$ et $X_2 \longrightarrow X_3$. L'intégration de la première équation donne :

$$N_1(t) = N_1(0) \exp(-\lambda_1 t)$$

En injectant ce résultat dans la deuxième, on obtient pour $N_2(t)$ (cf. Exercices) :

$$N_2(t) = N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} [\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_2 t)]$$

Enfin, à partir de cette dernière expression, on trouve pour $N_3(t)$:

$$N_3(t) = N_1(0) \left[1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(-\lambda_1 t) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(-\lambda_2 t) \right]$$

Sur la figure 8.7, on a représenté la variation, au cours du temps, des populations $N_1(t)$, $N_2(t)$ et $N_3(t)$.

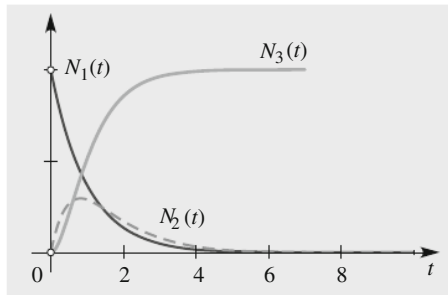


FIG. 8.7.

On voit que $N_2(t)$ est maximale, c'est-à-dire que la vitesse de désintégration de X_2 est nulle, lorsque les activités de X_1 et X_2 sont égales :

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 = 0 \quad \text{pour} \quad \lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2$$

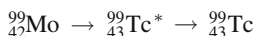
Cette condition se produit au bout de la durée τ telle que :

$$\lambda_1 N_1(0) \exp(-\lambda_1 \tau) = \lambda_2 N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} [\exp(-\lambda_1 \tau) - \exp(-\lambda_2 \tau)]$$

d'où :

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = [\exp(\lambda_2 - \lambda_1)\tau] \quad \text{et} \quad \tau = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)$$

Par exemple, dans le cas de la filiation radioactive molybdène-technétium métastable-technétium :



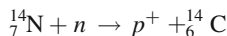
très utilisée en imagerie médicale, on a, puisque les demi-vies sont respectivement $T_1 = 67 \text{ h}$ et $T_2 = 6 \text{ h}$:

$$\tau = \frac{1}{0,693/6 - 0,693/67} \ln \left(\frac{67}{6} \right) = 22,9 \text{ h}$$

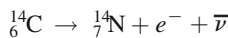
II.8. — Applications et effets biologiques de la radioactivité

a) Datation par la radioactivité

En 1947, le chimiste américain W. Libby eut l'idée d'utiliser la radioactivité β^- du carbone 14 présent dans les corps sur la Terre pour les dater. Tous les corps vivants possèdent une fraction déterminée de carbone 14, de l'ordre de $1,3 \times 10^{-12}$, par rapport au carbone 12 qui, lui, est stable. En effet, les neutrons, produits par le rayonnement cosmique, interagissent avec les noyaux d'azote pour produire du carbone 14 selon :



À la mort du corps, cette fraction diminue en raison de la radioactivité β^- du carbone 14 :



On mesure alors l'activité radioactive du carbone 14 et on extrapole la courbe donnant son évolution au cours du temps. La méthode est efficace pour des durées à mesurer de l'ordre de quelques durées de vie, par exemple 10 000 ans, puisque la demi-vie de la désintégration β^- du carbone 14 est $5\,568 \pm 30$ ans.

Exemple : Soit à déterminer l'âge de résidus osseux dont l'activité du carbone 14 est de 90 Bq, alors qu'elle était initialement de 300 Bq. On a :

$$A(t) = A(0) \exp(-\lambda t) \quad \text{d'où} \quad t = \frac{1}{\lambda} \ln \left[\frac{A(0)}{A(t)} \right] = \frac{5730}{0,693} \ln \left(\frac{300}{90} \right) \approx 9\,970 \text{ ans}$$

Remarques : 1) On mesure l'âge de la Terre en comparant la quantité d'uranium 238, dont la demi-vie est de 4,17 Gan (1 Gan = 10^9 années), à celle du plomb 206 qui est stable. On trouve une valeur de l'ordre de 5 Gan, comme pour la Lune et les météorites du système solaire.

2) Ces travaux valurent à Libby le prix Nobel de Chimie en 1960.

b) Effets biologiques des rayonnements radioactifs

En médecine, on s'intéresse évidemment aux dommages provoqués par les rayonnements radioactifs sur les tissus biologiques. Ces dommages sont liés à l'énergie cédée par les rayonnements à l'unité de masse de tissu.

Aussi introduit-on le *gray*, du nom du physicien anglais L. Gray, ou *unité de dose absorbée*, qui est l'énergie absorbée par kilogramme de matière exposée, et le *sievert*, du nom du physicien suédois R. Sievert, ou *unité équivalente de dose*, car les différents rayonnements, dus à la radioactivité, ne provoquent pas les mêmes effets biologiques, à dose absorbée identique :

$$1 \text{ Gy} = 1 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \quad \text{et} \quad 1 \text{ Sv} = 1 \text{ Gy} \times Q_d$$

Le coefficient Q_d vaut :

$Q_d = 1$ pour des photons γ , des électrons et des protons de faible énergie,

$Q_d = 2$ pour des protons d'énergie supérieure à 1 GeV ,

$Q_d = 3$ pour des neutrons lents,

$Q_d = 10$ pour des neutrons rapides,

$Q_d = 20$ pour des particules α .

Ordres de grandeur : une radiographie pulmonaire correspond à une dose équivalente de 1 mSv , alors que la dose équivalente par irradiation naturelle moyenne en France est 2 mSv . Les doses équivalentes en radiothérapie sont de l'ordre de 40 Sv , 50 Sv étant la dose létale (mortelle).

L'expérience issue de guerres ou d'accidents (conflit de la deuxième guerre mondiale et explosion de la centrale de Tchernobyl, en Ukraine, en 1986, par exemple), montre qu'aucun effet pathologique n'est constaté lorsque l'équivalent de dose est inférieur à 0,3 Sv , soit 150 fois l'équivalent de dose de la radioactivité naturelle.

De 0,3 Sv à 1 Sv , les effets sont réversibles sans traitement médical.

Au-delà de cette dose, une surveillance médicale est nécessaire, avec traitement dans un centre spécialisé, si la dose atteint 2 Sv . On attribue l'augmentation de la probabilité de certains cancers à une exposition accidentelle aux rayonnements radioactifs (dose supérieure à 1 Gy). En revanche, on guérit certains cancers par une exposition maîtrisée des malades aux rayonnements radioactifs (radiothérapie).

Remarque : Les anciennes unités de dose absorbée et de dose équivalente absorbée étaient cent fois plus petites : 1 rad = 0,01 Gy et 1 rem = 0,01 Sv .

c) Traceurs radioactifs

En biologie, on se sert des noyaux radioactifs afin de repérer le cheminement de certaines substances, telles que l'iode stable $^{127}_{53}\text{I}$ dans la glande thyroïde. Dans ce cas, on mélange cet isotope naturel à l'isotope radioactif $^{131}_{53}\text{I}$, lequel a les mêmes propriétés chimiques que l'iode naturel, mais présente une radioactivité β^- , de demi-vie $T_{1/2} = 8,1$ jours .

III. — RALENTISSEMENT DES PARTICULES

Lorsque les particules se déplacent à grande vitesse dans un milieu, elles interagissent avec ce dernier en subissant des diffusions élastiques ou inélastiques. Au cours de ces collisions, elles perdent de l'énergie, ce qui les ralentit. Dans le cas du rayonnement γ , les photons sont absorbés en cours de propagation. Concernant les neutrons, ils sont d'abord ralentis puis absorbés.

III.1. — Pertes d'énergie des particules rapides

On distingue principalement quatre types de perte d'énergie des particules rapides :

i) les pertes par ionisation des particules chargées, du fait de l'interaction coulombienne avec les électrons atomiques,

ii) les pertes par rayonnement de freinage des particules chargées (« *bremsstrahlung* » en allemand),

iii) les pertes par rayonnement Cerenkov des particules, chargées ou non, qui se déplacent, dans un milieu, avec une vitesse plus grande que celle de la lumière dans ce même milieu,

iv) les pertes d'énergie des photons par production de paires électron-positron.

a) Pertes d'énergie par ionisation. Formule de Bethe

Les pertes des particules chargées par ionisation sont les plus importantes. L'énergie cédée aux électrons atomiques d'un milieu, par une particule incidente chargée A_1 , durant un trajet élémentaire de longueur ds , est proportionnelle à la perte d'énergie, notée Q , relative à une collision et au nombre de collisions subies. Ce dernier est égal au nombre de centres diffuseurs contenus dans le cylindre droit, de longueur ds et de section égale à la section efficace de diffusion $d\sigma$ (cf. *Mécanique*) ; il vaut donc $n_d ds$, si n_d désigne le nombre de centres diffuseurs par unité de volume.

Il en résulte que la perte d'énergie $-d\mathcal{E}$, au cours du déplacement élémentaire ds , s'obtient en sommant toutes les valeurs de Q :

$$-d\mathcal{E} = ds \int Q n_d d\sigma \quad \text{avec} \quad n_d = Z n_a \quad \text{et} \quad n_a = \frac{\rho N_A}{M_m}$$

n_a étant le nombre d'atomes par unité de volume, ρ la masse volumique du milieu, N_A le nombre d'Avogadro, Z le nombre d'électrons par atome et M_m la masse molaire des atomes du milieu.

Pour calculer l'intégrale précédente, il faut exprimer $d\sigma$ en fonction de Q . En effectuant ce calcul laborieux, Bethe a établi le résultat suivant, relatif au pouvoir d'arrêt des matériaux pour des particules incidentes autres que des électrons :

$$-\frac{d\mathcal{E}}{ds} = \frac{2\pi q_e^4}{m_e c^2} \frac{Z \rho N_A}{M_m} \frac{Z_1^2}{\beta_1^2} \left[\ln \left(\frac{2\gamma_1^2 \beta_1^2 m_e c^2}{I} \right) - \beta_1^2 \right] \quad \text{avec} \quad q_e^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

où m_e est la masse d'un électron atomique, β_1 le rapport de la vitesse v_1 de la particule incidente sur c , γ_1 le facteur relativiste associé à β_1 , Z_1 le nombre de charges élémentaires de cette particule et I une énergie associée à l'ensemble des états électroniques de l'atome, appelée potentiel moyen d'ionisation. On admet souvent la formule empirique suivante donnant I , en eV, en fonction de Z :

$$I(\text{eV}) = 16 Z^{0,9}$$

Notons que la particule incidente n'intervient que par le carré de sa vitesse (β_1^2) et par celui de sa charge Z_1 . Sur la figure 8.8, on a représenté, pour des particules α , le pouvoir d'arrêt de l'hydrogène liquide, en fonction de $(\gamma_1 - 1)$ qui désigne l'énergie cinétique de A_1 en unité de masse $m_1 c^2$.

Dans ce cas, où $Z_1 = 2$, $Z = 1$, $\rho = 70,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $M_m = 10^{-3} \text{ kg}$, on obtient l'expression suivante de $-d\mathcal{E}/ds$, en $\text{MeV} \cdot \text{m}^{-1}$:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{ds} = \frac{4,35}{\beta_1^2} \left\{ \ln \left[\frac{1,022 \times 10^6 \beta_1^2}{16(1 - \beta_1^2)} \right] - \beta_1^2 \right\}$$

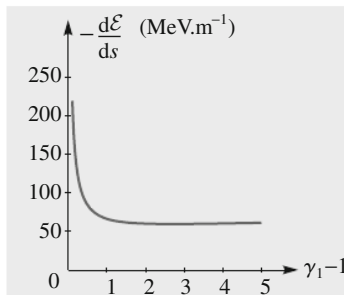


FIG. 8.8.

b) Rayonnement de freinage

La perte d'énergie par ionisation d'une particule incidente chargée s'accompagne nécessairement d'un rayonnement, puisque toute particule chargée, freinée, rayonne une énergie qui est proportionnelle au carré de son accélération (cf. *Électromagnétisme*). Cette perte d'énergie par rayonnement de freinage est négligeable devant la perte par ionisation, lorsque les particules incidentes sont lourdes ou de faible énergie. En revanche, elle est significative pour des électrons dont l'énergie cinétique est supérieure à plusieurs MeV.

c) Rayonnement Cerenkov

Le rayonnement Cerenkov (prononcer Tchérénkof) est le rayonnement émis par un milieu matériel, lorsqu'une particule se déplace dans ce milieu d'indice n , avec une vitesse qui est supérieure à la vitesse de la lumière dans ce même milieu. Il a été observé, pour la première fois en 1935, par le physicien russe P. Cerenkov, ce qui lui a valu le prix Nobel en 1958. La condition d'émission s'écrit :

$$v > \frac{c}{n} \quad \text{soit} \quad \beta > \frac{1}{n}$$

Le phénomène est analogue à l'onde de choc acoustique entendue lorsqu'un avion se déplace à une vitesse supérieure à la vitesse de propagation du son dans l'air (cf. *Mécanique*).

Pour une particule chargée en mouvement dans un milieu matériel, d'indice n , qui provoque l'excitation des atomes rencontrés, la vitesse de phase des ondes lumineuses sphériques émises par ces atomes est c/n . Si cette vitesse est inférieure à la vitesse v de la particule, le milieu est perturbé vers l'arrière du projectile et non vers l'avant (Fig. 8.9).

Désignons par A la position de la particule à l'instant t . À un instant antérieur $t - \tau$, la particule, qui se trouvait au point A_τ , a émis une onde lumineuse sphérique dont le front, à l'instant t , est une sphère Σ ; cette sphère se réduit au point A à l'instant t . On peut reproduire le même raisonnement à tous les instants antérieurs à t . Il en résulte un cône d'accumulation de lumière dont le demi-angle au sommet θ est tel que :

$$\sin \theta = \frac{A_\tau F}{A_\tau A} = \frac{(c/n)\tau}{v\tau} = \frac{1}{\beta n}$$

F étant l'un des points où la tangente menée de A à Σ touche cette sphère. Ainsi, l'effet Cerenkov donne une information précise sur la vitesse de la particule chargée en mouvement. La perte d'énergie occasionnée reste très faible devant les pertes par ionisation.

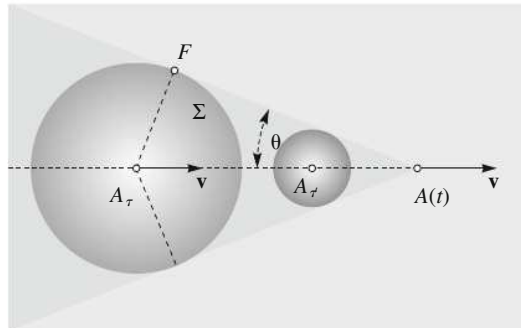


FIG. 8.9.

Ordre de grandeur : Dans le verre, d'indice $n = 1,5$, un électron d'énergie cinétique $\mathcal{E}_k = 3 \text{ MeV}$, provoque une émission Cerenkov, dont le cône d'émission est caractérisé par un demi-angle au sommet θ pour lequel :

$$\sin \theta = \frac{1}{\beta n} = 0,67 \quad \text{puisque} \quad \gamma = 1 + \frac{\mathcal{E}_k}{m_e c^2} = 6,87 \quad \text{et} \quad \beta = \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)^{1/2} = 0,989$$

L'angle θ vaut donc $42,4^\circ$.

d) Matérialisation de photon

Lorsque la particule incidente qui traverse la matière est un photon, ce dernier peut être soit absorbé par effet photo-électrique interne, soit diffusée élastiquement par effet Compton (cf. *Quantique*) soit matérialisé par une paire électron-positron du type suivant :

$$\gamma + A \rightarrow (e^- + e^+) + A$$

Cependant, la matérialisation d'un photon ne joue de rôle significatif que si son énergie est supérieure à 100 MeV (rayonnement γ).

III. 2. — Absorption du rayonnement gamma

Dès qu'il y a interaction, avec la matière qu'il traverse, le rayonnement gamma est soit diffusé par effet Compton, soit absorbé par matérialisation (cf. chapitre 7) ou par effet photo-électrique (cf. *Quantique*). Il en résulte que le nombre de photons γ , encore présents dans un faisceau incident, satisfait à une loi de décroissance exponentielle, en fonction de l'épaisseur x de matériau traversé. On a, en effet, la relation différentielle suivante, entre les épaisseurs x et $x + dx$:

$$dN = -\mu N(x) dx$$

dans laquelle $N(x)$ est le nombre de photons non encore diffusés, après traversée d'une épaisseur x de matière, et μ un coefficient constant, appelé *coefficient d'absorption*. Il vient :

$$\frac{dN}{N} = -\mu dx \quad \text{soit en intégrant} \quad \ln N(x) = -\mu x + \ln \text{Cte}$$

Ainsi :

$$N(x) = \text{Cte} \times \exp(-\mu x) = N(0) \exp(-\mu x) \quad \text{puisque} \quad \text{Cte} = N(0)$$

Par analogie avec la loi de décroissance radioactive, on peut définir la distance caractéristique $L = 1/\mu$ et la demi-distance $L_{1/2}$ telle que :

$$N(L_{1/2}) = \frac{N(0)}{2} = N(0) \exp(-\mu L_{1/2}) \quad \text{soit} \quad \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\mu L_{1/2} \quad \text{et} \quad L_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu} = \frac{0,693}{\mu}$$

III. 3. — Ralentissement et absorption de neutrons

Le ralentissement des neutrons par la matière est dû, soit à leur diffusion élastique par les noyaux, soit à leur absorption lorsque ces noyaux sont lourds ; ces derniers peuvent alors subir une fission en deux noyaux plus légers. L'étude est essentielle, notamment en raison de la nécessité de ralentir les neutrons dans les centrales nucléaires, précisément en faisant passer leur énergie cinétique initiale, qui est de l'ordre de quelques MeV, à quelques centièmes d'eV.

Comme l'énergie cinétique reste faible devant l'énergie de masse des neutrons, qui est de l'ordre du GeV, l'analyse du ralentissement de ces particules peut être conduite simplement dans l'*approximation newtonienne*. En outre, les collisions sont supposées élastiques, car ce sont ces dernières qui jouent un rôle essentiel dans le processus de ralentissement.

Les lois de conservation de la quantité de mouvement totale et de l'énergie cinétique totale, au cours de telles collisions, entre un neutron projectile A_1 , de masse m_1 , et un noyau cible au repos A_2 , de masse 2, s'écrivent, respectivement :

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{0} = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 \quad \text{et} \quad \frac{p_1^2}{m_1} + 0 = \frac{p_1'^2}{m_1} + \frac{p_2'^2}{m_2}$$

La variation de l'énergie cinétique d'un neutron, au cours d'une collision, est donc :

$$\mathcal{E}'_{k,1} - \mathcal{E}_{k,1} = -\frac{p_2'^2}{2m_2}$$

Sur la figure 8.10, on a représenté le diagramme caractéristique d'une collision élastique entre un projectile et une cible au repos en mécanique newtonienne (cf. *Mécanique*) ; le cercle a un rayon égal à μv , $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ étant la masse réduite et v la vitesse v_1 du projectile, car la cible est au repos. L'angle $(\mathbf{OA}, \mathbf{OC})$ est l'angle θ^* de diffusion dans le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$. Il en résulte :

$$p_2' = 2\mu v \sin\left(\frac{\theta^*}{2}\right) \quad \text{d'où} \quad \mathcal{E}'_{k,1} - \mathcal{E}_{k,1} = -2\frac{\mu^2 v^2}{m_2} \sin^2\left(\frac{\theta^*}{2}\right) = -4\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \mathcal{E}_{k,1} \sin^2\left(\frac{\theta^*}{2}\right)$$

Ainsi :

$$\frac{\mathcal{E}'_{k,1}}{\mathcal{E}_{k,1}} = 1 - 4\frac{A}{(1+A)^2} \sin^2\left(\frac{\theta^*}{2}\right) = \frac{1+A^2+2A\cos\theta^*}{(1+A)^2} \quad \text{où} \quad A = \frac{m_2}{m_1}$$

est le rapport de la masse de la cible (noyau lourd) sur celle du projectile (neutron). Ainsi, le rapport entre les énergies cinétiques du neutron, après et avant la collision varie entre deux valeurs extrêmes :

$$\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 \leq \frac{\mathcal{E}'_{k,1}}{\mathcal{E}_{k,1}} \leq 1$$

On voit qu'avec des matériaux, de faible A , par exemple l'hydrogène pour lequel $A = 1$, un neutron peut perdre toute son énergie cinétique au cours d'une seule collision.

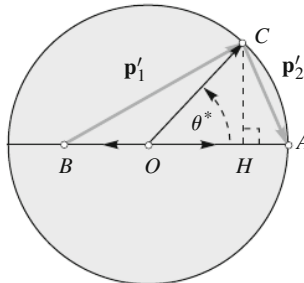


FIG. 8.10.

IV. — LES PARTICULES FONDAMENTALES ET LEUR DÉTECTION

IV.1. — Les quatre interactions fondamentales

L'étude des collisions entre particules a révélé l'existence de deux interactions fondamentales nouvelles, autres que gravitationnelle et électromagnétique :

i) L'interaction forte qui permet d'expliquer la cohésion des noyaux, malgré la répulsion électrostatique des protons. Cette interaction, de très courte portée, est à l'origine du partage de l'ensemble des particules en deux grandes catégories : les *hadrons* (proton, neutron, pion, etc.), sensibles à l'interaction forte, et les *leptons* (électron, muon, neutrino, etc.) au contraire indifférents à cette interaction.

ii) L'interaction faible, de portée encore plus faible, est à l'origine des désintégrations β^- et β^+ .

Contrairement à ces deux interactions, les interactions gravitationnelle et électromagnétique sont à longue portée, puisque les forces associées varient toutes deux, en fonction de la distance r qui sépare les particules, comme $1/r^2$. Cependant, elles diffèrent fondamentalement quant à leur ordre de grandeur, comme le montre l'exemple du système formé par un proton et un électron dans l'atome d'hydrogène :

$$F_{2 \rightarrow 1}^{elec} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{e^2}{r^2} \right) = \frac{q_e^2}{r^2} \quad \text{et} \quad F_{2 \rightarrow 1}^{grav} = \frac{Gm_p m_e}{r^2}$$

Le rapport de ces forces est donc :

$$\frac{Gm_p m_e}{q_e^2} \sim 0,44 \times 10^{-39}$$

Une façon systématique de classer les différentes interactions consiste à comparer leurs grandeurs caractéristiques à une quantité universelle associée aux deux constantes fondamentales : h ou $\hbar$ et c . Comme le produit $\hbar c$ est homogène au produit d'une énergie par une longueur, on effectue le rapport suivant :

$$\alpha = \frac{\mathcal{E}R}{\hbar c} \quad \text{avec} \quad \hbar c = 1,05 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8 = 3,15 \times 10^{-26} \text{ J} \cdot \text{m}$$

dans lequel $\mathcal{E}$ et R désignent une énergie et une longueur caractéristiques de l'interaction.

i) Pour l'interaction forte, qui permet d'expliquer la cohésion des noyaux, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_s$ et $R = R_s$, on a :

$$\mathcal{E}_s \times R_s \approx g_s^2 \sim 3 \times 10^{-26} \text{ J} \cdot \text{m} \quad \text{d'où} \quad \alpha_s \approx \frac{g_s^2}{\hbar c} \sim 1$$

ii) Pour l'interaction électromagnétique, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_e$ et $R = R_e$ (indice e pour électromagnétique), on a :

$$\mathcal{E}_e \times R_e = q_e^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \approx 230,71 \times 10^{-30} \text{ J} \cdot \text{m}$$

d'où :

$$\alpha_e = \frac{q_e^2}{\hbar c} = \frac{230,71 \times 10^{-30}}{3,15 \times 10^{-26}} \approx 7,3 \times 10^{-3} \approx \frac{1}{137}$$

On reconnaît en α_e la constante de structure fine.

iii) Pour l'interaction faible, on montre que l'on peut prendre $\mathcal{E} = \mathcal{E}_w$ et $R = R_w$ (indice w vient de l'anglais *weak*), tels que :

$$\mathcal{E}_w \times R_w \sim g_w^2 \sim 3 \times 10^{-32} \text{ J} \cdot \text{m}^3$$

Il en résulte que :

$$\alpha_w \sim \frac{\mathcal{E}_w R_w}{\hbar c} \approx 10^{-6}$$

iv) Enfin, dans l'interaction gravitationnelle, où $\mathcal{E} = \mathcal{E}_g$ et $R = R_g$ (indice g pour gravitation), on adopte :

$$\mathcal{E}_g \times R_g = Gm_p^2 \approx 1,86 \times 10^{-65} \text{ J} \cdot \text{m}$$

d'où :

$$\alpha_g = \frac{Gm_p^2}{\hbar c} = \frac{1,86 \times 10^{-65}}{3,15 \times 10^{-26}} \approx 6 \times 10^{-39}$$

Retenons essentiellement la hiérarchie des interactions à l'aide des quatre facteurs α :

$$\alpha_s \sim 1 \quad \alpha_e \sim \frac{1}{137} \approx 7,3 \times 10^{-3} \quad \alpha_w \sim 10^{-6} \quad \text{et} \quad \alpha_g \sim 6 \times 10^{-39}$$

Remarques : 1) La portée infinie des interactions électromagnétique et gravitationnelle est aujourd'hui attribuée à la valeur nulle de la masse des particules qui véhiculent ce type d'interaction. Ainsi, l'hypothétique graviton devrait avoir, comme le photon, une masse nulle, et par conséquent une vitesse égale à c (cf. chapitre 10).

2) Depuis une dizaine d'années, se pose la question de la valeur des constantes fondamentales, telles que les précédentes, et plus précisément celle du rapport entre elles, comme la constante α_e , qui est sans dimension. Cette possibilité d'une variabilité des constantes fondamentales fait l'objet de recherches récentes, à la fois sur le plan expérimental en astrophysique et sur le plan théorique, dans le cadre de la *théorie des cordes*, cette dernière théorie proposant de concilier la Relativité Générale (cf. chapitre 10) et la Physique Quantique (cf. *Quantique*).

IV.2. — Quarks et leptons

a) Quarks

Les radioactivités β^- et β^+ ont pu être interprétées complètement en admettant que les nucléons ne sont pas des particules fondamentales, mais des édifices complexes, construits à partir de particules élémentaires, appelées quarks, sensibles à l'interaction forte. Les quarks, introduits en 1964 par les physiciens américains M. Gell-Mann et G. Zweig, sont au nombre de six :

i) quark u (de *up* pour haut en anglais), de charge $2e/3$ et de masse $m_u \approx 5 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2}$,

ii) quark d (de *down* pour bas), de charge $-e/3$ et de masse $m_d \approx 10 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2}$,

iii) quark s (de *strange* pour étrangeté), de charge également $-e/3$ et de masse $m_s \approx 150 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2}$.

iv) quark c (de *charm* pour charme), de charge $2e/3$ et de masse $m_c \approx 1,5 \text{ GeV} \cdot \text{c}^{-2}$.

v) quark b (de *bottom* ou *beauty* pour fond ou beauté en anglais), de charge $-e/3$ et de masse $m_b \approx 5 \text{ GeV} \cdot \text{c}^{-2}$, découvert en 1977.

vi) quark t (de *top* ou *truth* pour sommet ou vérité), de charge $2e/3$ et de masse $m_b \approx 200 \text{ GeV} \cdot \text{c}^{-2}$, découvert en 1995.

Sur la figure 8.11a, on a représenté l'ensemble des six quarks, auxquels il convient d'ajouter les antiquarks correspondants. Dans ce contexte, les nucléons (protons et neutrons) et les autres baryons, appelés hypérons, apparaissent comme les assemblages suivants de trois quarks :

$$p = uud \quad n = udd \quad \text{et} \quad \Lambda_0 = ddu$$

Les mésons, eux, sont des couples quark-antiquark :

$$\pi^- = d\bar{u} \quad \pi^0 = u\bar{u} + d\bar{d} \quad K^+ = u\bar{s} \quad \text{et} \quad K^0 = d\bar{s}$$

Dans ces assemblages, les interactions entre quarks s'effectuent par l'intermédiaire de bosons particuliers appelés *gluons*, terme venant de la glu, matière visqueuse et collante.

Contrairement aux leptons et aux baryons (nucléons et autres), qui sont des fermions, parce qu'ils satisfont à la statistique de Fermi-Dirac, les mésons se comportent statistiquement comme des bosons, car ils suivent la statistique de Bose-Einstein (cf. *Thermodynamique*).

Remarque : Récemment, certains scientifiques pensent avoir établi expérimentalement que les quarks pouvaient se rassembler par familles plus nombreuses : cinq quarks ensemble grâce à cinq gluons dans le pentaquark, et quatre quarks reliés par quatre gluons dans le X(3872), du nom de la valeur de son énergie en MeV.

u 5 MeV	c 1,5 GeV	t 200 GeV
d 10 MeV	s 150 MeV	b 5 MeV

a) Quarks

e 0,511 MeV	μ 105,7 MeV	τ 1,777 GeV
ν_e < 2,8 eV	ν_μ < 2,8 eV	ν_τ < 2,8 eV

b) Leptons

FIG. 8.11.

b) Leptons

On compte six leptons :

- i) l'électron, de charge $-e$ et de masse $m_e = 0,511 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2}$,
- ii) le muon, de charge $-e$ et de masse $m_\mu = 105,7 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2}$, découvert en 1937,
- iii) le lepton τ , de charge $-e$ et de masse $m_\tau = 1777 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2}$, découvert en 1975,
- iv) le neutrino associé à l'électron, ν_e , de charge nulle et de masse très faible $m_{\nu_e} < 2,8 \text{ eV} \cdot \text{c}^{-2}$,
- v) le neutrino associé au muon ν_μ , de charge nulle et de masse très faible $m_{\nu_\mu} < 2,8 \text{ eV} \cdot \text{c}^{-2}$,
- vi) le neutrino associé au lepton τ , ν_τ , de charge nulle et de masse très faible $m_{\nu_\tau} < 2,8 \text{ eV} \cdot \text{c}^{-2}$.

Sur la figure 8.11b, on a rappelé les trois leptons différents chargés, avec leurs neutrinos associés de charge nulle. Ce sont des particules fondamentales qui jouent un rôle essentiel dans l'interaction faible. Dans ce cas aussi, chaque lepton possède une anti-particule.

Tout comme l'interaction électromagnétique qui s'effectue par échange de photon, l'interaction faible entre leptons se transmet par l'intermédiaire de trois bosons : Z^0 , W^+ et W^- . Le premier, de masse $93 \text{ GeV} \cdot \text{c}^{-2}$ et électriquement neutre, permet d'interpréter la diffusion élastique d'un neutrino ou d'un antineutrino. Les deux autres, de même masse $81 \text{ GeV} \cdot \text{c}^{-2}$ et de charges opposées (e et $-e$), véhiculent l'interaction inélastique avec des particules chargées.

L'existence de ces bosons, avec les valeurs correctes des masses, a été prévue par les auteurs de la théorie électrofaible, les physiciens américains S. Weinberg et S. Glashow et par le physicien pakistanais A. Salam, ce qui leur valut le prix Nobel en 1979. Quant à la preuve expérimentale de leur existence, elle a été établie au CERN, en 1983, par C. Rubbia ; ce dernier fut récompensé, lui aussi, par le prix Nobel en 1984.

En 2012, le boson H, introduit par les physiciens belges R. Brout et F. Englert et par le physicien britannique P. Higgs pour interpréter les masses de Z^0 , W^+ et W^- , a été détecté par le LHC (*Large Hadron Collider*), avec une masse d'environ $126 \text{ GeV} \cdot \text{c}^{-2}$, ce qui a valu le prix Nobel de physique à leurs auteurs.

Le tableau 8.2 permet d'avoir une vue d'ensemble des propriétés de ces particules fondamentales.

Remarque : Concernant les neutrinos, une question déjà posée en 1936 par le physicien sicilien Ettore Majorana reste encore sans réponse : le neutrino est-il sa propre antiparticule ? La mise au point récente du détecteur NEMO (pour *Neutrino Ettore Majorana Observatory*) pourrait être décisive dès 2005.

		Nom des particules		Charge	Masse (MeV.c ⁻²)				
Leptons (insensibles à l'interaction <i>Forte</i>)		– électron e^-		$q \neq 0$	0,511	Sensibles à ○ la <i>gravitation</i> ○ l'interaction <i>électromagnétique</i> si $q \neq 0$. ○ l'interaction <i>faible</i>			
		– muon μ^-			105,65				
		– tau τ^-			1784×10^3				
		– neutrino $e^- \quad \nu_e$		$q = 0$	$< 2,5 \times 10^{-6}$				
		– neutrino $\mu \quad \nu_\mu$			$0,17 \times 10^{-6}$				
– neutrino $\tau \quad \nu_\tau$		< 18							
Hadrons (sensibles à l'interaction <i>Forte</i>)	Quarks	u	Sensibles à ○ la <i>gravitation</i> ○ l'interaction <i>électromagnétique</i> ○ l'interaction <i>Forte</i>	$2e/3$	5 MeV	BARYONS	proton (uud)	938,21 MeV	nucléons
		c		$2e/3$	1,5 GeV		neutron (udd)	939,50 MeV	
		t		$2e/3$	200 GeV		Λ_0 (ddu)	1115,4 MeV	hypérons
		d		$-e/3$	10 MeV		Ω^- (sss)	1615 MeV	
		s		$-e/3$	150 MeV	MESONS	Π^- ($d\bar{u}$)	139,58 MeV	
		b		$-e/3$	5 MeV		Π^0 ($u\bar{u} + d\bar{d}$)	134,97 MeV	
				K^+ ($u\bar{s}$)	493,7 MeV				
				K^0 ($d\bar{s}$)	134,97 MeV				
	Photons			$q = 0$	0	sensibles à la <i>gravitation</i>			
Bosons W^+, W^-, Z_0			$q \neq 0$ $q = 0$	81×10^3 93×10^3	Sensibles à ○ la <i>gravitation</i> ○ l'interaction <i>faible</i>				

TAB. 8.2.

IV.3. — Détecteurs de particules

L'étude expérimentale de la diffusion des particules a exigé la mise au point de détecteurs de plus en plus performants, depuis la chambre à brouillard du physicien anglais C. Wilson, qui date de 1911, jusqu'à la chambre proportionnelle multifils, inventée par le physicien français G. Charpak en 1968.

a) Chambre à brouillard de Wilson

La chambre à brouillard est un récipient rempli d'air, saturé d'alcool, dont on augmente brutalement le volume afin de produire un abaissement de température. Cet abaissement met la vapeur d'alcool dans un état métastable de sursaturation, c'est-à-dire prête à se condenser à la moindre perturbation (cf. *Thermodynamique*). C'est précisément le passage d'une particule chargée qui provoque cette condensation en ionisant le gaz de la chambre. On photographie alors, à travers une fenêtre transparente, l'ensemble de ces gouttelettes produites le long de la trajectoire des particules. On a pu ainsi visualiser les trajectoires des rayons cosmiques.

C'est avec une telle chambre qu'Anderson, étudiant le rayonnement cosmique, mit en évidence le positron en 1932. La chambre était placée dans un champ magnétique, ce qui incurvait les trajectoires (cf. chapitre 6), selon la relation $R = p/(qB)$; une plaque de plomb, de 6 mm d'épaisseur, introduite dans la chambre, ralentissait les particules. Sur la figure 8.12, schématisant le cliché photographique obtenu par Anderson, on peut voir que la courbure est plus grande sur la partie supérieure du cliché, ce qui prouve que la particule vient du bas, puisque son énergie y est plus forte. En outre, l'orientation du champ magnétique prouve que la charge est positive. Enfin, la trajectoire relativement longue de la particule dans l'air exclut le proton. Anderson en déduisit qu'il ne pouvait s'agir que d'un positron.

La chambre à brouillard a aussi permis de découvrir le muon en 1937 et les particules étranges en 1947.

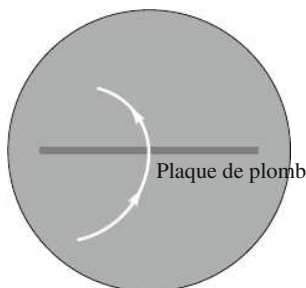


FIG. 8.12.

b) Chambre à bulles de Glaser

La chambre à bulles, inventée par D.A. Glaser en 1952, est une enceinte close contenant du dihydrogène liquide à la limite de l'ébullition, c'est-à-dire à la température 20 K. Lorsqu'une particule chargée traverse ce milieu, l'énergie qu'elle perd, en ionisant les atomes d'hydrogène, provoque l'ébullition. L'ensemble de toutes les bulles produites visualise la trajectoire de la particule. On obtient alors, en photographiant, des clichés de chambre à bulles.

Avec une telle chambre, précisément Gargamelle au CERN, qui valut le prix Nobel en 1960 à son auteur, on a mesuré les interactions entre neutrinos en 1973.

c) Chambre à étincelles

Dans une chambre à étincelles, on applique brutalement un champ électrique intense, de l'ordre de $1 \text{ MV} \cdot \text{m}^{-1}$, afin de provoquer des décharges électriques qui produisent des étincelles. Ces dernières sont alors photographiées ou détectées par des photorécepteurs qui fournissent un signal électrique. Une telle chambre a permis de mettre en évidence :

- i) en 1974, le quark c (charme), de charge $2e/3$ et de masse $m_c = 1,5 \text{ GeV} \cdot c^{-2}$,
- ii) en 1977, le lepton τ , de charge $-e$, de masse $m_\tau = 1,777 \text{ GeV} \cdot c^{-2}$.

d) Compteur à fil et chambre multifils

i) Compteur à fil de Geiger-Muller

Le compteur Geiger-Muller, inventé par H. Geiger en 1908 et modifié par W. Muller en 1920, est un tube cylindrique en verre, de quelques centimètres de diamètre, rempli d'un gaz rare (argon) et traversé le long de son axe, par un fil métallique (tungstène) isolé, très fin ($50 \mu\text{m}$ de diamètre). Ce fil est porté à un potentiel de quelques kV par rapport à l'intérieur du tube métallisé (Fig. 8.13). En traversant ce gaz, les particules chargées ionisent les atomes en leur arrachant des électrons, lesquels sont attirés par le fil et à leur tour lui arrachent des électrons. Par suite de cet effet d'avalanche, on détecte un signal électrique suffisamment fort au bout d'une durée d'environ $1 \mu\text{s}$ après le passage de la particule.

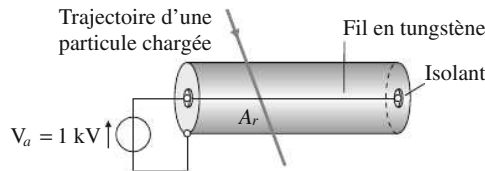


FIG. 8.13.

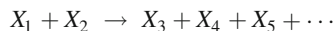
ii) Chambre multifils de Charpak

La chambre proportionnelle multifils de Charpak est une version démultipliée du compteur à fil de Geiger-Muller. Elle se présente comme une série de compteurs Geiger-Muller. Elle est constituée de deux plaques métalliques parallèles entre lesquelles on a interposé deux réseaux de fils, de $20 \mu\text{m}$ de diamètre, dont le pas est une fraction de millimètre. Entre ces deux réseaux, orientés suivant des axes perpendiculaires, et les plaques, on maintient une différence de potentiel de quelques kV. Le passage d'une particule dans la chambre remplie de gaz ionise les atomes, ce qui produit localement, à l'endroit où se trouvent les fils, un signal que l'on enregistre après amplification. Les performances de la chambre multifils sont remarquables : la résolution spatiale est de l'ordre du pas des réseaux de fils et la résolution temporelle est de quelques nanosecondes. Aussi a-t-elle supplanté tous les autres détecteurs et valut le prix Nobel à son auteur en 1992.

V. — ÉNERGIE DE LIAISON D'UNE RÉACTION NUCLÉAIRE

V.1. — Définition

Sur la réaction nucléaire :



la conservation de l'énergie permet d'écrire :

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4 + \mathcal{E}_5 + \dots$$

soit, en explicitant les énergies cinétiques et les énergies de masse :

$$\mathcal{E}_{k,1} + \mathcal{E}_{k,2} + m_1 c^2 + m_2 c^2 = \mathcal{E}_{k,3} + \mathcal{E}_{k,4} + \dots + m_3 c^2 + m_4 c^2 + m_5 c^2 + \dots$$

Par analogie avec l'énergie de liaison d'un noyau, on définit l'énergie de liaison d'une *réaction* par la variation de la somme des énergies de masse :

$$\mathcal{E}_l = \sum_f m_f c^2 - \sum_i m_i c^2 = -\mu c^2 \quad \text{où} \quad \mu = \sum_i m_i - \sum_f m_f$$

est le défaut de la somme des masses.

L'opposée de l'énergie de liaison représente la variation de l'énergie cinétique de l'ensemble ; c'est donc l'énergie libérée par la réaction et disponible pour le milieu extérieur :

$$-\mathcal{E}_l = \sum_f \mathcal{E}_{k,f} - \sum_i \mathcal{E}_{k,i} = \sum_i m_i c^2 - \sum_f m_f c^2 = \mu c^2$$

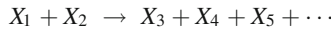
i) Si $Q = \mu c^2 > 0$ ($\mathcal{E}_l < 0$), la réaction fournit de l'énergie au milieu extérieur ; elle est *exoénergétique*.

ii) Si $Q = \mu c^2 < 0$ ($\mathcal{E}_l > 0$), le système reçoit de l'énergie du milieu extérieur ; la réaction est *endoénergétique*.

Remarque : On calcule numériquement $\mathcal{E}_l$ en utilisant les valeurs des énergies de masse fournies par des tables (cf. annexe). En réalité, ces dernières donnent généralement les masses des atomes et non celles des noyaux ; cependant, elles suffisent lorsque les réactions ne font intervenir explicitement ni électrons, ni positrons, car le nombre d'électrons reste inchangé après la réaction.

V.2. — Énergie de liaison d'une réaction nucléaire et énergies de liaison par nucléon

Dans l'expression de l'énergie de liaison de la réaction nucléaire :



remplaçons la masse m_j de chacun des noyaux X_j par sa valeur en fonction de b_j . Comme :

$$\mathcal{E}_{l,j} = A_j b_j = Z_j m_p c^2 + (A_j - Z_j) m_n c^2 - m_j c^2$$

il vient, avec les notations habituelles :

$$\mathcal{E}_l = \sum_f Z_f m_p c^2 + (A_f - Z_f) m_n c^2 - A_f b_f - \sum_i Z_i m_p c^2 + (A_i - Z_i) m_n c^2 - A_i b_i$$

En tenant compte des équations de conservation de A et Z :

$$\sum_i A_i = \sum_f A_f \quad \text{et} \quad \sum_i Z_i = \sum_f Z_f$$

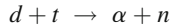
on obtient, après simplification :

$$\mathcal{E}_l = \sum_i A_i b_i - \sum_f A_f b_f$$

Notons que, dans cette expression de l'énergie de liaison, en fonction des énergies par nucléon, les réactifs (indice i) sont affectés du signe $+$ et les produits de réaction (indice f) du signe $-$.

Remarque : Les particules élémentaires, protons et neutrons, n'interviennent évidemment pas dans l'expression précédente de l'énergie de liaison d'une réaction nucléaire.

Exemple : Dans la réaction nucléaire entre un deuton (noyau de deutérium) et un triton (noyau de tritium) :



l'énergie de liaison du neutron est nulle et les énergies de liaison par nucléon des différents noyaux valent respectivement : $b_d = 1,11 \text{ MeV}$, $b_t = 2,82 \text{ MeV}$, $b_\alpha = 7,07 \text{ MeV}$. Par conséquent :

$$\mathcal{E}_i = \sum_i A_i b_i - \sum_f A_f b_f = 2 \times 1,11 + 3 \times 2,82 - 4 \times 7,07 = -17,6 \text{ MeV}$$

Une réaction nucléaire libère une grande quantité d'énergie si :

$$\sum_f A_f b_f > \sum_i A_i b_i$$

C'est précisément ce qui est réalisé dans la fission d'un noyau lourd et dans la fusion de deux noyaux légers.

V.3. — Fission nucléaire

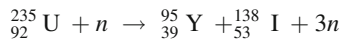
La fission nucléaire d'un noyau lourd a été observée, pour la première fois, par les physiciens allemands O. Hahn et F. Strassmann en 1939, en bombardant des noyaux d'uranium avec des neutrons ; elle a été interprétée peu après par L. Meitner et O. Frisch.

a) Énergie libérée

L'énergie libérée dans une réaction de fission nucléaire est l'opposée de son énergie de liaison :

$$-\mathcal{E}_l = \mu c^2 = \sum_f A_f b_f - \sum_i A_i b_i$$

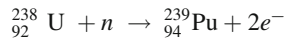
Calculons par exemple l'énergie libérée par la réaction de fission de l'uranium 235 en iode (I) et en yttrium (Y), pour une mole, soit environ 235 g :



Il vient, puisque $b_U = 7,6 \text{ MeV}$ et $b_Y \approx b_I = 8,6 \text{ MeV}$:

$$\sum_f A_f b_f - \sum_i A_i b_i = 95 \times b_Y + 138 \times b_I - 235 \times b_U \approx (95 + 138) \times 8,6 - 235 \times 7,6 \approx 240 \text{ MeV}$$

L'uranium naturel ${}^{238}_{92}\text{U}$, ou isotope 238, que l'on extrait du minerai d'uranium (cristaux d'autunite, c'est-à-dire de phosphate naturel d'uranium et de calcium), n'est pas fissile, mais fertile, car il produit, par radioactivité β^- , du plutonium 239, lequel est fissile :



V.4. — Fission d'un noyau lourd

a) Modèle de la goutte liquide de von Weisäcker

Ce modèle de noyau, dit de la goutte liquide, a été proposé par le physicien allemand C. von Weisäcker en 1935, dans le but de prévoir la nature des produits de fission des noyaux lourds. Dans ce cadre, il répertorie cinq contributions différentes à l'énergie de liaison d'un noyau :

$$\mathcal{E}_l = Zm_p c^2 + (A - Z)m_n c^2 - Mc^2 \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_l = \mathcal{E}_{l,v} + \mathcal{E}_{l,s} + \mathcal{E}_{l,e} + \mathcal{E}_{l,a} + \mathcal{E}_{l,p}$$

Précisons la nature de ces contributions :

i) $\mathcal{E}_{l,v} = a_v A$ est l'énergie associée à l'ensemble des nucléons regroupés dans un volume sphérique,

ii) $\mathcal{E}_{l,s} = a_s A^{2/3}$ est la contribution des nucléons se trouvant à la surface du noyau ; ces nucléons sont moins liés aux autres, d'où l'exposant $2/3$ rapport des dimensions d'une surface sur celles d'un volume,

iii) $\mathcal{E}_{l,e} = -Cte \times Z^2/r = -a_e Z^2 A^{-1/3}$, puisque $r = r_0 A^{1/3}$, est la contribution négative de l'interaction répulsive entre protons ; elle est évidemment proportionnelle au carré de Z (cf. *Électromagnétisme*),

iv) $\mathcal{E}_{l,a}$ est une énergie introduite expérimentalement, qui exprime l'influence de l'asymétrie des nombres N et Z dans les produits de fission ; aussi s'annule-t-elle pour $N = Z$,

v) enfin $\mathcal{E}_{l,p}$, comme la précédente, prend en compte, de façon phénoménologique, le comportement des noyaux lourds pour lesquels $N/Z > 1$ lorsque $Z > 20$.

Ce modèle semi-empirique permet de progresser dans la maîtrise des réactions de fission.

b) Fission de l'uranium 235

La fission d'un noyau lourd tel que celui de l'uranium 235 est généralement produite par l'impact sur le noyau d'un neutron thermique, c'est-à-dire d'un neutron dont l'énergie est son énergie cinétique, lorsqu'il est en équilibre thermique avec son environnement, soit une énergie l'ordre de $3k_B T/2$, qui vaut 0,025 eV à $T = 300$ K. En effet, la section efficace d'une telle collision, à température ordinaire, est suffisamment élevée, environ $580 \times 10^{-28} \text{ m}^2$ (cf. *Thermodynamique*), alors qu'avec un noyau d'uranium 238, cette probabilité est pratiquement nulle.

Avec un tel projectile, le noyau d'uranium 235 se scinde en deux fragments, de masses différentes : le premier est constitué de noyaux X_1 , de type $A \sim 95$ (zirconium), et le second des noyaux X_2 plus lourds, de type $A \sim 140$ (baryum). Sur la figure 8.14, on a représenté la distribution en masse des fragments recueillis avec des neutrons thermiques.

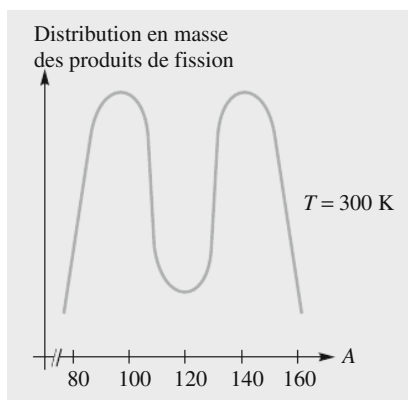


FIG. 8.14.

V.5. — Réacteurs nucléaires

Les premières centrales nucléaires fonctionnaient à l'uranium naturel 238 : c'est le cas de la toute première « pile atomique », construite par E. Fermi, en 1942, à l'Université de Chicago, et de celle qui fut construite en France en 1948. Entre 1952 et 1969, la France opta pour des centrales nucléaires de

production d'électricité, selon la filière Uranium Naturel-Graphite-Gaz (UNGG), car elle ne possédait pas à l'époque d'usine d'enrichissement d'uranium. Après 1969, elle abandonna cette filière, car trop coûteuse et de rendement médiocre, pour celle des Réacteurs à Eau sous Pression (REP). Actuellement le parc français des centrales nucléaires ne comporte que deux centrales UNGG, l'une à Saint-Laurent-des-Eaux et l'autre au Bugey. Actuellement, la plupart des réacteurs nucléaires, fonctionnent avec de l'uranium 235, ce qui exige d'enrichir l'uranium naturel, car le minerai d'uranium n'en contient en moyenne que 0,7 %.

a) Enrichissement de l'uranium

Pour enrichir l'uranium naturel en isotope $^{235}_{92}\text{U}$, on transforme d'abord l'uranium en un gaz, l'hexafluorure d'uranium (UF_6), en faisant réagir de l'acide fluorhydrique ; on sépare ensuite par diffusion gazeuse les molécules contenant de l'uranium 235 de celles contenant l'isotope 238 (cf. *Thermodynamique*). L'enrichissement souhaité de 3 % nécessite environ 1 500 étages. On produit alors avec l' UF_6 des pastilles d'oxyde d'uranium UO_2 que l'on empile dans des tubes cylindriques en alliage de zirconium-fer-étain. La masse totale d'uranium enrichi, nécessaire au fonctionnement d'un réacteur de puissance 1 300 MW, telle que la centrale de Golfech (dans le sud-ouest de la France), est de 100 tonnes.

Remarque : L'uranium appauvri est un déchet de l'industrie de l'enrichissement de l'uranium. Il contient 0,2 % en uranium 235. Aussi est-il radioactif. Malgré cette radioactivité, il est utilisé dans l'industrie, pour sa grande densité qui est 1,7 fois plus grande que celle du plomb. En raison des problèmes de santé qu'il semble poser, son emploi est de plus en plus contesté.

b) Modérateur

La réaction de fission en chaîne ne peut être entretenue que si les neutrons émergents, entrant en collision avec d'autres noyaux fissiles, ne sont pas trop rapides, car c'est dans ce dernier cas que la section efficace de fission est la plus élevée. Aussi, utilise-t-on, dans les centrales nucléaires, des modérateurs, dont la fonction est de ralentir les neutrons dont l'énergie cinétique initiale est de l'ordre du MeV. On montre que les éléments légers sont d'excellents modérateurs : l'eau H_2O , ou le carbone, sous forme de graphite (cf. Exercices). Le premier réacteur nucléaire, construit par E. Fermi, utilisait du carbone comme modérateur, alors que, dans la centrale de Golfech, le modérateur est de l'eau ordinaire sous haute pression.

Remarque : L'eau lourde D_2O , présente, comme l'eau légère, la propriété d'être un excellent ralentisseur de neutrons, mais avec l'avantage de beaucoup moins les absorber.

c) Description d'un réacteur nucléaire

Sur la figure 8.15, on a représenté le schéma de fonctionnement d'un Réacteur à Eau sous Pression. Comme dans un moteur thermique classique (cf. *Thermodynamique*), on distingue aux moins deux sources thermiques. La source chaude est constituée d'un circuit primaire d'eau, qui comprend la cuve du réacteur, des pompes pour faire circuler l'eau, un pressurisateur dont la fonction est de fixer la pression dans le circuit et un générateur de vapeur. La source froide, elle, est constituée d'un circuit secondaire de vapeur d'eau, qui reçoit l'énergie du générateur de vapeur, d'où le nom de ce dernier ; la pression étant de 70 bar, la température de la vapeur est de l'ordre de 560 K. Cette vapeur d'eau actionne une turbine qui entraîne un alternateur, lequel fournit à sa sortie une puissance électrique, qui alimente la primaire d'un transformateur haute tension.

Pour refroidir l'eau du circuit d'eau secondaire, soit on réchauffe un fleuve ou la mer, situés à proximité, soit on réchauffe l'air atmosphérique en favorisant sa circulation, de bas en haut, dans des tours de réfrigération ; le panache blanc, que l'on aperçoit au sommet de ces tours, est formée par la condensation de la vapeur d'eau contenue dans l'air de refroidissement.

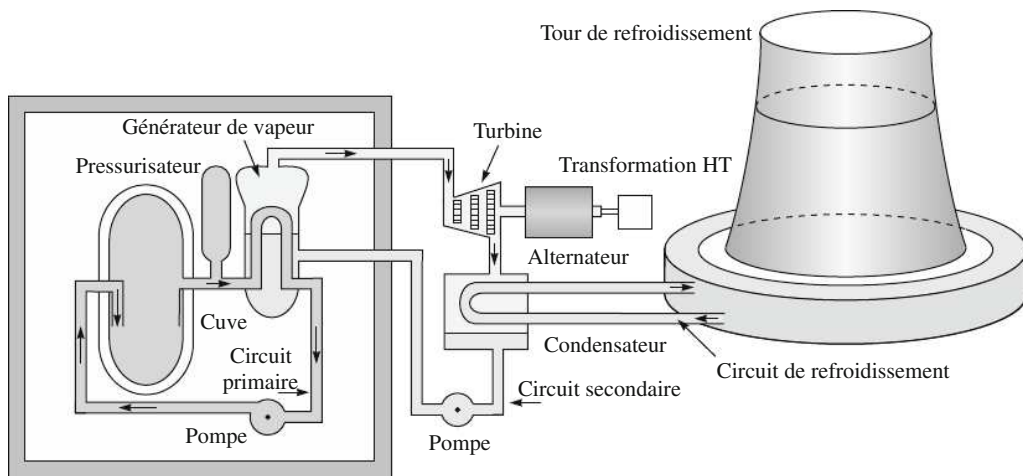


FIG. 8.15.

d) Produits de réaction et déchets radioactifs

Sur 100 tonnes de combustible, il reste, au bout de trois ans de fonctionnement : 1 t d'uranium 235 ; 95 t d'uranium 238 ; 1 t de plutonium 239 et 3 t de produits de fission (strontium, césium, etc.).

Le retraitement des produits de réaction consiste d'abord à séparer l'uranium et le plutonium réutilisable, des autres produits, appelés *déchets radioactifs*, qui eux ne présentent plus d'intérêt industriel, bien qu'ils soient encore radioactifs. On réalise cette séparation en recyclant ces produits dans les combustibles nucléaires.

En France, l'Agence Nationale pour la gestion des Déchets RADIOactifs (ANDRA) est chargée de proposer des solutions pour la gestion des déchets et de conseiller les pouvoirs publics sur le sujet.

On distingue trois catégories, A, B et C, de déchets radioactifs, en fonction de leur demi-vie radioactive et de leur activité croissantes.

i) Catégorie A

Ce sont les déchets à demi-vie courte (inférieure à 30 ans) et d'activité λN faible ou moyenne. Leur radioactivité, de type β^- ou γ , est négligeable au bout de 300 ans. Ils représentent environ 93 % du volume total des déchets.

On stocke les déchets A de très faible activité dans des fûts métalliques, après conditionnement, c'est-à-dire après identification, triage, incinération, découpage et compactage. Les fûts sont alors entreposés sur une dalle en béton et emplilés sur une hauteur de 6 m environ. L'ensemble, recouvert d'abord de terre argileuse puis de terre végétale, forme un *tumulus*.

Les déchets A, un peu plus radioactifs, sont placés, eux, dans des conteneurs en béton et entreposés dans des tranchées bétonnées appelées *monolithiques*. Évidemment, ces ouvrages de stockage sont rendus étanches aux eaux pluviales et souterraines.

ii) Catégorie B

Ce sont les déchets à demi-vie longue (plusieurs milliers d'années) et activité faible ou moyenne. Leur radioactivité, de type α , peut donc durer des milliers d'années. Ces déchets sont issus des installations de retraitement des produits de fission ; ils constituent environ 6 % du volume total des déchets.

Moins volumineux mais plus radioactifs que les déchets A, les déchets B sont d'abord conditionnés dans du béton, puis stockés sous terre, à une profondeur comprise entre 400 m et 1 000 m, dans des sites choisis pour leur stabilité et l'absence de circulation d'eau.

iii) Catégorie C

Ils se distinguent des déchets B, parce qu'ils ont, en plus, une très forte activité et que leur radioactivité peut être aussi de type β^- et α . Ils forment moins de 1 % du volume de déchets.

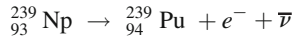
Avant de stocker les déchets C, sous terre, à très grande profondeur, on les conditionne sous forme de poudre que l'on vitrifie, en élaborant un verre dont les produits de fission font partie des constituants. Le verre fondu est coulé dans des conteneurs en acier inoxydable, lesquels sont entreposés dans des fosses bétonnées ; comme ils s'échauffent en raison de leur forte activité, il est indispensable de les refroidir par circulation d'air.

e) Surgénérateurs

Un autre noyau aisément fissile est le plutonium $^{239}_{94}\text{Pu}$, lequel n'existe pas dans la nature, mais est aisément produit en bombardant des noyaux d'uranium 238 avec des neutrons. On obtient de l'uranium 239 puis du neptunium :



Le neptunium se transforme ensuite en plutonium selon :



Dans les surgénérateurs, le combustible est de l'uranium et du plutonium. Ils présentent en principe l'avantage de consommer le plutonium produit dans les autres centrales nucléaires et de produire leur propre combustible : l'uranium se transforme en plutonium au cours du fonctionnement. En outre, il n'y a pas de modérateur : les neutrons produits, très rapides, cèdent leur énergie à du sodium liquide qui joue le rôle de fluide caloporteur. Les problèmes techniques posés par le fonctionnement de ces centrales, notamment l'utilisation de grandes quantités de sodium, très actif à l'air et dans l'eau, et par les déchets produits, sont loin d'être maîtrisés, au point d'entraîner la fermeture de certains sites.

f) Réacteur EPR

Le nouveau réacteur EPR (*European Pressurized water Reactor*, soit Réacteur Européen à eau sous Pression) est un réacteur nucléaire actualisé, franco-allemand, destiné en principe :

i) à améliorer le rendement des centrales (environ de 15 %),

ii) à augmenter leur sécurité, par l'insertion de dispositifs redondants de protection contre les accidents,

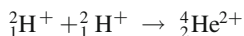
iii) à limiter la production de plutonium, élément radioactif de durée de vie très longue.

Le projet de sa construction par les deux entreprises Framatome et Siemens, qui a été décidée en octobre 2004, a été contesté, car il s'inscrit dans un programme de rénovation des capacités de la France et de l'Allemagne à produire et à exporter de la puissance électrique, à partir de la fission nucléaire, et non dans un programme d'abandon progressif des centrales nucléaires existantes.

V.6. — Fusion nucléaire

a) Énergie libérée

Calculons l'énergie libérée par la réaction de fusion de deux deutons en un hélium :



Il vient, d'après l'expression de l'énergie de liaison à partir du défaut de masse (Tab. 7.1) :

$$-\mathcal{E}_l = \mu c^2 = 2m_d c^2 - m_\alpha c^2 = 2 \times 1\,875,61 - 3\,727,27 = 23,55 \approx 14 \text{ MeV}$$

La fusion précédente des deux deutons ne s'effectue que si l'énergie cinétique est de l'ordre de 100 keV, ce qui correspond à une température (cf. *Thermodynamique*) :

$$T = \frac{2\mathcal{E}_k}{3k_B} = \frac{2 \times 10^5 \times 1,6 \times 10^{-19}}{3 \times 1,38 \times 10^{-23}} = 773 \text{ MK}$$

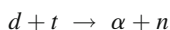
soit 773 millions de degrés ! Ainsi, pour se produire, les réactions de fusion exigent des températures très élevées, ce qui permet aux noyaux de se rapprocher suffisamment malgré la répulsion électrostatique.

b) Réacteurs à fusion nucléaire

Le contrôle des réactions de fusion pose des problèmes technologiques considérables, qui sont encore loin d'être résolus, notamment l'obtention de températures de l'ordre de plusieurs MK et donc la réalisation de systèmes de confinement destinés à jouer le rôle de récipient accueillant la matière sous forme de plasma (cf. chapitre 6).

Il existe, dans le monde, plusieurs réacteurs expérimentaux sur la fusion, notamment le JET à Culham en Grande-Bretagne et le TORE SUPRA à Cadarache, au sud de la France.

Récemment, le projet mondial ITER (*International Thermonuclear Experimental Reactor*) est à l'étude, précisément dans le but de résoudre ces problèmes en suspens ; le site de Cadarache en France est candidat pour accueillir l'ensemble des installations. On projette là essentiellement de fusionner deuton et triton selon la réaction :



ce qui exige une température de l'ordre de 500 MK. Notons que ces produits sont abondants sur Terre, puisqu'on trouve 33 mg de deutérium et 0,17 mg de tritium par litre d'eau.

Jusqu'à présent, les applications de la fusion ont été uniquement guerrières : citons la bombe H, dont l'énergie initiale est obtenue à l'aide d'une bombe à fission (bombe A), et la bombe N, ou bombe à neutrons, conçue en 1979, qui est une bombe H de faible puissance ; l'intérêt militaire de cette bombe réside dans la faiblesse des effets mécaniques destructeurs, qui endommagent peu les installations, et dans l'efficacité des effets d'irradiation qui déciment l'ennemi.

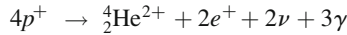
Remarque : En 1989, les électrochimistes américains Marin Flesichmann et Stanley Pons annoncèrent avoir réalisé une *fusion froide*, c'est-à-dire une réaction de fusion de deux noyaux de deutérium à température ambiante, au cours d'une expérience d'électrolyse d'eau lourde D_2O . L'explication avancée était la suivante : de l'oxygène gazeux se dégage sur l'anode en platine, alors que du deutérium, gazeux lui aussi, se loge dans les lacunes de la cathode en palladium ; cette accumulation de deutérium provoquerait alors la fusion des noyaux et l'émission de neutrons. Cette annonce surprit la communauté scientifique internationale, car les interactions en jeu en électrochimie sont de nature électromagnétique, de longue portée, alors que celles qui interviennent en fusion nucléaire sont environ cent fois plus grandes et de très courte portée, de l'ordre de 10^{-15} m. Dix ans après, malgré d'impor-

tants moyens financiers, les preuves scientifiques de l'existence de la fusion froide ne sont toujours pas convaincantes.

c) Réactions de fusion nucléaire dans les étoiles

Ce sont des réactions de fusion nucléaire qui permettent d'expliquer le rayonnement énergétique des étoiles. C'est ce que remarqua l'astrophysicien britannique A. Eddington et qui fut explicité, dès 1939, par le physicien allemand H. Bethe dans le cas du Soleil.

Une réaction de fusion de protons dans le Soleil, où la température interne est de l'ordre de 20 MK, est la suivante :



e^+ étant un positron. L'énergie libérée et donc disponible pour le rayonnement est :

$$-\mathcal{E}_l = \mu c^2 = 4m_p c^2 - m_\alpha c^2 - 2m_e c^2 = 4 \times 938,27 - 3727,27 - 2 \times 0,511 = 24,79 \text{ MeV} \approx 25 \text{ MeV}$$

Cette réaction résume en réalité plusieurs réactions nucléaires dans lesquelles interviennent successivement les noyaux ${}^{12}\text{C}$, ${}^{13}\text{N}$, ${}^{13}\text{C}$, ${}^{14}\text{N}$, ${}^{15}\text{O}$, ${}^{15}\text{N}$. Comme le carbone ${}^{12}\text{C}$ apparaît à la fois au début et à la fin de ces réactions, en jouant seulement un rôle de catalyseur, cette fusion de protons traduit le cycle du carbone.

On peut, à partir de l'énergie libérée, trouver un ordre de grandeur de la durée de vie τ du Soleil. En effet, en admettant que cette étoile, qui rayonne une puissance de $\mathcal{P} = 4 \times 10^{26} \text{ W}$, s'éteindra lorsqu'un dixième de sa masse actuelle aura subi la fusion nucléaire, on peut écrire :

$$\tau = \frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{P}} \quad \text{où} \quad \Delta\mathcal{E} = \mu c^2 \frac{M_s/10}{4m_p} = \frac{25 \times 1,6 \times 10^{-19} \times 0,2 \times 10^{30}}{4 \times 1,67 \times 10^{-27}} \approx 1,2 \times 10^{44} \text{ J}$$

est l'énergie libérée par une masse de protons égale à $M_s/10$. On obtient :

$$\tau = \frac{1,2 \times 10^{44}}{4 \times 10^{26}} \approx 0,3 \times 10^{18} \text{ s} \quad \text{soit} \quad \tau \sim 10 \text{ Gan} \quad \text{car} \quad 1 \text{ Gan} = 3,156 \times 10^{16} \text{ s}$$

On a tenté sans succès d'attribuer cette énergie rayonnée à l'effondrement gravitationnel du Soleil. En effet, l'énergie potentielle de gravitation du Soleil vaut :

$$\mathcal{E}_g = -\frac{3}{5} \frac{GM_s^2}{R_s} = -\frac{3}{5} \times \frac{6,67 \times 10^{-11} (2 \times 10^{30})^2}{0,7 \times 10^9} \approx -2,3 \times 10^{41} \text{ J}$$

et une variation relative d'énergie gravitationnelle entraîne une variation relative du rayon R_s opposée :

$$\frac{d\mathcal{E}_g}{\mathcal{E}_g} + \frac{dR_s}{R_s} = 0$$

En identifiant $-d\mathcal{E}_g$ à l'énergie rayonnée, pendant une seconde, qui vaut $4 \times 10^{26} \text{ J}$, on trouve :

$$\frac{dR_s}{R_s} = -\frac{4 \times 10^{26}}{2,3 \times 10^{41}} = -1,74 \times 10^{-15}$$

Ainsi, pendant 1 s, la diminution relative du rayon du Soleil serait de $1,74 \times 10^{-15}$, soit, en un million d'années :

$$1,74 \times 10^{-15} \times 3,156 \times 10^{13} \approx 0,055$$

Cette diminution impliquerait une contraction totale du Soleil en 18 millions d'années (1/0,055) environ, ce qui est en contradiction avec la durée estimée par ailleurs de notre étoile, qui est de plusieurs milliards d'années (Gan).

V.7. — Fission nucléaire assistée par un accélérateur de particules

Dans les années 1990, plusieurs physiciens ont proposé de coupler un accélérateur de particules produisant des neutrons à un réacteur nucléaire à eau sous forte pression (Fig. 8.16).

L'un des projets les plus avancés est le *Rubbiatron*, du nom de son auteur C. Rubbia, très connu pour sa découverte en 1984 des bosons W et Z^0 caractéristiques de l'interaction faible. La faisabilité du Rubbiatron a été testée par simulation. L'intérêt de la fission nucléaire assistée par un accélérateur de particules est multiple :

i) Cette technique permet de récupérer une partie des énergies mises en jeu dans les collisions inélastiques qui se produisent dans l'accélérateur de particules.

ii) En pilotant la centrale nucléaire avec les neutrons que produit la collision, on maîtrise son fonctionnement ; on limite ainsi le nombre de neutrons produits dans le cœur du réacteur et par conséquent la production de déchets, notamment celle de plutonium.

iii) L'apport extérieur de neutrons par un accélérateur autorise l'utilisation du thorium 232, lequel se transforme en thorium 233, puis en protactinium 233. Ce dernier se désintègre alors spontanément en uranium 233. Une surrégénération est alors possible puisque l'uranium 233 libère aisément par fission des neutrons qui produisent d'autres noyaux d'uranium 233 à partir de thorium.

iv) Le thorium est abondant sur la Terre et n'exige pas d'enrichissement, comme l'uranium 235.

Le rubbiatron a attiré l'attention des autorités espagnoles de la province d'Aragon, au point que la phase de réalisation d'un tel prototype a commencé. Jusqu'à présent, les premières expérimentations se sont avérées très décevantes.

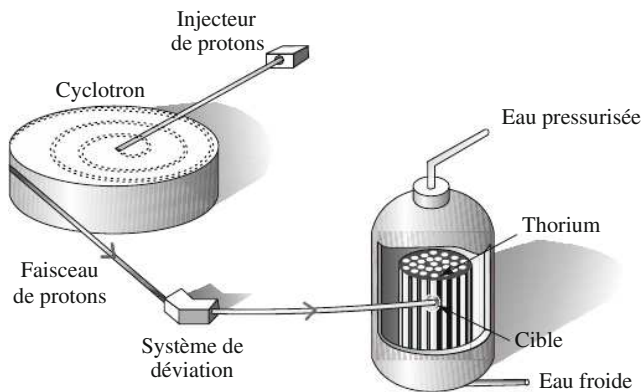


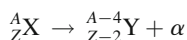
FIG. 8.16.

CONCLUSION

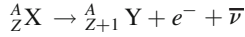
La physique des hautes énergies a constitué, grâce aux collisions entre particules, d'abord un test des résultats fondamentaux de la mécanique einsteinienne et un approfondissement de la physique du noyau. Rappelons les résultats essentiels sur le noyau atomique et les réactions nucléaires.

1) Les noyaux, dont les dimensions sont de l'ordre de 1 fm, peuvent subir plusieurs types de désintégration radioactive :

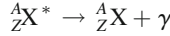
i) Rayonnement α décrit par la réaction :



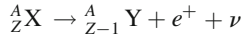
ii) Rayonnement β^- traduit par la réaction :



iii) Rayonnement γ résumé par l'équation :



iv) Rayonnement β^+ auquel est associée la réaction :



2) Les désintégrations d'un noyau présentent un caractère aléatoire dont la probabilité est donnée par l'expression :

$$P_0 = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

La demi-vie $T_{1/2}$ des noyaux est reliée à la constante de désintégration λ et à la durée de vie moyenne τ par les expressions :

$$T_{1/2} = \frac{0,693}{\lambda} = 0,693 \tau$$

Une application importante de la radioactivité est la datation des matériaux.

3) En dehors des interactions électromagnétique et gravitationnelle, la physique du noyau atomique conduit à introduire deux nouvelles interactions : la première dite *forte*, la seconde *faible*. Les facteurs α_s , α_e , α_w et α_g permettent de comparer les interactions forte, électromagnétique, faible et gravitationnelle :

$$\alpha_s \sim 1 \quad \alpha_e \sim \frac{1}{137} \quad \alpha_w \sim 10^{-6} \quad \alpha_g \sim 6 \times 10^{-39}$$

La physique des hautes énergies est à l'origine de la découverte des particules élémentaires et même de leur prédiction. Actuellement, on admet que l'ensemble des particules fondamentales, à partir desquelles sont construits tous les édifices moléculaires, atomiques et nucléaires, proton et neutron compris, est formé de deux grandes familles : celle des six quarks et celle des six leptons.

4) L'énergie de liaison d'un noyau atomique, de masse M , a pour expression :

$$\mathcal{E}_l = Zm_p c^2 + (A - Z)m_n c^2 - Mc^2$$

où Z désigne le nombre de protons et $N = A - Z$ le nombre de neutrons. Pour une réaction nucléaire, l'énergie de liaison $\mathcal{E}_l$, l'énergie Q libérée par la réaction et le défaut de la somme des masses μ sont reliés par les équations :

$$Q = -\mathcal{E}_l = \mu c^2 = \sum_i m_i c^2 - \sum_f m_f c^2$$

L'application principale de ce type de réaction est la production d'électricité dans les centrales nucléaires, fonctionnant par fission de noyaux lourds, tels que l'isotope 235 de l'uranium. Les réactions de fusion entre noyaux légers sont celles qui expliquent le rayonnement des étoiles ; la maîtrise de ces réactions en laboratoire reste une préoccupation majeure du XXI^e siècle.

EXERCICES ET PROBLÈMES

P8– 1. Rayon et masse volumique de différents noyaux

Calculer le rayon et la masse volumique d'un noyau d'oxygène 16. Même question pour un noyau de fer 56 et pour un noyau de mercure 202. Commenter.

P8– 2. Énergie de liaison de différents noyaux

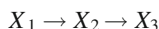
1. L'énergie de masse d'une particule α est 3 727,27 MeV. Trouver en MeV son énergie de liaison, ainsi que l'énergie de liaison par nucléon.

2. L'énergie du noyau ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ est 52,09 GeV. En déduire son énergie de liaison en MeV, ainsi que l'énergie de liaison par nucléon.

3. Même question pour le noyau d'uranium ${}^{238}_{92}\text{U}$, dont l'énergie de masse est 221 697,7 MeV.

P8– 3. Réactions radioactives successives

On considère les deux réactions radioactives successives :



X_1 , X_2 étant deux noyaux instables de constantes radioactives respectivement λ_1 et λ_2 .

1. Écrire les trois équations différentielles auxquelles satisfont les nombres N_1 , N_2 et N_3 des noyaux X_1 , X_2 et X_3 , au cours du temps.

2. Résoudre ces équations et représenter sur un même graphe $N_1(t)$, $N_2(t)$ et $N_3(t)$. Quelles sont les pentes à l'origine de ces graphes ?

P8– 4. Radioactivité α du thorium

On étudie l'énergie libérée par l'isotope ${}^{223}_{90}\text{Th}$ au cours d'une radioactivité α .

1. Écrire l'équation de désintégration, en précisant la nature du nucléide Y provenant de la désintégration.

2. En déduire l'énergie libérée, à l'aide des valeurs suivantes :

$$m_{Th} = 223,02088 \text{ u} \quad m_{\alpha} = 4,00260 \text{ u} \quad m_Y = 219,01002 \text{ u}$$

Sous quelle forme cette énergie se manifeste-t-elle, si le nucléide Y est obtenu dans son état fondamental ?

3. L'isotope ${}^{223}_{90}\text{Th}$ étant initialement au repos, trouver, en dynamique einsteinienne, les vitesses des particules émises, ainsi que leurs énergies cinétiques en MeV.

4. Comparer l'analyse précédente à celle faite dans l'approximation newtonienne. Commenter.

P8– 5. Radioactivité β^- d'un noyau d'argent 108

Le nucléide $^{108}_{47}\text{Ag}$ présente une radioactivité β^- dont on se propose de déterminer la demi-vie.

1. Écrire l'équation de cette réaction nucléaire.
2. À l'aide du tableau 8.3, donnant l'évolution de l'activité d'un échantillon de $^{108}_{47}\text{Ag}$, en fonction du temps, déterminer graphiquement la constante radioactive ainsi que la demi-vie de ce nucléide.
3. Quel était le nombre de noyaux initialement présents dans l'échantillon ?

t (min)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
A (Bq)	89	73	63	52	46	39	33	29	24	21	18

TAB. 8.3.

P8– 6. Accident nucléaire de Tchernobyl

Lors de l'accident nucléaire de Tchernobyl (Ukraine) le 25 avril 1986, de l'iode 131 gazeux, subissant une radioactivité β^- , de demi-vie $T_{1/2} = 8$ jours, a été rejeté dans l'atmosphère.

1. Écrire l'équation-bilan de radioactivité.
2. Calculer la constante radioactive de l'iode 131. Au bout de quelle durée un organisme, qui a absorbé de l'iode 131, ne contiendra plus que le centième de la quantité initiale ?

P8– 7. Mesure approchée d'une constante radioactive

Pour mesurer la constante radioactive λ d'un corps radioactif, comportant initialement N_0 noyaux, on mesure successivement les nombres de noyaux, N_1 , N_2 , etc., présents aux instants t_1 , t_2 , etc., respectivement.

1. Calculer l'intégrale suivante :

$$\tau = \lambda \int_0^{\infty} t \exp(-\lambda t) dt$$

2. Montrer que l'ensemble des $\{N_i\}$ et $\{t_i\}$ permettent d'obtenir une valeur approchée de λ . Cette valeur approchée est-elle plus grande ou plus petite que λ ?

P8– 8. Influence de l'élimination métabolique de l'iode radioactif

Le noyau d'iode 131 se désintègre par radioactivité β^- , avec une demi-vie de $T_\beta = 8,1$ jours. Cependant l'iode ingéré par l'organisme humain subit un métabolisme d'élimination, avec une demi-vie biologique qui vaut $T_m = 180$ jours.

1. Montrer que tout se passe comme si la demi-vie T_β de $^{131}_{53}\text{I}$ était remplacée par une demi-vie effective T_{ef} que l'on exprimera en fonction de T_β et T_m .
2. Calculer T_{ef} dans l'ingérence de l'iode considéré. Comparer les quantités d'iode prévues dans l'organisme au bout de trois mois, dans le cas où l'on tient compte du métabolisme et dans celui où on le néglige.

P8– 9. Radioactivité des éléments transuraniens

On fabrique en laboratoire le noyau de nobélium $^{254}_{102}\text{No}$ en bombardant des noyaux de curium $^{246}_{96}\text{Cm}$ par des noyaux X . Une telle réaction libère en outre quatre neutrons.

1. Écrire l'équation de la réaction nucléaire et identifier X .

2. L'isotope 254 de nobélium subit une radioactivité α de demi-vie $T_{1/2} = 2,8 \text{ s}$. Calculer la durée au bout de laquelle 999 noyaux sur 1 000 initialement présents ont disparu.

3. Pour caractériser le nobélium, on étudie les produits de sa désintégration. En plus de particules α , on trouve un nucléide X' . Une étude chimique permet de conclure que X' et le nucléide Y' , résultant de la désintégration β^- de l'einsteinium $^{255}_{99}\text{Es}$, sont deux isotopes. Montrer que cette étude chimique permet de trouver le nombre de protons contenus dans le noyau de nobélium.

P8– 10. Datation d'une roche

L'analyse d'un échantillon de roche a révélé que le rapport des nombres de noyaux d'uranium 238 et de noyaux de plomb 206 était 1,5. Quel est l'âge de cette roche ? On néglige la durée des rayonnements radioactifs intermédiaires et on rappelle que la demi-vie de l'uranium 238 est de 4,5 Ga.

P8– 11. Pouvoir d'arrêt des matériaux pour des particules chargées rapides

Lorsqu'une particule chargée A_1 , d'énergie $\mathcal{E}$, traverse une épaisseur élémentaire dx d'un milieu matériel de masse volumique ρ et de masse molaire M_m , elle cède aux électrons libres du milieu une énergie $-d\mathcal{E}$. Pour des protons et des électrons, H. Bethe, M. Livingstone et C. Moller ont établi les expressions suivantes du pouvoir d'arrêt du matériau ($q_e^2 = e^2/(4\pi\epsilon_0)$) :

$$\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dx}\right)_p = \frac{2\pi q_e^4 n_e}{m_e c^2 \beta_1^2} \left[\ln\left(\frac{Q_{\max}}{Q_{\min}}\right)_p - 2\beta_1^2 \right]$$

et :

$$\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dx}\right)_e = \frac{2\pi q_e^4 n_e}{m_e c^2 \beta_1^2} \left[\ln\left(\frac{Q_{\max}}{Q_{\min}}\right)_e + E(\gamma_1) - \beta_1^2 \right]$$

où n_e est le nombre d'électrons par unité de volume dans le matériau, $\beta_1 = v_1/c$, v_1 étant la vitesse des particules incidentes, $\gamma_1 = (1 - \beta_1^2)^{-1/2}$, $Q_{\max}$ est la perte d'énergie maximale au cours d'une collision, m_e la masse de l'électron ; $Q_{\min}$ s'exprime en fonction du potentiel moyen d'ionisation I , c'est-à-dire de l'énergie qu'il faut dépenser en moyenne pour ioniser un atome et $E(\gamma_1)$ est une fonction de γ_1 :

$$Q_{\min} = \frac{I^2}{2\gamma_1^2 \beta_1^2 m_e c^2} \quad \text{et} \quad E(\gamma_1) = 1 - \left(\frac{2}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_1^2} + 1 \right) \ln 2 + \frac{1}{8} \frac{(\gamma_1 - 1)}{\gamma_1^2}$$

1. Exprimer n_e en fonction de ρ , M_m et du nombre Z d'électrons par atome.

2. Quelle est, en fonction de l'angle de diffusion θ^* dans $\mathcal{R}^*$, la perte d'énergie Q d'une particule au cours d'une collision élastique avec un électron ? En déduire une valeur approchée de $Q_{\max}$ avec un proton projectile. Que vaut $Q_{\max}$ pour un électron projectile, sachant qu'en raison de l'indiscernabilité des particules en interaction la valeur $Q_{\max}$ à retenir est la moitié de celle donnée par le calcul ?

3. Donner les expressions de $(-d\mathcal{E}/dx)_p$ et $(-d\mathcal{E}/dx)_e$. Calculer, en $\text{MeV} \cdot \text{cm}^2$, le coefficient $2\pi q_e^4 N_A / (m_e c^2)$.

4. Déterminer, pour $\beta_1 = 0,5 ; 0,7 ; 0,9 ; 0,95 ; 0,975 ; 0,995$, les valeurs des quantités $(-d\mathcal{E}/dx)_p$ et $(-d\mathcal{E}/dx)_e$ pour l'aluminium. Vérifier que ces quantités passent par un minimum. On donne les valeurs suivantes relatives à l'aluminium :

$$M_m = 27 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \quad \rho = 2,7 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} \quad Z = 13 \quad \text{et} \quad I = 163 \text{ eV}$$

P8– 12. Effet Cerenkov

Trouver, en fonction de l'indice n du milieu, l'énergie cinétique minimale pour qu'un électron, en mouvement rapide dans ce milieu, émette un rayonnement Cerenkov. Application à l'eau d'indice $n = 1,33$.

P8– 13. Seuil énergétique de réactions nucléaires

Dans la réaction $A_1 + A_2 \rightarrow A_3 + A_4$, A_1 désigne la particule projectile et A_2 la particule cible, supposée immobile dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$. Les énergies de masse des différentes particules sont supposées connues.

1. a) Établir l'expression du seuil énergétique de la réaction, $\mathcal{E}_k^s$, en fonction des énergies de masse des différentes particules. À quelle condition l'énergie $\mathcal{E}_k^s$ est-elle nulle ? Commenter.

b) Exprimer $\mathcal{E}_k^s$ en fonction de $Q = \mu c^2$, μ étant le défaut de la somme des masses, et des énergies de masse des particules. En déduire le signe de Q .

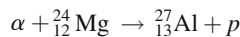
c) Trouver l'expression approchée suivante de la relation entre $\mathcal{E}_k^s$ et μc^2 dans l'approximation des faibles vitesses des particules devant c :

$$\mathcal{E}_k^s \approx -\mu c^2(1 + a)$$

a étant une quantité que l'on exprimera en fonction du rapport des masses du projectile et de la cible.

d) Montrer que, si la particule A_3 était produite dans un état excité, avec un écart énergétique par rapport à l'état fondamental égal à $\Delta\mathcal{E}$, l'expression précédente aurait une forme voisine dans laquelle l'énergie Q serait remplacée par une énergie $\mu'c^2$ que l'on exprimera en fonction de μc^2 et de $\Delta\mathcal{E}$.

2. a) Vérifier que la réaction suivante transformant un noyau de magnésium en un noyau d'aluminium :

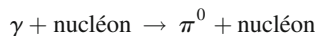


dans laquelle α et p désignent respectivement un noyau d'hélium et un proton, satisfait bien aux règles de conservation habituelles. On donne les énergies de masse de Mg et Al, respectivement 22 341,3 MeV et 25 132,44 MeV.

b) Calculer Q et le seuil énergétique de la réaction, lorsque l'aluminium est dans l'état fondamental.

c) Même question lorsque l'aluminium est dans un état excité tel que $\Delta\mathcal{E} = 2,21$ MeV.

3. On bombarde des noyaux avec des photons γ et on s'intéresse à la réaction suivante :



a) Calculer le seuil énergétique du photon $\mathcal{E}_{1,r}^s$, lorsque le nucléon cible est au repos dans le référentiel du laboratoire. On prendra pour l'énergie de masse du nucléon la valeur $m_n c^2 = 939$ MeV. En déduire la valeur en fm de la longueur d'onde maximale de ce photon pour que la réaction se produise ?

b) En réalité, les nucléons cibles sont en mouvement à l'intérieur des noyaux, avec une énergie cinétique $\mathcal{E}_{k,n} = 20$ MeV. Calculer la norme de leur quantité de mouvement en $\text{MeV} \cdot \text{c}^{-1}$.

c) Montrer que le seuil énergétique du photon a alors pour expression :

$$\mathcal{E}_1^s = \mathcal{E}_{1,r}^s \frac{1}{1 + K/(m_n c^2)}$$

K étant une quantité que l'on exprimera en fonction de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_{k,n}$ de ce noyau et de sa quantité de mouvement $p_{n,x}$ selon la direction du photon incident.

d) Calculer le seuil énergétique du photon, d'abord lorsque la cible se rapproche du photon incident, ensuite lorsqu'elle s'en éloigne avec la même énergie cinétique.

P8– 14. Fission de l'uranium 235 en noyaux de krypton et de baryum

Dans la réaction de fission suivante d'un noyau d'uranium 235 par un neutron :



Z et a sont deux entiers positifs.

1. Déterminer a et Z .
2. Calculer, en MeV, l'énergie libérée par cette réaction.

3. Dans un réacteur nucléaire, d'une puissance de 500 MW, un noyau d'uranium 235 libère, au cours d'une telle fission, une énergie de 185 MeV par noyau. Calculer, en joule, l'énergie libérée par 1 kg d'uranium 235, ainsi que la durée nécessaire pour consommer cette masse d'uranium. On donne :

$$m_U c^2 = 235,043\,915 \text{ u} \quad m_{Kr} c^2 = 89,919\,720 \text{ u} \quad m_{Ba} c^2 = 141,916\,350 \text{ u}$$

4. Par une série de désintégrations toutes de même type, le krypton ${}^{90}_{36}\text{Kr}$ conduit à un nucléide stable, le zirconium ${}^{90}_{40}\text{Zr}$. De quel type de désintégration s'agit-il ? Écrire le bilan correspondant.

P8– 15. Énergétique de la fission de l'uranium 235 en noyaux de molybdène et de lanthane

La fission d'un noyau d'uranium 235, par un neutron de faible énergie cinétique, peut se faire selon plusieurs voies. L'une de ces voies est la suivante :



où x_1 et x_2 désignent deux nombres entiers.

1. Déterminer x_1 et x_2 et expliquer brièvement l'origine des photons observés.
2. Trouver, en eV, l'énergie cinétique du neutron projectile en le supposant en équilibre thermique à 580 K.

3. a) Sachant que l'énergie cinétique du neutron projectile est négligeable, et que le noyau cible d'uranium 235 peut être considéré comme libre et immobile, calculer, en MeV, la somme des énergies cinétiques des éléments obtenus après fission. On néglige l'énergie de liaison des électrons devant leur énergie de masse.

b) Quelle est l'énergie libérée, sous forme cinétique, par la fission d'un kilogramme d'uranium 235 ? Commenter le résultat numérique obtenu. Sous quelle forme cette énergie cinétique est-elle transformée ? On donne :

$$m_U c^2 = 235,043\,915 \text{ u} \quad m_{La} c^2 = 138,906\,347 \text{ u} \quad m_{Mo} c^2 = 94,905\,841 \text{ u}$$

P8– 16. Spectre énergétique des neutrons rapides

La densité énergétique cinétique des neutrons émis par les noyaux fissiles, dans un réacteur nucléaire, a pour expression approchée :

$$n_E = a \mathcal{E}_k^{1/2} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_k}{b}\right) \quad \text{avec} \quad n_E = \frac{dN}{d\mathcal{E}_k}$$

dN étant le nombre de neutrons dont l'énergie cinétique est comprise entre $\mathcal{E}_k$ et $\mathcal{E}_k + d\mathcal{E}_k$, a et b deux constantes. Exprimer, en fonction de b , la valeur moyenne de l'énergie cinétique de fission. Application numérique, sachant que $b = 1,33$ MeV. Les neutrons de fission sont-ils en moyenne newtoniens ou einsteiniens ?

P8– 17. Ralentissement de neutrons rapides par diffusion élastique

Dans un réacteur nucléaire, les neutrons sont ralentis à la suite de diffusions élastiques par les noyaux d'un matériau modérateur. Si on suppose le noyau immobile, on montre que le rapport entre les énergies cinétiques $\mathcal{E}'_k$ et $\mathcal{E}_k$ du neutron projectile, avant et après la collision, est donné par l'expression suivante :

$$\frac{\mathcal{E}'_k}{\mathcal{E}_k} = \frac{1 + A^2 + 2A \cos \theta^*}{(1 + A)^2}$$

où $A = m_N/m_n$ est le rapport des masses du noyau et du neutron et θ^* l'angle de diffusion du neutron incident dans le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$.

1. Sachant que la diffusion est isotrope dans $\mathcal{R}^*$, calculer la valeur moyenne d'ensemble de l'énergie cinétique $\mathcal{E}'_k$ du neutron après collision. Commenter.

2. a) Montrer que le cosinus de l'angle de diffusion θ_1 du neutron projectile a pour expression :

$$\cos \theta_1 = \frac{1 + A \cos \theta^*}{(1 + A^2 + \kappa A \cos \theta^*)^{1/2}}$$

κ étant un facteur que l'on calculera.

b) Trouver, en fonction du rapport de masse A , la valeur moyenne d'ensemble de $\cos \theta_1$. Commenter.

3. On introduit la grandeur suivante sans dimension, appelée léthargie, $L = \ln(\mathcal{E}_r/\mathcal{E}'_k)$, $\mathcal{E}_r$ étant l'énergie cinétique initiale du neutron incident, avant toute collision, et $\mathcal{E}'_k$ l'énergie cinétique du neutron après plusieurs collisions. Pour une collision, dans laquelle les énergies cinétiques avant et après la collision sont $\mathcal{E}_k$ et $\mathcal{E}'_k$, le gain en léthargie est $g = \ln(\mathcal{E}_k/\mathcal{E}'_k)$.

a) Montrer que la loi de distribution de probabilité du gain en léthargie a pour expression :

$$p = \frac{1}{(1 - \alpha)\mathcal{E}_k} \quad \text{avec} \quad \alpha = \left(\frac{A - 1}{A + 1}\right)^2$$

b) En déduire, en fonction de α , le gain moyen en léthargie par collision $\langle g \rangle$.

c) Déterminer le nombre moyen de collisions nécessaires pour que l'énergie cinétique d'un neutron passe de 2 MeV à 1 eV, dans les deux cas suivants :

i) le modérateur est constitué de noyaux d'hydrogène,

ii) le modérateur est constitué de noyaux d'uranium 238.

Conclure quant à l'intérêt du modérateur H_2O .

P8– 18. Ralentissement de neutrons rapides par diffusion inélastique

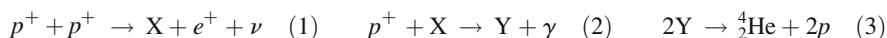
On se propose d'estimer l'importance de la diffusion inélastique dans le ralentissement des neutrons par les noyaux d'un matériau modérateur, dans un réacteur nucléaire. Au cours d'une telle collision, le noyau, libre et initialement immobile, passe d'un état fondamental, de masse m_N , à un état excité de masse m_N^* . La réaction est alors la suivante :



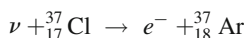
1. Trouver le seuil énergétique du neutron incident.
2. Commenter le résultat précédent, sachant que l'énergie minimale d'excitation du noyau est 3,09 MeV, et que l'énergie cinétique des neutrons les plus rapides est 3,1 MeV. Calculer la longueur d'onde du rayonnement émis, à la suite de la désexcitation du noyau.

P8– 19. Fusion nucléaire dans le Soleil

L'énergie électromagnétique rayonnée par une étoile, telle que le Soleil, a pour origine la fusion de l'hydrogène en hélium, selon la chaîne de réactions suivantes :



1. Identifier les nucléides X et Y.
2. En admettant que l'énergie libérée par les réactions de fusion nucléaire est intégralement rayonnée par le Soleil, avec une puissance de $\mathcal{P}_r = 3,9 \times 10^{26}$ W, trouver la diminution de la somme des masses des particules de cette étoile pendant une seconde.
3. La détection des neutrinos émis par le Soleil est réalisée à partir de la réaction :



Calculer la variation de la somme des masses en $\text{MeV} \cdot \text{c}^{-2}$, à l'aide des énergies de masse du proton, du neutron, et des énergies de liaison suivantes : $\mathcal{E}_{l,\text{Cl}} = 8,5704$ MeV et $\mathcal{E}_{l,\text{Ar}} = 8,5252$ MeV. On donne $m_n c^2 = 939,565$ MeV, $m_p c^2 = 938,27$ MeV et $m_e c^2 = 0,511$ MeV.

P8– 20. Formation de carbone dans les étoiles

En astrophysique, on admet que le carbone 12 s'est formé dans certaines étoiles, à partir de la fusion de trois noyaux d'hélium.

1. Calculer, en MeV, l'énergie de liaison par nucléon d'un noyau de carbone. On rappelle les masses du neutron et du proton en u.m.a : $u_n = 1,008665$ et $u_p = 1,007277$, ainsi que la valeur énergétique $931,5 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2}$ de l'u.m.a.
2. Écrire la réaction de fusion de noyaux d'hélium en un noyau de carbone 12. Quelle est l'énergie libérée par cette fusion, sachant que l'énergie de liaison par nucléon du noyau d'hélium 4 est 7,07 MeV ?

9

Électromagnétisme et relativité

L'électromagnétisme a joué un rôle décisif dans l'élaboration de la théorie de la relativité restreinte. Rappelons, en effet, que le point de départ de l'analyse d'Einstein a été l'extension du principe de relativité à toute la physique, notamment à l'électromagnétisme. Le premier succès de cette théorie a été l'interprétation rationnelle de l'expérience de Michelson-Morley, grâce à l'hypothèse de l'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide, par changement de référentiel galiléen.

Nous nous proposons, dans ce chapitre, de développer ce lien étroit entre l'électromagnétisme et la relativité. Pour cela, il convient préalablement de rappeler les équations de Maxwell dans le vide, ainsi que leurs conséquences sur la propagation des champs électrique et magnétique.

I. — ÉQUATIONS DE MAXWELL DANS LE VIDE

I. 1. — Rappel des équations de Maxwell

Les équations de l'électromagnétisme, publiées par Maxwell en 1876, sont celles auxquelles satisfait le champ électromagnétique $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ créé par des sources (charges et courants électriques) :

$$\begin{aligned}\mathbf{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \mathbf{div}(\varepsilon_0 \mathbf{E}) &= \rho \\ \mathbf{rot} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) - \frac{\partial(\varepsilon_0 \mathbf{E})}{\partial t} &= \mathbf{J}\end{aligned}$$

ρ et $\mathbf{J}$ étant respectivement la charge volumique et le vecteur courant volumique. Les deux premières sont des équations structurelles du champ électromagnétique, alors que les deux dernières relient le champ aux sources (cf. *Électromagnétisme*). Rappelons leur interprétation :

i) La première équation exprime la loi d'induction électromagnétique : toute variation de $\mathbf{B}$ dans le temps produit un champ électrique $\mathbf{E}$.

ii) La deuxième traduit localement la conservation du flux du champ magnétique $\mathbf{B}$ à travers toute surface fermée. Il en résulte que $\mathbf{B}$ peut se mettre sous la forme $\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}$, $\mathbf{A}$ étant le potentiel vecteur. La première équation s'écrit donc :

$$\mathbf{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0} \quad \text{d'où} \quad \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mathbf{grad} V$$

V étant le potentiel scalaire électrique.

iii) La troisième est la forme locale du théorème de Gauss ; elle relie le champ électrique $\mathbf{E}$ à la charge volumique des sources qui le produisent.

iv) Enfin, d'après la quatrième, toute variation de $\mathbf{E}$ dans le temps peut réciproquement créer un champ magnétique, même en l'absence de courant ($\mathbf{J} = \mathbf{0}$).

Si l'on introduit les potentiels V et $\mathbf{A}$ dans la troisième et la quatrième équations, on obtient :

$$\operatorname{div} \left(-\mathbf{grad} V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \mathbf{rot rot} \mathbf{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\mathbf{grad} V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mu_0 \mathbf{J}$$

ce qui donne, en posant $c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$:

$$\Delta V + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mathbf{grad} \left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{J}$$

Comme les potentiels V et $\mathbf{A}$ ne sont pas totalement définis, on peut imposer la condition suivante, appelée *jauge de Lorenz* (cf. *Électromagnétisme*) :

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Les potentiels satisfont alors aux équations suivantes :

$$\square V = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \square \mathbf{A} = \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

dans lesquelles $\square$ est un opérateur spatio-temporel appelé le dalembertien, en hommage au physicien et mathématicien français Jean Le Rond d'Alembert. Ces équations traduisent la propagation des potentiels V et $\mathbf{A}$, à la vitesse de la lumière c dans le vide, à partir des sources (ρ et $\mathbf{J}$), et par conséquent celle des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$, ce que confirme l'expérience.

I. 2. — Quadriopérateur nabla

La relation entre l'électromagnétisme et la relativité s'explique naturellement à l'aide du formalisme quadridimensionnel. Aussi définit-on l'opérateur quadridimensionnel nabla :

$$4\text{-}\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial ct}, -\nabla \right) = \left(\frac{\partial}{\partial ct}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Montrons que $4\text{-}\nabla$ est un opérateur quadrivectoriel à l'aide des formules de transformation de Lorentz-Poincaré inversées :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \times \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial ct'} \times \frac{\partial ct'}{\partial x} = \gamma_e \frac{\partial}{\partial x'} - \gamma_e \beta_e \frac{\partial}{\partial ct'} = \gamma_e \left(\frac{\partial}{\partial x'} - \beta_e \frac{\partial}{\partial ct'} \right)$$

les dérivations par rapport aux variables y et z étant inchangées, et :

$$\frac{\partial}{\partial ct} = \frac{\partial}{\partial ct'} \times \frac{\partial ct'}{\partial ct} + \frac{\partial}{\partial x'} \times \frac{\partial x'}{\partial ct} = \gamma_e \frac{\partial}{\partial ct'} - \gamma_e \beta_e \frac{\partial}{\partial x'} = \gamma_e \left(\frac{\partial}{\partial ct'} - \beta_e \frac{\partial}{\partial x'} \right)$$

Le carré de la pseudo-norme du quadriopérateur $4\text{-}\nabla$ s'identifie à l'opérateur $\square$. En effet :

$$4\text{-}\nabla \cdot 4\text{-}\nabla = \|4\text{-}\nabla\|^2 = \frac{\partial^2}{\partial^2 \partial t^2} - \nabla^2 = \square$$

Les équations, auxquelles satisfont les potentiels V et $\mathbf{A}$, s'écrivent donc, avec la notation quadridimensionnelle :

$$\|4\text{-}\nabla\|^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \|4\text{-}\nabla\|^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

Cette écriture conduit naturellement à poser les questions suivantes :

- i) Comment se transforment les sources (ρ , $\mathbf{J}$) par changement de référentiel galiléen ?
- ii) Comment se transforment les potentiels (V , $\mathbf{A}$) qui leur sont directement reliés ?
- iii) Enfin, comment se transforment les champs ($\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$) qui dérivent des potentiels (V , $\mathbf{A}$) ?

II. — QUADRIPOIENTIEL ÉLECTROMAGNÉTIQUE

II. 1. — Invariance de la charge électrique

La charge électrique est invariante par changement de référentiel galiléen.

Cette invariance est souvent admise comme un postulat implicite. Elle est analogue à l'invariance de la masse d'une particule ou d'un système.

II. 2. — Formules de transformation de la charge volumique

Considérons une charge δq , dans un volume élémentaire $d\mathcal{V}$, centré autour d'un point en mouvement quelconque, de vitesse $\mathbf{v}$ par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}$. La charge volumique correspondante, est :

$$\rho = \frac{\delta q}{d\mathcal{V}}$$

où $d\mathcal{V} = dx dy dz$ désigne le volume élémentaire occupé par δq . Pour simplifier, sans cependant restreindre la généralité du raisonnement, supposons qu'à l'instant considéré l'axe Ox soit parallèle à $\mathbf{v}$ (Fig. 9.1), et introduisons le référentiel galiléen $\mathcal{R}_0$ qui, à cet instant, a la vitesse $\mathbf{v}$ par rapport à $\mathcal{R}$. Comme la charge δq est immobile par rapport à $\mathcal{R}_0$, on peut définir la charge volumique *propre* par :

$$\rho_0 = \frac{\delta q}{d\mathcal{V}_0}$$

où $d\mathcal{V}_0 = dx_0 dy_0 dz_0$ représente le volume élémentaire occupé par δq dans $\mathcal{R}_0$. Or $dx = dx_0/\gamma$, $dy = dy_0$ et $dz = dz_0$. Il vient donc, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ étant le facteur relativiste associé à la vitesse $\mathbf{v}$:

$$dq = \rho_0 d\mathcal{V}_0 \quad \text{avec} \quad d\mathcal{V}_0 = \gamma dx dy dz = \gamma d\mathcal{V}$$

Il en résulte, puisque $\rho_0 d\mathcal{V}_0 = \rho_0 \gamma d\mathcal{V} = \rho d\mathcal{V}$:

$$\rho = \gamma \rho_0$$

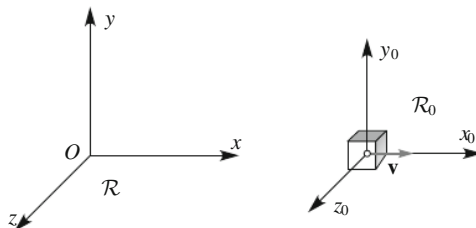


FIG. 9.1.

II.3. — Quadrivecteur source du champ électromagnétique

On appelle *quadrivecteur source* du champ électromagnétique le quadrivecteur défini directement à partir de $4\text{-}v$ ($\gamma c, \gamma \mathbf{v}$) et de la charge volumique propre ρ_0 :

$$4\text{-}J = \rho_0(\gamma c, \gamma \mathbf{v}) = (\rho c, \mathbf{J})$$

On en déduit les formules de transformation suivantes entre les composantes du quadrivecteur $4\text{-}J$ dans les référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, en translation rectiligne uniforme à la vitesse $\mathbf{v}_e$ par rapport à $\mathcal{R}$:

$$\rho c = \gamma_e(\rho' c + \beta_e J'_x) \quad J_x = \gamma_e(J'_x + \beta_e \rho' c) \quad J_y = J'_y \quad J_z = J'_z$$

où $\beta_e = v_e/c$ et $\gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2}$. En outre, le carré de la pseudo-norme de $4\text{-}J$ s'écrit :

$$\|4\text{-}J\|^2 = \rho^2 c^2 - \mathbf{J}^2 = \rho_0^2 c^2$$

On sait qu'une relation entre la charge volumique ρ et le courant volumique $\mathbf{J}$ permet d'exprimer localement le caractère conservatif de la charge électrique (cf. *Électromagnétisme*) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{J} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial \rho c}{\partial ct} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

On peut réécrire cette relation en introduisant l'opérateur quadridimensionnel $4\text{-}\nabla$ et le quadrivecteur courant volumique $4\text{-}J$. En effet :

$$4\text{-}\nabla \cdot 4\text{-}J = \left(\frac{\partial}{\partial ct}, -\nabla \right) \cdot (\rho c, \mathbf{J}) = \frac{\partial \rho c}{\partial ct} + \nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} \quad \text{d'où} \quad 4\text{-}\nabla \cdot 4\text{-}J = 0$$

II.4. — Formules de transformation du potentiel

Les relations entre les potentiels aux sources peuvent être rassemblées en une seule équation, à condition de définir le quadrivecteur potentiel $4\text{-}A$ ($V/c, \mathbf{A}$) :

$$\|4\text{-}\nabla\|^2(4\text{-}A) = \mu_0(4\text{-}J)$$

En effet, cela entraîne, respectivement pour les trois dimensions spatiales et pour la dimension temporelle :

$$\|4\text{-}\nabla\|^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \quad \text{et} \quad \|4\text{-}\nabla\|^2 \frac{V}{c} = \mu_0 \rho c \quad \text{soit} \quad \|4\text{-}\nabla\|^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Les formules de transformation des potentiels entre deux référentiels galiléens sont donc les suivantes :

$$\frac{V}{c} = \gamma_e \left(\frac{V'}{c} + \beta_e A'_x \right) \quad A_x = \gamma_e \left(A'_x + \beta_e \frac{V'}{c} \right) \quad A_y = A'_y \quad A_z = A'_z$$

Avec la notation quadridimensionnelle, la jauge de Lorentz s'écrit :

$$4\text{-}\nabla \cdot 4\text{-}A = \frac{\partial}{\partial ct} \left(\frac{V}{c} \right) + \nabla \cdot \mathbf{A} = \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Il résulte du caractère quadridimensionnel du quadripotentiel que le carré de la norme de $4\text{-}A$ est invariant (par changement de référentiel) : $V^2/c^2 - A^2 = \text{invariant}$.

II.5. — Exemples

a) Condensateur plan

Par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, un condensateur plan dont les armatures, distantes de $l = 1 \text{ mm}$, et portées aux potentiels respectifs $U = 1 \text{ kV}$ et 0 (Fig. 9.2), se déplace avec un mouvement de translation, de vitesse $\mathbf{u} = u \mathbf{e}_x$, avec $u = 0,9c$.

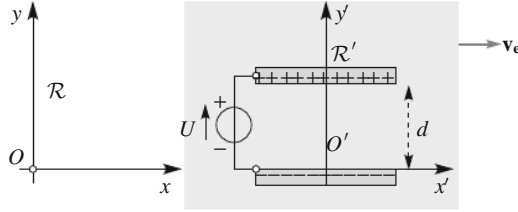


FIG. 9.2.

Dans le référentiel $\mathcal{R}'$, lié au condensateur, le quadripotential $(V'/c, \mathbf{A}')$ s'obtient aisément à partir des champs selon (cf. *Électromagnétisme*) :

$$\mathbf{E}' = -\frac{U}{l} \mathbf{e}_y = -10^6 \mathbf{e}_y \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}' = \mathbf{0}$$

d'où les potentiels V' et $\mathbf{A}'$:

$$V' = -\frac{U}{l} y' \quad \text{et} \quad \mathbf{A}' = \mathbf{0}$$

On en déduit les potentiels V et $\mathbf{A}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$, sachant que $\beta_e = 0,9$ et donc $\gamma_e = 2,29$:

$$V = \gamma_e \frac{U}{l} y' \quad \text{et} \quad \mathbf{A} = \gamma_e \beta_e \frac{U y'}{c} \mathbf{e}_x$$

Sur cet exemple, on vérifie aisément que la norme de $4\text{-}A$ est invariante :

$$\frac{V^2}{c^2} - A^2 = \left(\frac{U}{cl} \right)^2 \gamma_e^2 (1 - \beta_e^2) y'^2 = \left(\frac{U}{cl} \right)^2 y'^2$$

est invariant car toutes les quantités qui apparaissent dans l'expression précédente le sont.

On retrouve les résultats de l'approximation newtonienne, en faisant $\beta_e \ll 1$ et donc $\gamma_e \approx 1$ dans les expressions précédentes :

$$V = \frac{U}{l} y' = V' \quad \text{et} \quad \mathbf{A} \approx \beta_e \frac{U y'}{c} \mathbf{e}_x \approx \mathbf{0}$$

b) Particule en mouvement rectiligne uniforme

Une particule, de charge q , se déplace avec une vitesse vectoriellement constante $\mathbf{u} = u \mathbf{e}_x$ par rapport au référentiel galiléen du laboratoire $\mathcal{R} = Oxyz$ (Fig. 9.3a).

Dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}' = O'x'y'z'$, lié à la particule placée en O' , le quadripotential électromagnétique $4\text{-}A'$ a pour expression au point d'observation M :

$$V' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}' = \mathbf{0} \quad \text{avec} \quad r' = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2}$$

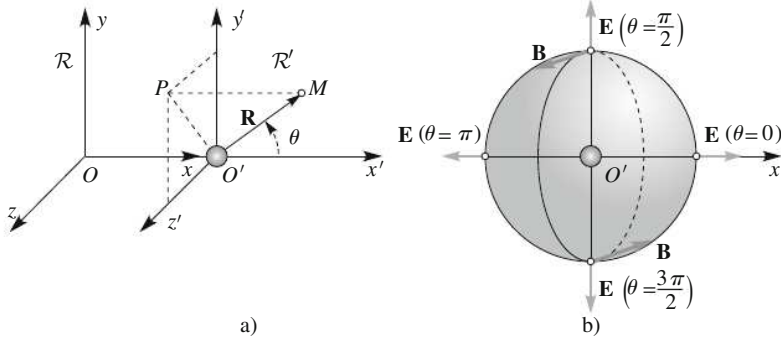


FIG. 9.3.

Il vient, pour un observateur de $\mathcal{R}$, en utilisant les formules de transformation du quadripotentiel :

$$V = \gamma_e V' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma_e q}{[\gamma_e^2 (x - ut)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{[(x - ut)^2 + (1 - \beta_e^2)(y^2 + z^2)]^{1/2}}$$

$$A_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma_e \beta_e q}{cr'} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\gamma_e q u}{[\gamma_e^2 (x - ut)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q u}{[(x - ut)^2 + (1 - \beta_e^2)(y^2 + z^2)]^{1/2}}$$

$$A_y = 0 \quad \text{et} \quad A_z = 0$$

avec $\beta_e = u/c$ et $\gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2}$.

Il est naturel d'introduire, pour un observateur de $\mathcal{R}$, le vecteur $\mathbf{R} = \mathbf{O}'\mathbf{M}$, dont les composantes dans $\mathcal{R}$ sont $(x - ut, y, z)$, et l'angle θ que fait $\mathbf{R}$ avec Ox . Notons que, pour un observateur de $\mathcal{R}'$, le vecteur $\mathbf{O}'\mathbf{M}$ a, lui, pour composantes $x' = \gamma_e(x - ut)$, $y' = y$, $z' = z$. Il vient :

$$(x - ut)^2 = R^2 \cos^2 \theta \quad \text{et} \quad y^2 + z^2 = R^2 \sin^2 \theta$$

Par conséquent :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \frac{1}{(1 - \beta_e^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} \quad \text{et} \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \mathbf{u}}{R} \frac{1}{(1 - \beta_e^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}$$

Pour $\theta = 0$ et π :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \quad \text{et} \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \mathbf{u}}{R} = \frac{V}{c^2} \mathbf{u}$$

Pour $\theta = \pi/2$:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \left(\frac{1}{1 - \beta_e^2} \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \mathbf{u}}{R} \left(\frac{1}{1 - \beta_e^2} \right)^{1/2}$$

Dans l'approximation newtonnienne ($\beta_e \ll 1$ et $\gamma_e \approx 1$), on retrouve évidemment les expressions bien connues :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \quad \text{et} \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \mathbf{u}}{R}$$

III. — TRANSFORMATION EINSTEINIENNE DES CHAMPS

III.1. — Formules de transformation des champs

Il existe plusieurs méthodes pour établir les formules de transformation du champ électromagnétique ($\mathbf{E}, \mathbf{B}$) : l'une à partir des potentiels V et $\mathbf{A}$, une deuxième en utilisant les formules de transformation des forces, une troisième s'appuyant sur l'invariance des équations de Maxwell par changement de référentiel galiléen. Nous utiliserons ici la première méthode (cf. Exercices pour les autres).

Notons que, les dimensions physiques des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ étant différentes, il sera plus commode et plus naturel d'écrire les formules de transformation du champ électromagnétique en considérant, grâce à la constante universelle c , non le champ ($\mathbf{E}, \mathbf{B}$) mais le champ équivalent ($\mathbf{E}, \mathbf{B}c$) dont les deux éléments s'expriment avec la même unité SI, le $V \cdot m^{-1}$. Les relations entre les champs et les potentiels :

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

s'explicitent selon :

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} & B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} & \text{et} \quad B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} & B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{aligned}$$

Nous devons alors remplacer les potentiels dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ par leurs expressions en fonction de ceux dans $\mathcal{R}'$, en translation rectiligne uniforme, à la vitesse $\mathbf{v}_e = \beta_e c \mathbf{e}_x$ par rapport à $\mathcal{R}$, et tenir compte des relations de dérivation issues de la transformation de Lorentz-Poincaré inverse :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \gamma_e \left(\frac{\partial}{\partial x'} - \beta_e \frac{\partial}{\partial ct'} \right) \quad \frac{\partial}{\partial ct} = \gamma_e \left(\frac{\partial}{\partial ct'} - \beta_e \frac{\partial}{\partial x'} \right)$$

celles relatives aux coordonnées transversales se réduisant à $\partial/\partial y = \partial/\partial y'$ et $\partial/\partial z = \partial/\partial z'$.

a) Transformation du champ magnétique

Commençons par les composantes du champ magnétique, précisément par la transformation de sa composante selon l'axe Ox :

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A'_z}{\partial y'} - \frac{\partial A'_y}{\partial z'} = B'_x$$

Concernant la composante de $\mathbf{B}$ suivant l'axe Oy , il vient :

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \gamma_e \frac{\partial}{\partial z'} \left(A'_x + \frac{\beta_e V'}{c} \right) - \gamma_e \left(\frac{\partial A'_z}{\partial x'} - \beta_e \frac{\partial A'_z}{\partial ct'} \right)$$

soit, en regroupant les termes :

$$B_y = \gamma_e \left(\frac{\partial A'_x}{\partial z'} - \frac{\partial A'_z}{\partial x'} \right) - \gamma_e \beta_e \left(-\frac{\partial V'/c}{\partial z'} - \frac{\partial A'_z}{\partial ct'} \right) = \gamma_e (B'_y c - \beta_e E'_z)$$

De façon analogue, on a pour l'autre composante transversale suivant Oz :

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \gamma_e \left(\frac{\partial A'_y}{\partial x'} - \beta_e \frac{\partial A'_y}{\partial ct'} \right) - \gamma_e \frac{\partial}{\partial y'} \left(A'_x + \frac{\beta_e V'}{c} \right)$$

soit :

$$B_z = \gamma_e \left(\frac{\partial A'_y}{\partial x'} - \frac{\partial A'_x}{\partial y'} \right) + \gamma_e \beta_e \left(-\frac{\partial V'/c}{\partial z'} - \frac{\partial A'_y}{\partial ct'} \right) = \gamma_e \left(B'_z + \beta_e \frac{E'_y}{c} \right)$$

En résumé :

$$B_x c = B'_x c \quad B_y c = \gamma_e (B'_y c - \beta_e E'_z) \quad B_z c = \gamma_e (B'_z c + \beta_e E'_y)$$

Les relations inverses donnant le champ $\mathbf{B}'c$ en fonction de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}c$ s'obtiennent évidemment en changeant v_e en $-v_e$, soit β_e en $-\beta_e$.

b) Transformation du champ électrique

Il vient, pour la composante du champ électrique $\mathbf{E}$ selon Ox :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial x} &= -\gamma_e^2 \frac{\partial}{\partial x'} (V' + \beta_e c A'_x) + \gamma_e^2 \beta_e \frac{\partial}{\partial ct'} (V' + \beta_e c A'_x) \\ -\frac{\partial A_x}{\partial ct} &= -\gamma_e^2 \frac{\partial}{\partial ct'} (A'_x + \beta_e V') - \gamma_e^2 \beta_e \frac{\partial}{\partial x'} (A'_x + \beta_e V') \end{aligned}$$

soit, en regroupant ces termes :

$$E_x = -\gamma_e^2 (1 - \beta_e^2) \left(\frac{\partial V'}{\partial x'} + \frac{\partial A'_x}{\partial t'} \right) = E'_x \quad \text{puisque} \quad \gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2}$$

Quant aux composantes E_y et E_z , elles s'écrivent :

$$-\frac{\partial V}{\partial y} = -\gamma_e \frac{\partial}{\partial y'} (V' + \beta_e c A'_x) \quad -\frac{\partial A_y}{\partial ct} = -\gamma_e \left(\frac{\partial A'_y}{\partial ct'} - \beta_e \frac{\partial A'_x}{\partial x'} \right)$$

d'où $E_y = \gamma_e (E'_y + \beta_e B'_z c)$. De façon analogue, on trouverait $E_z = \gamma_e (E'_z - \beta_e B'_y c)$. Ainsi :

$$E_x = E'_x \quad E_y = \gamma_e (E'_y + \beta_e B'_z c) \quad E_z = \gamma_e (E'_z - \beta_e B'_y c)$$

Les relations inverses donnant le champ $\mathbf{E}'$ en fonction de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}c$ s'obtiennent évidemment en changeant β_e en $-\beta_e$.

c) Expression vectorielle de la transformation du champ électromagnétique

Il est commode d'écrire vectoriellement les formules précédentes en considérant les champs parallèles à la direction $\mathbf{v}_e$ et les champs perpendiculaires à $\mathbf{v}_e$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{//} &= \mathbf{E}'_{//} & \mathbf{B}_{//} c &= \mathbf{B}'_{//} c \\ \mathbf{E}_{\perp} &= \gamma_e (\mathbf{E}'_{\perp} - \boldsymbol{\beta}_e \times \mathbf{B}'_{\perp} c) & \text{et} & \quad \mathbf{B}_{\perp} c = \gamma_e (\mathbf{B}'_{\perp} c + \boldsymbol{\beta}_e \times \mathbf{E}'_{\perp}) \end{aligned}$$

Ces formules de transformation des champs montrent l'imbrication étroite des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}c$: un champ électrique pur dans $\mathcal{R}'$ se présente, dans $\mathcal{R}$, sous la forme d'un champ électrique *et* d'un champ magnétique. Cela n'est guère surprenant puisque les sources de champ magnétique sont des charges en mouvement qui, dans le référentiel où elles sont au repos, créent uniquement un champ électrique. Il est donc naturel de considérer que $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}c$ dans un référentiel ne sont que les apparences d'une seule grandeur physique qui les contient tous les deux : le *champ électromagnétique*.

Remarque : Soulignons bien que le champ électromagnétique $(\mathbf{E}, \mathbf{B}c)$ n'est pas un quadrivecteur, car les formules de transformation ne satisfont pas à celles des quadrivecteurs.

III. 2. — Invariants associés au champ électromagnétique

Nous nous proposons de montrer qu'il existe deux grandeurs scalaires invariantes associées au champ électromagnétique : $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}c$ et $E^2 - B^2c^2$.

a) Premier invariant $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}c$

En explicitant le produit scalaire $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$, on obtient :

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{E}_{//} + \mathbf{E}_{\perp}) \cdot (\mathbf{B}_{//} + \mathbf{B}_{\perp}) = \mathbf{E}_{//} \cdot \mathbf{B}_{//} + \mathbf{E}_{\perp} \cdot \mathbf{B}_{\perp}$$

Or, d'une part, $\mathbf{E}_{//} \cdot \mathbf{B}_{//} = \mathbf{E}'_{//} \cdot \mathbf{B}'_{//}$ et d'autre part :

$$\mathbf{E}_{\perp} \cdot \mathbf{B}_{\perp} = \gamma_e^2 (\mathbf{E}'_{\perp} - \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}'_{\perp}) \cdot \left(\mathbf{B}'_{\perp} + \mathbf{v}_e \times \frac{\mathbf{E}'_{\perp}}{c^2} \right) = \gamma_e^2 \left[\mathbf{E}'_{\perp} \cdot \mathbf{B}'_{\perp} - (\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}'_{\perp}) \cdot \frac{\mathbf{v}_e \times \mathbf{E}'_{\perp}}{c^2} \right]$$

soit :

$$\mathbf{E}_{\perp} \cdot \mathbf{B}_{\perp} = \gamma_e^2 \left\{ \mathbf{E}'_{\perp} \cdot \mathbf{B}'_{\perp} - \frac{[(\mathbf{v}_e \times \mathbf{E}'_{\perp}) \times \mathbf{v}_e] \cdot \mathbf{B}'_{\perp}}{c^2} \right\} = \gamma_e^2 \left(\mathbf{E}'_{\perp} \cdot \mathbf{B}'_{\perp} - \frac{v_e^2}{c^2} \mathbf{E}'_{\perp} \cdot \mathbf{B}'_{\perp} \right)$$

car, le double produit vectoriel comportant deux vecteurs identiques s'écrit (cf. *Mécanique*) :

$$(\mathbf{v}_e \times \mathbf{E}'_{\perp}) \times \mathbf{v}_e = -\mathbf{v}_e \times (\mathbf{v}_e \times \mathbf{E}'_{\perp}) = v_e^2 \mathbf{E}'_{\perp}$$

Il en résulte que $\mathbf{E}_{\perp} \cdot \mathbf{B}_{\perp} = \mathbf{E}'_{\perp} \cdot \mathbf{B}'_{\perp}$ et donc :

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}c = \mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}'c$$

b) Second invariant $E^2 - B^2c^2$

Explicitons la quantité $E^2 - B^2c^2$:

$$E^2 - B^2c^2 = (\mathbf{E}_{//} + \mathbf{E}_{\perp})^2 - c^2(\mathbf{B}_{//} + \mathbf{B}_{\perp})^2 = (E_{//}^2 + E_{\perp}^2) - (B_{//}^2 + B_{\perp}^2)c^2$$

puisque les doubles produits sont nuls. Or, d'après les formules de transformation des champs, on a l'égalité, $E_{//}^2 - B_{//}^2c^2 = E_{//}'^2 - B_{//}'^2c^2$. En outre :

$$E_{\perp}^2 - B_{\perp}^2c^2 = \gamma_e^2 (\mathbf{E}'_{\perp} - \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}'_{\perp})^2 - \gamma_e^2 c^2 \left(\mathbf{B}'_{\perp} + \mathbf{v}_e \times \frac{\mathbf{E}'_{\perp}}{c^2} \right)^2$$

ce qui donne, puisque les doubles produits s'éliminent :

$$E_{\perp}^2 - B_{\perp}^2c^2 = \gamma_e^2 \left[(E_{\perp}'^2 - B_{\perp}'^2c^2) - \frac{v_e^2}{c^2} (E_{\perp}'^2 - B_{\perp}'^2c^2) \right] = E_{\perp}'^2 - B_{\perp}'^2c^2$$

Ainsi :

$$E^2 - B^2c^2 = E'^2 - B'^2c^2$$

c) Conséquences

i) Si $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ sont orthogonaux dans $\mathcal{R}$, soit ils le sont aussi dans $\mathcal{R}'$, soit l'un des deux champs est nul : pour $E^2 - B^2 c^2 > 0$, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, alors que pour $E^2 - B^2 c^2 < 0$, $\mathbf{E} = \mathbf{0}$.

ii) Si $E > Bc$ dans un référentiel $\mathcal{R}$, il en sera de même dans tout autre référentiel $\mathcal{R}'$.

iii) Si, à la fois, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}c = 0$ et $E^2 - B^2 c^2 = 0$ dans un référentiel, alors les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}c$ ont même norme et sont orthogonaux dans tout autre référentiel.

iv) Le cas singulier $E = Bc$ correspond à la relation entre $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}c$ pour une onde électromagnétique monochromatique qui se propage à la vitesse c .

III.3. — Approximation newtonienne

Dans l'approximation newtonienne, les formules précédentes se réduisent à :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{//} &= \mathbf{E}'_{//} \\ \mathbf{E}_{\perp} &\approx \mathbf{E}'_{\perp} - \boldsymbol{\beta}_e \times \mathbf{B}'_{\perp} c \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} \mathbf{B}_{//} c &= \mathbf{B}'_{//} c \\ \mathbf{B}_{\perp} c &= \mathbf{B}'_{\perp} c + \boldsymbol{\beta}_e \times \mathbf{E}'_{\perp} \approx \mathbf{B}'_{\perp} c \end{aligned}$$

Si, dans la relation entre $\mathbf{B}c$ et $\mathbf{B}'c$, on néglige la contribution du champ électrique, on retrouve la transformation galiléenne des champs déjà établie (cf. chapitre 1) :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \boldsymbol{\beta}_e \times \mathbf{B}'c \quad \text{et} \quad \mathbf{B}c = \mathbf{B}'c \quad \text{ce qui s'écrit} \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}' \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}'$$

Notons que les invariants précédents $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}c$ et $E^2 - B^2 c^2$ persistent dans l'approximation newtonienne.

III.4. — Exemples

a) Transformation du champ électrique dans un condensateur plan

Reprenons l'exemple du condensateur plan de la figure 9.2. Dans le référentiel $\mathcal{R}'$, lié au condensateur, les champs entre les armatures ont pour expression :

$$\mathbf{E}' = -\frac{U}{d} \mathbf{e}_y = -10^6 \mathbf{e}_y \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}' = \mathbf{0}$$

d'où :

$$\mathbf{E}_{//} = \mathbf{0} \quad \mathbf{E}_{\perp} = \gamma_e \mathbf{E}'_{\perp} = -\gamma_e \frac{U}{d} \mathbf{e}_y = -2,29 \times 10^6 \mathbf{e}_y \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

et :

$$\mathbf{B}_{//} = \mathbf{0} \quad \mathbf{B}_{\perp} c = -\gamma_e \boldsymbol{\beta}_e \frac{U}{d} \mathbf{e}_z = -2 \times 10^6 \mathbf{e}_z \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

Sur cet exemple, on vérifie l'invariance du produit scalaire $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}c$, qui est ici nul, et celle de la quantité $E^2 - B^2 c^2$ qui vaut $E'^2 = 10^{12} \text{ SI}$.

b) Champs électrique et magnétique orthogonaux

On a vu que, lorsque les champs électrique et magnétique étaient *orthogonaux* dans un référentiel $\mathcal{R}$, il existait, en raison de la relation invariante $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}c = 0$, un référentiel $\mathcal{R}'$ où le champ électromagnétique pouvait se réduire, soit à un seul champ électrique, soit à un seul champ magnétique.

i) Réduction à un seul champ électrique

Si, dans le référentiel $\mathcal{R}'$, le champ magnétique $\mathbf{B}' = \mathbf{0}$, il vient, d'après les formules de transformation des champs :

$$\mathbf{B}'_{//} = \mathbf{B}_{//} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{B}'_{\perp} c = \gamma_e (\mathbf{B}_{\perp} c - \boldsymbol{\beta}_e \times \mathbf{E}_{\perp}) = \mathbf{0} \quad \text{si} \quad \mathbf{B}_{\perp} c = \boldsymbol{\beta}_e \times \mathbf{E}_{\perp}$$

On en déduit, puisque $\mathbf{B}_{//} = 0$, $\beta_e^2 = B^2 c^2 / E_{\perp}^2$.

Dans $\mathcal{R}'$, le champ électrique est tel que :

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma_e (\mathbf{E}_{\perp} + \boldsymbol{\beta}_e \times \mathbf{B}_{\perp} c) = \gamma_e [\mathbf{E}_{\perp} + \boldsymbol{\beta}_e \times (\boldsymbol{\beta}_e \times \mathbf{E}_{\perp})]$$

d'où, en développant le double produit vectoriel (cf. *Mécanique*) :

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma_e [\mathbf{E}_{\perp} + \boldsymbol{\beta}_e (\boldsymbol{\beta}_e \cdot \mathbf{E}_{\perp}) - \beta_e^2 \mathbf{E}_{\perp}] = \gamma_e \mathbf{E}_{\perp} (1 - \beta_e^2) = \frac{\mathbf{E}_{\perp}}{\gamma_e}$$

On obtient γ_e selon :

$$\gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2} = \left(1 - \frac{B_{\perp}^2 c^2}{E_{\perp}^2}\right)^{-1/2} = \left(\frac{E_{\perp}^2 - B_{\perp}^2 c^2}{E_{\perp}^2}\right)^{-1/2} = \left(\frac{E_{\perp}^2}{E_{\perp}^2 - B_{\perp}^2 c^2}\right)^{-1/2}$$

Finalement, dans $\mathcal{R}'$, de vitesse $\beta_e c = B_{\perp} c^2 / E_{\perp}$ par rapport à $\mathcal{R}$, le champ électromagnétique se réduit au champ électrique tel que :

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \frac{\mathbf{E}_{\perp}}{\gamma_e} \quad \text{avec} \quad \gamma_e = \left(\frac{E_{\perp}^2}{E_{\perp}^2 - B_{\perp}^2 c^2}\right)^{1/2}$$

Dans le cas particulier où la composante du champ $\mathbf{E}$, selon l'axe de la translation de $\mathcal{R}'$ est nulle, $\mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{E}$.

ii) *Réduction à un seul champ magnétique*

Dans le référentiel $\mathcal{R}'$, le champ électrique est nul, d'où, d'après les formules de transformation des champs :

$$\mathbf{E}'_{//} = \mathbf{E}_{//} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma_e (\mathbf{E}_{\perp} + \boldsymbol{\beta}_e \times \mathbf{B}_{\perp} c) = \mathbf{0} \quad \text{si} \quad \mathbf{E}_{\perp} = -\boldsymbol{\beta}_e \times \mathbf{B}_{\perp} c$$

On en déduit $\beta_e^2 = E_{\perp}^2 / B_{\perp}^2 c^2 = E^2 / B_{\perp}^2 c^2$, puisque $\mathbf{E}_{//} = 0$.

Dans $\mathcal{R}'$, le champ magnétique est tel que :

$$\mathbf{B}'_{\perp} c = \gamma_e (\mathbf{B}_{\perp} c - \boldsymbol{\beta}_e \times \mathbf{E}_{\perp}) = \gamma_e [\mathbf{B}_{\perp} c + \boldsymbol{\beta}_e \times (\boldsymbol{\beta}_e \times \mathbf{B}_{\perp} c)]$$

soit, en développant le double produit vectoriel :

$$\mathbf{B}'_{\perp} c = \gamma_e [\mathbf{B}_{\perp} c + \boldsymbol{\beta}_e (\boldsymbol{\beta}_e \cdot \mathbf{B}_{\perp} c) - \mathbf{B}_{\perp} c \beta_e^2] = \gamma_e \mathbf{B}_{\perp} c (1 - \beta_e^2) = \frac{\mathbf{B}_{\perp}}{\gamma_e}$$

On obtient γ_e selon :

$$\gamma_e^2 = (1 - \beta_e^2)^{-1/2} = \left(\frac{B_{\perp}^2 c^2}{B_{\perp}^2 c^2 - E^2}\right)^{1/2}$$

Finalement, dans $\mathcal{R}'$, de vitesse $\beta_e c = B_{\perp} c^2 / E$ par rapport à $\mathcal{R}$, le champ électromagnétique se réduit au champ magnétique tel que :

$$\mathbf{B}'_{\perp} = \frac{\mathbf{B}_{\perp}}{\gamma_e} \quad \text{avec} \quad \gamma_e = \left(\frac{B_{\perp}^2 c^2}{B_{\perp}^2 c^2 - E^2}\right)^{1/2}$$

Dans le cas particulier où la composante du champ $\mathbf{B}$, selon l'axe de la translation de $\mathcal{R}'$ est nulle, $\mathbf{B}_{\perp} = \mathbf{B}$.

iii) Filtre de Wien

D'après ce qui précède, si la particule a initialement la vitesse précédente, elle sera immobile dans le référentiel $\mathcal{R}'$ et le restera, puisque dans $\mathcal{R}'$ il n'y a qu'un champ magnétique, lequel exerce évidemment une force nulle sur une particule au repos. On vérifie bien ce résultat à l'aide de la force de Lorentz qui s'écrit dans $\mathcal{R}$:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{0} \quad \text{si} \quad \mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

En multipliant cette dernière équation, vectoriellement à droite par $\mathbf{B}$, on trouve :

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) = B^2 \mathbf{v} \quad \text{d'où} \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}$$

Ce résultat est souvent utilisé, par exemple en microscopie électronique, lorsqu'on veut filtrer des électrons d'énergie déterminée et donc de vitesse déterminée. Le système de production des champs électrique et magnétique, qui permet de réaliser ce filtrage, est appelé un *filtre de Wien* (cf. chapitre 6).

III. 5. — Champ électromagnétique d'une particule en mouvement rectiligne uniforme

a) Transformation des champs

Dans le référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport auquel elle est immobile, une particule crée le champ électromagnétique suivant (Fig. 9.3a) :

$$\mathbf{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}' = \mathbf{0}$$

On en déduit, en utilisant les formules de transformation du champ électromagnétique :

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q x'}{r'^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(x-ut)}{\gamma_e^2 [(x-ut)^2 + (1-\beta_e^2)(y^2+z^2)]^{3/2}} \\ E_y &= \gamma_e E'_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \gamma_e \frac{q y'}{r'^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q y}{\gamma_e^2 [(x-ut)^2 + (1-\beta_e^2)(y^2+z^2)]^{3/2}} \\ E_z &= \gamma_e E'_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \gamma_e \frac{q z'}{r'^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q z}{\gamma_e^2 [(x-ut)^2 + (1-\beta_e^2)(y^2+z^2)]^{3/2}} \\ B_x &= 0 \\ B_y &= -\gamma_e \frac{qu}{c^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z'}{r'^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{quz}{\gamma_e^2 [(x-ut)^2 + (1-\beta_e^2)(y^2+z^2)]^{3/2}} \\ B_z &= \gamma_e \frac{qu}{c^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{y'}{r'^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{quy}{\gamma_e^2 [(x-ut)^2 + (1-\beta_e^2)(y^2+z^2)]^{3/2}} \end{aligned}$$

En fonction de $\mathbf{R} = \mathbf{OM}$ et de l'angle θ que fait $\mathbf{R}$ avec l'axe Ox de déplacement de la particule, on trouve finalement :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\mathbf{R}}{R^3} \frac{1-\beta_e^2}{(1-\beta_e^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{u} \times \mathbf{R}}{R^3} \frac{1-\beta_e^2}{(1-\beta_e^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{E}}{c^2}$$

Comme on pouvait s'y attendre, puisque $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' = 0$, les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ sont orthogonaux. Sur la figure 9.3b, on a représenté le champ électromagnétique créé par la particule en quelques points particuliers de la sphère de rayon R .

Pour $\theta = 0$ et π :

$$\mathbf{E}_{//} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} (1 - \beta_e^2) \mathbf{e}_x \quad \mathbf{E}_\perp = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

Pour $\theta = \pi/2$ et $\theta = 3\pi/2$:

$$\mathbf{E}_{//} = \mathbf{0} \quad \mathbf{E}_\perp = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \frac{1}{(1 - \beta_e^2)^{1/2}} \mathbf{e}_\rho \quad \mathbf{B}_{//} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_\perp = \frac{\mu_0 q}{4\pi R^2} \frac{1}{(1 - \beta_e^2)^{1/2}} \mathbf{e}_\varphi$$

On voit que le champ électrique longitudinal est plus faible que le champ électrique transversal :

$$\frac{E_{//}}{E_\perp} = (1 - \beta_e^2)^{3/2} = \frac{1}{\gamma_e^3}$$

Le champ électrique n'est donc pas radial. Il passe par une valeur maximale pour $\theta = \pi/2$ et s'effondre rapidement lorsqu'on s'écarte de cette valeur. On peut montrer que la largeur $\Delta\theta$ de cet intervalle est de l'ordre de $1/\gamma_e$ pour des particules rapides. Pour cela, développons, autour de $\theta = \pi/2$, la fonction caractéristique $f(\theta)$, qui apparaît dans l'expression du champ électrique :

$$f(\theta) = \frac{1}{(1 - \beta_e^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad \text{avec} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{(1 - \beta_e^2)^{3/2}}$$

On a :

$$\left(\frac{df}{d\theta}\right)_{\pi/2} = \left[3\beta_e^2 \frac{\sin(2\theta)}{(1 - \beta_e^2 \sin^2 \theta)^{5/2}}\right]_{\pi/2} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^2f}{d\theta^2}\right)_{\pi/2} = -6 \frac{\beta_e^2}{(1 - \beta_e^2)^{5/2}}$$

On en déduit :

$$\frac{1}{(1 - \beta_e^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} = \frac{1}{(1 - \beta_e^2)^{3/2}} - \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)^2 \left(\frac{6\beta_e^2}{(1 - \beta_e^2)^{5/2}}\right)$$

soit :

$$\frac{1}{(1 - \beta_e^2)^{3/2}} \left[1 - \left(\frac{2\theta - \pi}{\Delta\theta}\right)^2\right] \quad \text{avec} \quad \Delta\theta = 2 \left(\frac{1 - \beta_e^2}{3\beta_e^2}\right)^{1/2}$$

Pour des particules très rapides ($\beta_e \sim 1$), on trouve :

$$\Delta\theta \approx 1,15(1 - \beta_e^2)^{1/2} \quad \text{soit} \quad \Delta\theta \sim \frac{1}{\gamma_e}$$

On peut préciser numériquement ces résultats en calculant, à 1 cm de distance, la valeur des champs produits par un électron dans un microscopie électronique de tension d'accélération 3 MV ($\gamma_e \approx 7$). Dans ce cas, le rapport des champs électriques longitudinal et transversal vaut :

$$\frac{E_{//}}{E_\perp} = \frac{1}{\gamma_e^3} = \frac{1}{343} \approx \frac{3}{1000} \quad \text{et} \quad \Delta\theta \sim \frac{1}{\gamma_e} = \frac{1}{7} \sim 8^\circ$$

Pour $\theta = 0$:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{R^2} (1 - \beta_e^2) \approx 0,3 \times 10^{-6} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \quad \text{et} \quad B = 0$$

Pour $\theta = \pi/2$:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{R^2} \frac{1}{(1 - \beta_e^2)^{1/2}} \approx 0,1 \times 10^{-3} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \quad \text{et} \quad B_c = \frac{\mu_0 e c u}{4\pi R^2} \frac{1}{(1 - \beta_e^2)^{1/2}} = 0,1 \times 10^{-3} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

b) Approximation newtonnienne

En faisant $\beta_e \ll 1$ et donc $\gamma_e \approx 1$ dans les expressions précédentes, on obtient les champs dans l'approximation newtonnienne :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\mathbf{R}}{R^3} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{u} \times \mathbf{R}}{R^3} = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{E}}{c^2}$$

Dans ce cas, le champ électrique suit la particule en restant radial. Le champ magnétique lui est toujours orthoradial et a une valeur nulle sur l'axe du mouvement.

c) Application à l'interaction entre deux particules chargées

Considérons deux particules A_1 et A_2 , de charges respectives q_1 et q_2 , en mouvement avec la même vitesse $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ par rapport au référentiel galiléen du laboratoire $\mathcal{R}$ (Fig. 9.4).

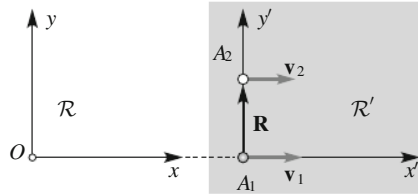


FIG. 9.4.

La force $\mathbf{F}_2$ qu'exerce A_1 sur A_2 s'écrit :

$$\mathbf{F}_2 = q_2(\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_1) \quad \text{avec} \quad \mathbf{B}_1 c = \frac{\mathbf{v}_1}{c} \times \mathbf{E}_1$$

Par conséquent, puisque $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$:

$$\mathbf{F}_2 = q_2 \mathbf{E}_1 + q_2 \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}_1}{c^2} = q_2 \mathbf{E}_1 + \frac{q_2}{c^2} [\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_1) - \mathbf{E}_1 v^2] = q_2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \mathbf{E}_1 + q_2 \frac{v^2}{c^2} (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{e}_x) \mathbf{e}_x$$

en développant le double produit vectoriel. Les composantes de la force s'obtiennent en remplaçant $\mathbf{E}_1$ par son expression :

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \mathbf{R}}{R^3} \frac{1 - v^2/c^2}{(1 - v^2/c^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2$$

La composante longitudinale est donc :

$$\mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{e}_x = q_2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{e}_x) + q_2 \frac{v^2}{c^2} (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{e}_x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 \cos \theta}{R^2} \frac{(1 - v^2/c^2)}{(1 - v^2/c^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}$$

Quant à la composante transversale, elle vaut :

$$\mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{e}_y = q_2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{e}_y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 \sin \theta}{R^2} \frac{(1 - v^2/c^2)^2}{(1 - v^2/c^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}$$

Pour $\theta = \pi/2$, ces composantes se réduisent à :

$$\mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{e}_x = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{e}_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 \sin \theta}{R^2} \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 \sin \theta}{R^2} \gamma_e$$

III. 6. — Tenseur champ électromagnétique

Nous avons vu que les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ devaient être étroitement associés puisqu'ils se transformaient l'un en l'autre, par changement de référentiel galiléen. La question naturelle qui se pose alors est la suivante : comment représenter un tel champ sachant que ce dernier n'est pas un quadrivecteur ?

Pour y répondre, explicitons, dans la base de $\mathcal{R}$, les relations donnant les champs en fonction des potentiels :

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} & B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} & B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} & B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{aligned} \quad \text{et}$$

Dans le formalisme tensoriel quadridimensionnel, où les coordonnées ct , x , y , z sont désignées respectivement par x^0 , x^1 , x^2 , x^3 , $(0, 1, 2, 3)$ n'étant pas des puissances mais des indices placés en position haute (cf. Annexe 2), les six relations précédentes s'écrivent aussi, à l'aide des composantes du quadrivecteur 4-A ($V/c, \mathbf{A}$) :

$$\begin{aligned} -\frac{E_1}{c} &= \frac{\partial A_0}{\partial x^1} + \frac{\partial A_1}{\partial x^0} & B_1 &= \frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3} \\ -\frac{E_2}{c} &= \frac{\partial A_0}{\partial x^2} + \frac{\partial A_2}{\partial x^0} & B_2 &= \frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1} \\ -\frac{E_3}{c} &= \frac{\partial A_0}{\partial x^3} + \frac{\partial A_3}{\partial x^0} & B_3 &= \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \end{aligned} \quad \text{et}$$

soit, en posant : $\nabla_0 = \partial/\partial x^0$, $\nabla_1 = -\partial/\partial x^1$, $\nabla_2 = -\partial/\partial x^2$, $\nabla_3 = -\partial/\partial x^3$,

$$\begin{aligned} \frac{E_1}{c} &= \nabla_1 A_0 - \nabla_0 A_1 = \frac{F_{10}}{c} & B_1 &= -\nabla_2 A_3 + \nabla_3 A_2 = \frac{F_{32}}{c} \\ \frac{E_2}{c} &= \nabla_2 A_0 - \nabla_0 A_2 = \frac{F_{20}}{c} & B_2 &= -\nabla_3 A_1 + \nabla_1 A_3 = \frac{F_{13}}{c} \\ \frac{E_3}{c} &= \nabla_3 A_0 - \nabla_0 A_3 = \frac{F_{30}}{c} & B_3 &= -\nabla_1 A_2 + \nabla_2 A_1 = \frac{F_{21}}{c} \end{aligned}$$

Ainsi, les composantes du champ électromagnétique ($\mathbf{E}, \mathbf{B}c$) peuvent être mises sous la forme tensorielle suivante :

$$\frac{F_{ij}}{c} = \nabla_i A_j - \nabla_j A_i \quad \text{avec} \quad F_{ii} = 0 \quad \text{et} \quad F_{ij} = -F_{ji}$$

L'être mathématique $\{F_{ij}\}$, représenté dans la base de $\mathcal{R}$ par la matrice carrée formée avec les différents éléments F_{ij} , est appelé le *tenseur électromagnétique*. Les indices i et j désignant respectivement la ligne et la colonne, on l'explicité dans la base de $\mathcal{R}$ sous la forme de la matrice carrée *antisymétrique* suivante :

$$\{F_{ij}\} \Rightarrow_{\mathcal{R}} \begin{bmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 c & B_2 c \\ E_2 & B_3 c & 0 & -B_1 c \\ E_3 & -B_2 c & B_1 c & 0 \end{bmatrix}$$

Cette matrice antisymétrique, d'ordre 2, est caractérisée par six quantités scalaires : les trois composantes de $\mathbf{E}$ et les « trois composantes » de $\mathbf{Bc}$. Notons que la dimension physique du tenseur $\{F_{\mu\nu}\}$ ainsi défini est celle d'un champ électrique.

IV. — LAGRANGIEN ET HAMILTONIEN D'UNE PARTICULE RAPIDE

IV.1. — Lagrangien d'une particule chargée rapide

Le lagrangien d'une particule chargée, plongée dans un champ électromagnétique extérieur, est la fonction $\mathcal{L}(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t)$, des coordonnées de position $\{q_i\}$, de leurs dérivées et du temps, qui satisfait aux équations de la mécanique écrites sous la forme (cf. *Mécanique*) :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

Montrons que l'expression suivante de $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = -\frac{mc^2}{\gamma} - qV + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$$

dans laquelle m , q , $\mathbf{v}$, γ et $\mathbf{A}$ désignent respectivement la masse, la charge, la vitesse de la particule, le facteur relativiste associé et le potentiel vecteur, restitue la loi fondamentale de la dynamique einsteinienne :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$$

Pour cela, évaluons les quantités $P_x = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{x}$ et $\partial \mathcal{L} / \partial x$, x étant la coordonnée de position dans le référentiel $\mathcal{R} = Oxyz$. Il vient :

$$P_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{mc^2}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial \dot{x}} + qA_x = \frac{mc^2}{\gamma^2} \gamma^3 \frac{v}{c^2} \frac{\dot{x}}{v} + qA_x = \gamma m \dot{x} + qA_x$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -q \frac{\partial V}{\partial x} + q \left(\dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right)$$

Il en résulte que :

$$\frac{d(\gamma m \dot{x} + qA_x)}{dt} = -q \frac{\partial V}{\partial x} + q \left(\dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right)$$

soit, puisque $dA_x/dt = \partial A_x/\partial t + \dot{x} \partial A_x/\partial x + \dot{y} \partial A_x/\partial y + \dot{z} \partial A_x/\partial z$:

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \dot{x}) = -q \frac{\partial V}{\partial x} - q \frac{\partial A_x}{\partial t} + q \dot{y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - q \dot{z} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{e}_x$$

On reconnaît ici la projection, suivant l'axe Ox , de la loi fondamentale de la dynamique d'Einstein. Retenons donc l'expression suivante du lagrangien d'une particule chargée :

$$\mathcal{L} = -\frac{mc^2}{\gamma} - qV + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$$

Pour de faibles vitesses ($\gamma \approx 1 + \beta^2/2$), on retrouve évidemment l'expression newtonienne, à une constante additive près :

$$\mathcal{L} \approx -mc^2 \left(1 - \frac{\beta^2}{2} \right) - qV + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \approx \frac{mv^2}{2} - qV + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - mc^2$$

Remarque : L'expression newtonienne $\mathcal{L} = \mathcal{E}_k - \mathcal{E}_p + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$ (cf. *Mécanique*) ne se généralise donc pas en mécanique d'Einstein en remplaçant $\mathcal{E}_k$ par $(\gamma - 1)mc^2$.

IV.2. — Hamiltonien d'une particule chargée rapide

On obtient l'hamiltonien $\mathcal{H}$ à partir de $\mathcal{L}$ à l'aide de la transformation de Legendre suivante :

$$\mathcal{H} = \sum_i \dot{q}_i P_i - \mathcal{L} \quad \text{où} \quad P_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_i + qA_i$$

est le moment conjugué associé à la coordonnée q_i . En remplaçant P_i et $\mathcal{L}$ par leurs expressions respectives, on trouve :

$$\mathcal{H} = \sum_i \dot{q}_i (p_i + qA_i) + \frac{mc^2}{\gamma} + qV - q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$$

soit, puisque $\dot{q}_i p_i = \gamma m \dot{q}_i^2$:

$$\mathcal{H} = \gamma m v^2 + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} + \frac{mc^2}{\gamma} + qV - q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = \frac{mv^2}{\gamma} (1 + \gamma^2 \beta^2) + qV$$

Il en résulte, en simplifiant, puisque $1 + \gamma^2 \beta^2 = \gamma^2$:

$$\mathcal{H} = \gamma mc^2 + qV = (\gamma - 1)mc^2 + qV + mc^2$$

Pour de faibles vitesses ($\gamma \approx 1 + \beta^2/2$), on retrouve l'expression newtonienne, à l'énergie de masse mc^2 près :

$$\mathcal{H} \approx \frac{mv^2}{2} + qV + mc^2$$

Remarques : 1) En présence du potentiel vecteur $\mathbf{A}$, le moment conjugué P_i d'une particule chargée ne s'identifie donc pas à la quantité de mouvement, mais à son impulsion : $\mathbf{P} = \mathbf{p} + q\mathbf{A}$.

2) Contrairement au lagrangien, l'expression newtonienne $\mathcal{H} = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p$ se généralise en dynamique d'Einstein, en remplaçant l'énergie cinétique $\mathcal{E}_k$ par $(\gamma - 1)mc^2$.

IV.3. — Relation entre l'énergie totale et l'impulsion d'une particule chargée

Rappelons les expressions de l'énergie totale $\mathcal{E}_t$ et de l'impulsion $\mathbf{P}$ d'une particule chargée :

$$\mathcal{E}_t = \gamma mc^2 + qV \quad \text{et} \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}_t = \gamma m\mathbf{v} + q\mathbf{A}$$

Comme $\mathcal{E} = \gamma mc^2$ et $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$ sont reliés par l'équation $\mathcal{E}^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$, on a :

$$(\mathcal{E}_t - qV)^2 - (\mathbf{P} - q\mathbf{A})^2 c^2 = m^2 c^4$$

IV.4. — Principe d'Hamilton en dynamique d'Einstein

Le principe d'Hamilton en dynamique einsteinienne s'énonce, comme en dynamique newtonienne (cf. *Mécanique*) :

Entre deux instants t_1 et t_2 , le mouvement d'une particule est celui qui réalise une valeur stationnaire de l'action S :

$$\delta S = 0 \quad \text{avec} \quad S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} \, dt \quad \text{et} \quad \mathcal{L} = -\frac{mc^2}{\gamma} - qV + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$$

Rappelons que le mot *stationnaire* a la même signification que dans le principe variationnel de Fermat (cf. *Optique*) : pour une durée suffisamment faible, l'action le long d'une trajectoire réelle est *minimale*, d'où le nom souvent utilisé de *principe de moindre action*.

Cet énoncé est un principe, car il permet d'en déduire les équations du mouvement en dynamique d'Einstein. Dans ce contexte, on peut retrouver l'expression du lagrangien. En effet, introduisons le temps propre élémentaire $d\tau$ de la particule. Il vient, puisque $dt = \gamma d\tau$ avec $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$:

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma \mathcal{L} d\tau$$

Comme l'action et la durée propre sont des invariants, $\gamma \mathcal{L}$ doit être aussi un invariant. Or, un tel invariant doit faire apparaître d'une part une énergie invariante, d'autre part le produit $-qV$ et le produit scalaire $q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$ dans l'approximation newtonienne. Les invariants liés, d'une part à l'énergie d'une particule, d'autre part à l'ensemble qV et $q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$, sont respectivement l'énergie de masse mc^2 et le produit scalaire de la quadriquantité de mouvement de la particule par le quadripotential :

$$4\text{-}p \cdot 4\text{-}A = \gamma mc \frac{V}{c} - \gamma m \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = \gamma m(V - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$$

La quantité invariante $\gamma \mathcal{L}$ doit être une combinaison linéaire de mc^2 et de $4\text{-}p \cdot 4\text{-}A$:

$$\gamma \mathcal{L} = \lambda_1 mc^2 + \lambda_2 \gamma m(V - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \quad \text{d'où} \quad \mathcal{L} = \lambda_1 \frac{mc^2}{\gamma} + \lambda_2 m(V - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$$

On détermine les constantes invariantes λ_1 et λ_2 en comparant l'expression précédente, dans l'approximation newtonienne, à celle du lagrangien newtonien $\mathcal{L}_n$ (cf. *Mécanique*) :

$$\mathcal{L} = \lambda_1 \frac{mc^2}{\gamma} + \lambda_2 m(V - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \approx \lambda_1 mc^2 \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right) + \lambda_2 m(V - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$$

soit :

$$\mathcal{L} = -\lambda_1 \left(\frac{mv^2}{2}\right) + \lambda_2 m(V - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) + \lambda_1 mc^2$$

puisque $1/\gamma \approx 1 - \beta^2/2$, alors que $\mathcal{L}_n = mv^2/2 - qV + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$. On en déduit les valeurs suivantes de λ_1 et λ_2 , en tenant compte de l'énergie de masse mc^2 : $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -q/m$. On retrouve bien l'expression déjà donnée du lagrangien.

CONCLUSION

Retenons les points essentiels.

1) Par changement de référentiel galiléen, le vecteur courant volumique et la charge volumique se transforment comme le quadrivecteur source de champ ($\rho c, \mathbf{J}$) :

$$\rho c = \gamma_e(\rho'c + \beta_e J'_x) \quad J_x = \gamma_e(J'_x + \beta_e \rho'c) \quad J_y = J'_y \quad J_z = J'_z$$

2) Le potentiel vecteur et le potentiel scalaire se transforment comme un quadrivecteur ($\mathbf{A}, V/c$) :

$$V/c = \gamma_e(V'/c + \beta_e A'_x) \quad A_x = \gamma_e(A'_x + \beta_e V'/c) \quad A_y = A'_y \quad A_z = A'_z$$

3) Le champ électromagnétique ($\mathbf{E}, \mathbf{B}$) n'est pas un quadrivecteur :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{//} &= \mathbf{E}'_{//} & \mathbf{B}_{//} &= \mathbf{B}'_{//} \\ \mathbf{E}_{\perp} &= \gamma_e(\mathbf{E}'_{\perp} - \boldsymbol{\beta}_e \times \mathbf{B}'_{\perp} c) & \mathbf{B}_{\perp} &= \gamma_e(\mathbf{B}'_{\perp} c + \boldsymbol{\beta}_e \times \mathbf{E}'_{\perp}) \end{aligned} \quad \text{et}$$

Les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}c$ apparaissent comme les manifestations électrique et magnétique d'une grandeur physique qui les englobe, le champ électromagnétique, lequel a la structure mathématique d'un tenseur.

4) Le champ électromagnétique ($\mathbf{E}$, $\mathbf{B}_c$) produit par une particule chargée, en mouvement rectiligne uniforme, à la vitesse $\mathbf{u}$, a pour expression :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\mathbf{R}}{R^3} \frac{1 - \beta_e^2}{(1 - \beta_e^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_c = \frac{\mu_0 c}{4\pi} \frac{q\mathbf{u} \times \mathbf{R}}{R^3} \frac{1 - \beta_e^2}{(1 - \beta_e^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} = \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{E}$$

où $\beta_e = u/c$, $\mathbf{R}$ a pour composantes $x - ut$, y , z , et $\theta = (\mathbf{u}, \mathbf{R})$. Les vecteurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ sont orthogonaux.

5) Le lagrangien et l'hamiltonien d'une particule chargée, dans un potentiel électromagnétique ($\mathbf{A}$, V/c), ont pour expressions respectives, en dynamique einsteinienne :

$$\mathcal{L} = -\frac{mc^2}{\gamma} - qV + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \quad \text{et} \quad \mathcal{H} = (\gamma - 1)mc^2 + qV + mc^2$$

EXERCICES ET PROBLÈMES

P9– 1. Transformation de la charge volumique et du courant volumique

Une particule chargée est en mouvement par rapport au référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, avec une vitesse $\mathbf{v}$.

1. Vérifier la nature quadrvectorielle de la quantité sans dimension :

$$(\gamma, \gamma\boldsymbol{\beta}) \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c} \quad \text{et} \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$$

En déduire le carré de sa norme.

2. On considère un ensemble de particules, de charge q , se déplaçant toutes avec la même vitesse constante $\mathbf{v}$, de direction quelconque par rapport à $\mathcal{R}$. On désigne par n_v le nombre de particules par unité de volume dans $\mathcal{R}$. Dans un autre référentiel $\mathcal{R}'$, en translation avec la vitesse constante $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_x$, par rapport à $\mathcal{R}$, la vitesse d'ensemble des particules est $\mathbf{v}'$. Dans $\mathcal{R}'$, le nombre de charges par unité de volume est n'_v .

Établir, à partir de l'invariance de la charge, la relation suivante entre n_v et n'_v :

$$\frac{n'_v}{n_v} = \gamma_e(1 - \beta_e\beta_x) \quad \text{avec} \quad \beta_e = \frac{u}{c} \quad \text{et} \quad \gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2}$$

3. Retrouver, à l'aide du résultat précédent, les formules de transformation de la charge volumique ρ et du courant volumique $\mathbf{J}$, entre les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.

P9– 2. Transformation des forces et transformation des champs

On se propose d'établir les formules de transformation des champs électrique et magnétique à l'aide de la transformation des forces et de l'expression de la force de Lorentz.

1. Rappeler les formules de transformation des forces reliant les composantes dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ à celles dans $\mathcal{R}'$, en translation, rectiligne, uniforme, à la vitesse $\mathbf{v}_e = u\mathbf{e}_x$ par rapport à $\mathcal{R}$.

2. En comparant les expressions de la force de Lorentz dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, pour une particule chargée au repos dans $\mathcal{R}$, retrouver les formules de transformation du champ électrique.

3. À l'aide des formules de réciprocité, déduire des formules précédentes les relations donnant les composantes du champ magnétique transversal.

4. En comparant les expressions de la force de Lorentz dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, pour une particule chargée, en mouvement rectiligne, uniforme, sur l'axe Oy du référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, à la vitesse $\mathbf{u}$, retrouver les formules de transformation du champ magnétique.

P9– 3. Invariance des équations de Maxwell en relativité

On veut établir les formules de transformation des champs électrique et magnétique à l'aide de l'invariance des équations de Maxwell par changement de référentiel galiléen.

1. Expliciter l'équation de Maxwell traduisant la loi d'induction dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ en translation, rectiligne, uniforme, à la vitesse $\mathbf{v}_e = \beta_e c \mathbf{e}_x$ par rapport à $\mathcal{R}$.

2. À l'aide de la transformation de Lorentz-Poincaré, en déduire les expressions des composantes E_x , E_y , E_z du champ électrique $\mathbf{E}$ et des composantes B_y , B_z du champ magnétique $\mathbf{B}$, en fonction des composantes dans $\mathcal{R}'$.

3. Montrer que les composantes selon x du champ $\mathbf{B}$ dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$ satisfont à la relation :

$$\left(\frac{\partial}{\partial ct'} + \beta_e \frac{\partial}{\partial x'} \right) (B_x - B'_x) = 0$$

Conclure.

P9– 4. Transformation des potentiels créés par un fil rectiligne

Un fil conducteur rectiligne, supposé infini selon l'axe Ox et de section s , est constitué d'ions fixes, par rapport au référentiel galiléen du laboratoire $\mathcal{R} = Oxyz$, et d'électrons de conduction, de vitesse $\mathbf{u} = u \mathbf{e}_x$, avec $u = 0,75 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$, par rapport à $\mathcal{R}$. Le fil étant neutre, les charges volumiques des ions et des électrons sont opposées dans $\mathcal{R}$. La charge volumique des ions est $13,5 \times 10^9 \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}$.

1. a) Quelles sont les expressions du quadrivecteur courant volumique associés aux électrons, dans $\mathcal{R}$ et dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}'$, de vitesse $v_e = 0,8c$ par rapport à $\mathcal{R}$?

b) Même question pour le quadrivecteur courant volumique associés aux ions.

c) Le fil, neutre dans $\mathcal{R}$, l'est-il aussi dans $\mathcal{R}'$? Commenter en calculant la charge dans $\mathcal{R}'$ et le potentiel électrique que cette dernière produit. On prendra l'origine des potentiels à la distance R_0 de l'axe Ox .

2. a) Trouver le quadripotential 4-A dans $\mathcal{R}$, à la distance R de l'axe du fil,

b) En déduire le quadripotential 4-A' dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}'$, de vitesse v_e par rapport à $\mathcal{R}$. Comparer le potentiel V' trouvé à celui obtenu à la question 1c.

P9– 5. Variation de l'angle que font entre eux les champs électrique et magnétique

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}' = O'x'y'z'$, en translation, rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R} = Oxyz$, à la vitesse v_e selon Ox , le champ électrique et le champ magnétique sont colinéaires suivant l'axe transversal Oy : $\mathbf{E}' = E_0 \mathbf{e}'_y$ et $\mathbf{B}' = E_0 \mathbf{e}'_y$.

1. Quelles sont les expressions des composantes de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ dans $\mathcal{R}$?

2. Trouver la vitesse v_e telle que les deux champs fassent entre eux un angle α . Pour quelle valeur de β_e , l'angle α vaut-il $\pi/3$?

3. Quel est le domaine de variation de α ?

P9– 6. Invariants du champ électromagnétique

1. Rappeler les deux invariants du champ électromagnétique $\mathbf{E}, \mathbf{B}$. En déduire que le carré du vecteur complexe $\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{B}c$ est aussi un invariant.

2. Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, les normes des champs E et B valent respectivement :

$$E = 5 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \quad \text{et} \quad B = 0,01 \text{ T}$$

En outre, ces champs font entre eux un angle de $\pi/6$. Trouver la valeur de $\mathbf{B}'c$ et de l'angle que fait ce champ avec le champ électrique $\mathbf{E}'$, dans un autre référentiel galiléen $\mathcal{R}'$, sachant $E' = 6 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

3. Existe-t-il un référentiel dans lequel le champ électromagnétique précédent se réduise à un champ électrique seul ou à un champ magnétique seul ? Justifier votre réponse.

4. Existe-t-il un référentiel dans lequel les champs électrique et magnétique sont parallèles ? Si oui, calculer la valeur des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}c$ dans ce référentiel.

P9– 7. Force d'interaction entre un électron et un fil chargé positivement

Dans un référentiel $\mathcal{R}'$, en translation, rectiligne, uniforme, avec la vitesse $\mathbf{u}$, par rapport à $\mathcal{R}$ galiléen, un fil rectiligne le long de l'axe Ox' , est chargé positivement, avec la charge linéique uniforme ρ_l .

1. Quel est le champ électromagnétique ($\mathbf{E}'$, $\mathbf{B}'$) que produit dans $\mathcal{R}'$ cette distribution, en fonction de ρ_l et de la distance D qui sépare le fil d'un point M où se trouve un électron au repos ? En déduire la force qu'exerce la distribution de charge sur l'électron. Calculer le champ et cette force pour $\rho_l = 1 \mu\text{C} \cdot \text{m}^{-1}$ et $D = 1 \text{ mm}$.

2. Trouver le champ électromagnétique dans $\mathcal{R}$. En déduire la force qui s'exerce sur l'électron.

P9– 8. Champs électrique et magnétique entre les armatures d'un condensateur

On considère, dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R} = Oxyz$, un condensateur plan, constitué de plaques métalliques, parallèles, carrées, de côté a , perpendiculaires à l'axe Oy . La charge Q du condensateur est répartie uniformément sur la surface des armatures et l'épaisseur e du condensateur est faible devant a .

1. Quelles sont, en fonction de la charge surfacique ρ_s du condensateur, les expressions des champs électrique et magnétique dans $\mathcal{R}$? En déduire la valeur des invariants $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}c$ et $E^2 - B^2 c^2$, sachant que $Q = 1 \text{ mC}$ et $a = 1 \text{ m}$.

2. Calculer les champs électrique et magnétique dans le référentiel $\mathcal{R}'$, de vitesse $\mathbf{v}_e = \beta_e c \mathbf{e}_x$ par rapport à $\mathcal{R}$. Application numérique : $\beta = 0,95$.

3. Retrouver les expressions précédentes à l'aide de la transformation du quadricourant $4 - J$.

P9– 9. Force d'interaction entre deux particules chargées de même vitesse

Deux électrons, A_1 et A_2 , se déplacent à la même vitesse $\mathbf{u}$, par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$. Ces deux particules sont situées sur une droite normale à $\mathbf{u}$, à une distance d l'une de l'autre (Fig. 9.4).

1. Donner les expressions, dans $\mathcal{R}$, du champ électrique $\mathbf{E}$ et du champ magnétique $\mathbf{B}$ créés par A_1 , au point où se trouve A_2 .
2. Quelle est, dans le cas général, la force de Lorentz qui s'exerce sur A_2 dans $\mathcal{R}$? Étudier le cas où $\beta_e = u/c \ll 1$.
3. Que deviennent séparément les termes électrique et magnétique de la force de Lorentz précédente, lorsque $\beta_e \ll 1$; on poussera le développement jusqu'aux termes en β_e^2 . Identifier la force électrique et la force magnétique. Comparer au résultat de la question 2.

P9– 10. Filtre de Wien

Dans le référentiel $\mathcal{R} = Oxyz$ du laboratoire, un électron issu du canon d'un microscope électronique pénètre, avec une vitesse constante $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$, dans une région où règnent un champ électrique et un champ magnétique stationnaires et orthogonaux :

$$\mathbf{E} = E\mathbf{e}_y \quad \text{avec} \quad E = 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = B\mathbf{e}_z \quad \text{avec} \quad B = 0,02 \text{ T}$$

1. Quelle doit être la valeur v de la vitesse pour que l'électron garde sa trajectoire rectiligne ?
2. Trouver les champs $\mathbf{E}'$ et $\mathbf{B}'$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}'$, de vitesse $\mathbf{v}_e = \beta_e c \mathbf{e}_x$.
3. Pour quelle valeur v' de la vitesse de l'électron dans $\mathcal{R}'$, la particule a-t-elle, par rapport à ce référentiel, une trajectoire rectiligne ? Calculer v' pour $\beta_e = 0,15$.

P9– 11. Particule rapide dans des champs électrique et magnétique orthogonaux

Dans le référentiel $\mathcal{R} = Oxyz$ du laboratoire, une particule est soumise à un champ électrique $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_z$ et à un champ magnétique $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_y$.

1. Écrire les composantes du champ électrique $\mathbf{E}'$ et du champ magnétique $\mathbf{B}'$ dans un référentiel $\mathcal{R}'$ en translation, rectiligne, uniforme, de vitesse $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_x$ par rapport à $\mathcal{R}$. Retrouver l'invariance du produit scalaire $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$.
2. En déduire la valeur de u , dans les deux cas suivants :
 - i) le champ électrique s'annule dans $\mathcal{R}'$,
 - ii) le champ magnétique s'annule dans $\mathcal{R}'$.
3. Examiner le cas particulier $E = Bc$.

P9– 12. Force sur un électron de conduction dans un métal

Dans un métal, ayant la forme d'un cylindre de rayon R , les ions positifs sont fixes et les électrons de conduction mobiles. Le conducteur est globalement neutre : par unité de volume, le nombre n_p de charges positives est égal au nombre de charges négatives dans $\mathcal{R}$. Les charges négatives se déplacent d'un mouvement d'ensemble avec la vitesse $\mathbf{u}$ parallèlement à l'axe du conducteur. On appelle $\mathcal{R}'$ le référentiel galiléen de vitesse $\mathbf{u}$ par rapport à $\mathcal{R}$.

1. Calculer, dans $\mathcal{R}$, le champ électrique $\mathbf{E}$ et le champ magnétique $\mathbf{B}$, à la distance $r < R$ de l'axe. En déduire la force $\mathbf{F}$ exercée par le conducteur sur un électron se déplaçant, avec la vitesse $\mathbf{u}$, parallèlement à l'axe du conducteur, à une distance r de l'axe.
2. Déterminer, dans $\mathcal{R}'$, la charge volumique totale ρ' .
3. Calculer la force $\mathbf{F}'$ qui s'exerce sur l'électron dans $\mathcal{R}'$.

P9– 13. Électron dans un champ électrique et un champ magnétique orthogonaux

Un électron est initialement sans vitesse par rapport au référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, dans une région où règnent un champ électrique $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_y$ et un champ magnétique $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$. Les valeurs de ces champs sont : $E = 4 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ et $B = 5 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

1. Montrer que le champ électromagnétique se réduit à un seul champ magnétique dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ dont on déterminera la vitesse par rapport à $\mathcal{R}$.
2. Quelle est la valeur du champ magnétique dans $\mathcal{R}'$?
3. Déterminer la quantité de mouvement de l'électron dans $\mathcal{R}'$.
4. Étudier le mouvement de l'électron dans $\mathcal{R}'$. Comment trouve-t-on alors le mouvement dans $\mathcal{R}$?

P9– 14. Rayonnement synchrotron

On se propose d'analyser, dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, le rayonnement émis par une particule chargée (masse m , charge q) accélérée sous la seule action d'un champ magnétique $\mathbf{B}$ constant, en dynamique einsteinienne.

1. a) À quelle équation différentielle du premier ordre satisfait le vecteur vitesse $\mathbf{v}$?
b) En déduire que le mouvement est uniforme.
c) Établir l'expression vectorielle de l'accélération en fonction de $\mathbf{v}$, $\mathbf{B}$ et de la pulsation cyclotron ω_c .
2. a) Quelle est la trajectoire lorsque la composante de la vitesse initiale $\mathbf{v}_0$ de la particule suivant la direction de $\mathbf{B}$ est nulle ?
b) Même question lorsque cette composante n'est pas nulle.
3. Dans toute la suite, on étudie le mouvement d'un électron, dont la vitesse initiale $\mathbf{v}_0$, avec $v_0 = 0,995c$, est perpendiculaire à un champ magnétique $\mathbf{B}$, de norme $0,1 \text{ T}$. Calculer ω_c ainsi qu'une longueur caractéristique de la trajectoire.
4. L'électron rayonne une puissance électromagnétique proportionnelle au carré de son accélération $\mathbf{a}_0$ dans le référentiel propre $\mathcal{R}_0$ dans lequel il est au repos :

$$\Phi = \frac{2q_e^2}{3c^3} a_0^2 \quad \text{avec} \quad q_e^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

- a) La formule de transformation des accélérations, entre $\mathbf{a}_0$ et l'accélération $\mathbf{a}$ dans $\mathcal{R}$, est : $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0/\gamma^2$. Montrer que Φ peut se mettre sous la forme :

$$\Phi = 2c\sigma_T \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) (\gamma^2 - 1)$$

σ_T étant une quantité que l'on exprimera en fonction de $r_e = q_e^2/(m_e c^2)$.

- b) Quelle est la signification physique des grandeurs $B^2/(2\mu_0)$ et r_e ? Vérifier la cohérence dimensionnelle de l'expression de Φ .
- c) Calculer la puissance rayonnée par l'électron en watt puis en eV par seconde.

5. L'électron émet ce rayonnement de façon isotrope dans $\mathcal{R}_0$. En admettant la composition einsteinienne des vitesses entre $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}$, montrer que le rayonnement dans $\mathcal{R}$ est confiné dans une zone étroite dont on précisera l'orientation moyenne et la demi-largeur en fonction de γ .

10

Relativité générale

La relativité restreinte a été généralisée par Einstein, en 1916, principalement dans le but d'étendre le principe de relativité à tous les référentiels, galiléens ou non. Rappelons que la relativité restreinte (RR) et la relativité newtonienne (RN) attribuent toutes les deux un caractère privilégié aux référentiels galiléens, la première ne faisant qu'élargir le principe de relativité aux phénomènes physiques, autres que mécaniques.

Trouvant ce privilège incompréhensible, Einstein confia, à plusieurs reprises, qu'il avait été fortement influencé par le physicien allemand E. Mach, lequel avait proposé une lecture critique des hypothèses de Newton, notamment celles concernant l'espace absolu et la masse inerte. Il fut alors conduit à réexaminer la gravitation, en abandonnant le concept d'interaction pour celui de courbure de l'espace-temps.

Nous nous proposons ici de développer les idées fondamentales de la relativité générale (RG), notamment le rôle singulier de la gravitation, en raison de l'égalité de la masse grave et de la masse inerte, l'équivalence de tous les systèmes de référence pour exprimer les lois de la physique et enfin l'inexistence de l'espace et du temps, en dehors de la matière ou de l'énergie. Volontairement, nous laissons de côté le développement technique nécessaire à l'écriture des équations de la relativité générale, lequel s'appuie largement sur le calcul tensoriel (cf. Annexe 2). Nous donnons ensuite un aperçu du rôle majeur de la RG en cosmologie.

I. — CARACTÈRE SINGULIER DE LA GRAVITATION

On sait que la force de gravitation est de loin la moins intense des quatre forces fondamentales (cf. chapitre 8). Cependant, elle joue un rôle essentiel à l'échelle de l'Univers, car les autres forces sont soit de très faible portée, soit nulles, les corps stellaires étant électriquement neutres.

I. 1. — Forces d'inertie et force de gravitation

Rappelons que les forces d'inertie, qui apparaissent lorsque le référentiel par rapport auquel on étudie le mouvement n'est pas galiléen, sont les termes d'accélération $-m\mathbf{a}_e$ et $-m\mathbf{a}_C$, qui par définition sont proportionnels aux masses inertes (cf. *Mécanique*). Ces forces ont ainsi la particularité de s'évanouir lorsqu'on effectue un *bon choix* de référentiel privilégié. Quant à la force de gravitation qui s'exerce mutuellement entre deux points matériels A_1 et A_2 , son expression vectorielle, bien connue, est la suivante, avec des notations explicites (Fig. 10.1) :

$$\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = -\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1^* m_2^*}{r^2} \mathbf{e}_r \quad \text{où} \quad \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1}{r} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{r}$$

La valeur de la constante de Newton $G = 6,67 \times 10^{-11}$ SI rappelle que cette interaction est la plus faible des quatre interactions fondamentales. Les quantités scalaires positives m_1^* , m_2^* sont les *masses graves* des points A_1 et A_2 . Bien que souvent on se contente de parler de masse sans autre précision, il convient de distinguer la masse inerte de la masse grave, car ces deux quantités traduisent des propriétés différentes de la matière : la première qui est la capacité qu'a un corps de résister à sa mise en mouvement, la seconde qui est la propriété d'un corps électriquement neutre d'attirer un autre corps. Le mérite d'Einstein fut notamment de souligner le caractère exceptionnel de l'identité des masses inerte et grave, à une époque où cette singularité passait inaperçue.

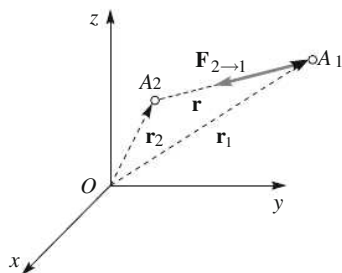


FIG. 10.1.

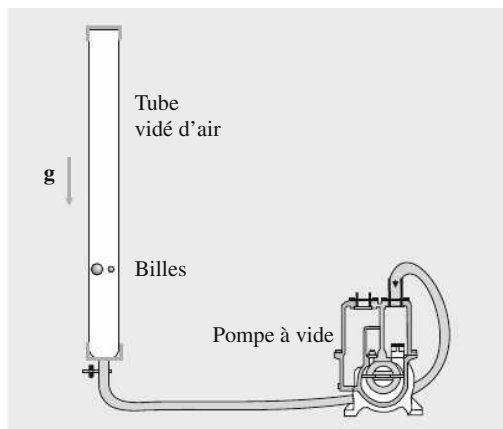


FIG. 10.2.

I. 2. — Égalité des masses inerte et grave

Plusieurs analyses expérimentales ont permis d'établir l'égalité des masses grave et inerte, à l'origine du *Principe d'Équivalence*, comme on le verra plus loin.

i) La première fut celle proposée par Galilée dans la deuxième partie de la première journée du « Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles », en 1620. Citons Galilée : « *Mais, moi qui en ai fait l'essai, je vous assure qu'un boulet d'artillerie, pesant cent ou deux cents livres ou même davantage, ne précèdera même pas d'une palme, en touchant terre, une balle de mousquet dont le poids n'excède pas une demi-livre, et cela après une chute commune de deux cents coudées* ». Galilée analyse aussi le rôle de la force de frottement visqueux exercée par l'air.

ii) La plus connue est celle prouvant la chute identique des corps dans un tube vidé d'air (tube de Newton); Einstein disait d'elle que c'était selon lui la plus belle expérience qu'un professeur de physique pouvait montrer à ses élèves.

iii) La plus spectaculaire est celle montrant l'impesanteur dans un satellite artificiel.

iv) La plus précise est celle faite, entre 1890 et 1920, par le physicien hongrois R. Eötvös avec une balance de torsion (précision relative de 10^{-9}); elle fut reprise par le physicien américain R. Dicke dans les années 1960, avec une excellente précision relative (10^{-11}), et par E. Adelberger plus récemment, en 1990, avec une précision relative encore meilleure de 3×10^{-13} .

a) Expérience du tube de Newton

Dans un tube vertical en verre, que l'on a préalablement *vidé d'air* à l'aide d'une pompe à vide, on laisse tomber deux corps différents, par exemple une bille métallique lourde et une bille en sureau

légère (Fig. 10.2). On constate que ces deux corps acquièrent la même accélération. Montrons que ce résultat implique la proportionnalité entre les masses inerte et grave.

En appliquant la loi fondamentale de la dynamique dans le référentiel terrestre aux deux corps, on obtient, si $\mathbf{F}_{p,1}$ et $\mathbf{F}_{p,2}$ désignent les poids et $\boldsymbol{\Omega}$ la vitesse de rotation de la Terre autour de son axe sud-nord (cf. *Mécanique*) :

$$m_1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_{p,1} - 2m_1 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_1 \quad \text{et} \quad m_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{p,2} - 2m_2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_2$$

Comme $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2$ et $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$, d'après l'expérience, il en résulte que :

$$\frac{\mathbf{F}_{p,1}}{m_1} = \frac{\mathbf{F}_{p,2}}{m_2}$$

où les poids sont reliés au champ de gravitation $\mathcal{G}$ par (cf. *Mécanique*) :

$$\mathbf{F}_{p,1} = m_1^* \mathcal{G}(A_1) - m_1 \mathbf{a}_{e,1} \quad \mathbf{F}_{p,2} = m_2^* \mathcal{G}(A_2) - m_2 \mathbf{a}_{e,2}$$

Par conséquent, on a, puisque $\mathcal{G}(A_1) \approx \mathcal{G}(A_2) = \mathcal{G}$ et $\mathbf{a}_{e,1} \approx \mathbf{a}_{e,2} = \mathbf{a}_e$:

$$\left(\frac{m^*}{m}\right)_1 \mathcal{G} - \mathbf{a}_e \approx \left(\frac{m^*}{m}\right)_2 \mathcal{G} - \mathbf{a}_e \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{m^*}{m}\right)_1 \approx \left(\frac{m^*}{m}\right)_2$$

b) Mesure du rapport m^*/m par Newton

Newton testa expérimentalement l'indépendance du rapport m^*/m avec le matériau constitutif, en comparant la période des pendules simples que l'on réalise en accrochant, à l'extrémité inférieure d'un fil, des masselottes de différentes substances.

Établissons l'expression de la période de ces pendules de même longueur l , à l'aide de la loi fondamentale de Newton, appliquée au corpuscule A , de masse inerte m et de masse grave m^* :

$$m\mathbf{a} = m^*\mathbf{g} + \mathbf{R}$$

$\mathbf{g}$ désignant le champ de pesanteur terrestre, lequel est constitué principalement du champ de gravitation $\mathcal{G}$ (cf. *Mécanique*) ; la réaction du fil, $\mathbf{R}$, est portée par le vecteur $\mathbf{AO}$ qui relie A au point d'attache O de l'autre extrémité du fil (Fig. 10.3). Il vient, en projetant l'équation vectorielle précédente selon le vecteur unitaire $\mathbf{e}_t$ défini par la tangente à la trajectoire circulaire, et en désignant par θ l'angle que fait $\mathbf{OA}$ avec la verticale descendante :

$$ml\ddot{\theta} = -m^*g \sin \theta$$

Pour les oscillations de faible amplitude, l'équation différentielle précédente est caractéristique d'oscillations sinusoïdales :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \left(\frac{m^*g}{ml}\right)^{1/2}$$

d'où la période propre :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \left(\frac{ml}{m^*g}\right)^{1/2}$$

La mesure de T_0 pour différentes substances (bois, métal, etc.) permet à Newton de tester la proportionnalité de la masse grave et de la masse inerte avec une précision relative de 10^{-3} .

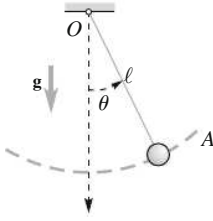


FIG. 10.3.

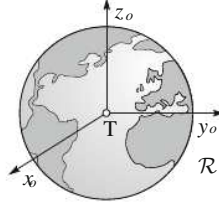
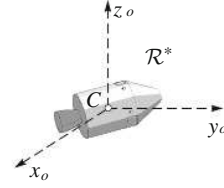


FIG. 10.4.



c) Impesanteur dans une cabine spatiale

Appliquons la loi fondamentale de la dynamique à un corpuscule A , de masse inerte m , par rapport au référentiel de centre de masse $\mathcal{R}^*$ d'une cabine spatiale, en translation quelconque (curviligne) par rapport au référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g = Tx_0y_0z_0$ (Fig. 10.4). Si le corpuscule n'est soumis à aucune force occasionnelle, en dehors de la gravitation, il vient :

$$m\mathbf{a}_{A/\mathcal{R}^*} = m^*\mathcal{G}(A) - m\mathbf{a}_e$$

Or $\mathbf{a}_e$ est relié au champ de gravitation au $\mathcal{G}(C)$ au centre de masse C de la cabine. En effet, le théorème du centre de masse appliqué à la cabine, de masse inerte M et de masse grave M^* donne :

$$M\mathbf{a}_C = M^*\mathcal{G}(C) \quad \text{d'où} \quad \mathbf{a}_{A/\mathcal{R}^*} = \frac{m^*}{m}\mathcal{G}(A) - \frac{M^*}{M}\mathcal{G}(C)$$

Expérimentalement, on constate que $\mathcal{G}(A) \approx \mathcal{G}(C)$ et $\mathbf{a}_A \approx \mathbf{0}$. Il en résulte que :

$$\frac{m^*}{m} \approx \frac{M^*}{M}$$

d) Expériences d'Eötvös et de Dicke

Dans les expériences d'Eötvös et de Dicke, un pendule de torsion est en équilibre dans le référentiel du laboratoire. La première, celle d'Eötvös, date de 1890. Nous allons décrire celle de Dicke plus récente : trois masses identiques A_1 , A_2 , A_3 , placées aux sommets d'un triangle équilatéral matériel, constitué de trois tiges en quartz, forment un pendule de torsion (Fig. 10.5). Une telle configuration rend le dispositif peu sensible aux variations du champ de gravitation. L'ensemble est suspendu verticalement à l'aide d'un fil de suspension en quartz.

À l'équilibre, le moment, au centre de masse C , de toutes les actions, forces de gravitation $m^*\mathcal{G}$ et forces d'inertie $-m\mathbf{a}_e$, est nul :

$$\mathbf{M}_C = \sum_{i=1}^3 \mathbf{CA}_i \times (m_i^*\mathcal{G}_i - m_i\mathbf{a}_{e,i}) = \sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{CA}_i \times \left(\frac{m_i^*}{m_i} \mathcal{G}_i - \mathbf{a}_{e,i} \right) = \mathbf{0}$$

Si l'on remplace A_3 par un corps B_3 , de même masse mais de matériau différent, le moment $\mathbf{M}_C$ devient :

$$(\mathbf{M}_C)_B = \sum_{i=1}^2 m_i \mathbf{CA}_i \times \left[\left(\frac{m_i^*}{m_i} \right) \mathcal{G}_i - \mathbf{a}_{e,i} \right] + m_3 \mathbf{CB}_3 \times \left[\left(\frac{m_3^*}{m_3} \right) \mathcal{G}_3 - \mathbf{a}_{e,3} \right]$$

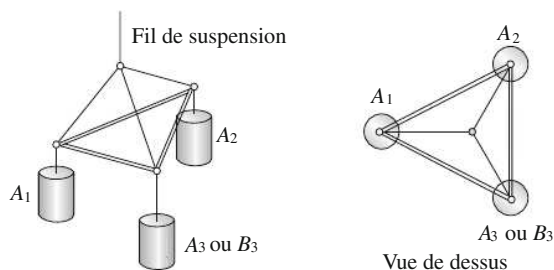


FIG. 10.5.

soit, en tenant compte de l'équilibre précédent :

$$(\mathbf{M}_C)_B = m_3 \mathbf{CA}_3 \times \eta \mathbf{G}_3 \quad \text{avec} \quad \eta = \left(\frac{m_3^*}{m_3} \right)_B - \left(\frac{m_3^*}{m_3} \right)_A$$

Expérimentalement, Dicke et ses collaborateurs ont pu établir que le facteur η valait, pour l'aluminium et l'or :

$$\eta = (1,3 \pm 1) \times 10^{-11}$$

On en conclut que le rapport m^*/m ne dépend pas du matériau considéré : les masses grave et inerte sont des grandeurs proportionnelles. En utilisant la même unité pour mesurer ces deux grandeurs, on conclut à leur *égalité* :

$$m^* = m$$

Les mesures les plus récentes faites sur des corps en chute libre ou sur les « chutes » de la Terre et de la Lune sur le Soleil donnent des précisions relatives de 10^{-12} et 10^{-13} , respectivement.

Remarque : Plusieurs projets expérimentaux sont prévus pour tester l'égalité entre les masses grave et inerte, et donc la RG. Citons notamment, MICROSCOPE (pour MICRO Satellite à traînée Compensée pour l'Observation du Principe d'Équivalence), qui implique le CNES et l'ONERA en France ; il s'agit de mettre en évidence, sur des objets embarqués sur satellite, une violation du principe d'équivalence, grâce à une précision relative de 10^{-15} . Certains physiciens pensent qu'une violation du principe d'équivalence, à un niveau très faible, constituerait un premier indice confortant la Théorie des Cordes, laquelle apparaît actuellement comme l'une des rares tentatives crédibles d'unification de la RG et de la Quantique.

I. 3. — Analogie et différence entre forces d'inertie et force de gravitation

a) Analogie

Le résultat précédent n'est pas du tout banal puisque, parmi toutes les forces qui peuvent modifier le mouvement d'une particule, seules la force de gravitation et les forces d'inertie ont la propriété d'être proportionnelles à la masse. Par exemple, la force électromagnétique qui s'exerce sur une particule, de charge électrique q , est indépendante de la masse d'inertie.

La force de gravitation possède donc, comme les forces d'inertie, le caractère exceptionnel d'être proportionnelle à la masse inerte. Il en résulte la possibilité de compenser le champ de gravitation par le champ d'accélération produit par la force d'inertie d'entraînement. Par exemple dans le référentiel du

centre de masse d'une cabine spatiale, la loi fondamentale de la dynamique, appliquée à un corpuscule A , donne (Fig. 10.4) :

$$\mathbf{a}_A^* = \mathcal{G}(A) - \mathcal{G}(C)$$

On voit que, localement c'est-à-dire dans le voisinage du centre de masse, la compensation des champs est réalisée. La différence résiduelle $\mathcal{G}(A) - \mathcal{G}(C)$, qui exprime la non-uniformité du champ de gravitation produit par la Terre en différents points de la cabine spatiale, est à l'origine d'un phénomène de *marées*, analogue aux marées océaniques qui sont dues, rappelons-le, à la non-uniformité du champ de gravitation produit par la Lune et le Soleil en différents points de la Terre (cf. *Mécanique*).

b) Différence

Il existe une différence importante entre la force de gravitation et la force d'inertie d'entraînement : la première s'évanouit lorsque la distance entre les corps en interaction augmente infiniment, tandis que la seconde augmente lorsqu'on s'éloigne de l'axe de rotation. Cette différence montre que c'est seulement dans une zone réduite de l'espace que le champ de gravitation peut être compensé par un champ d'accélération. Quant à la force d'inertie de Coriolis, elle présente moins d'intérêt puisqu'elle s'annule dans tous les référentiels en mouvement de translation ou lorsque le point matériel est immobile dans le référentiel non galiléen considéré.

I. 4. — Équations du champ et du potentiel de gravitation

Dans la théorie newtonienne de la gravitation, le champ de gravitation $\mathcal{G}$ présente deux propriétés : il dérive d'un potentiel Φ et satisfait à l'équation de Poisson dans laquelle apparaît la densité volumique de masse ρ (cf. *Mécanique*) :

$$\mathcal{G} = -\text{grad } \Phi \quad \text{et} \quad \text{div } \mathcal{G} = -4\pi G\rho \quad \text{d'où} \quad \Delta\Phi = 4\pi G\rho$$

Ces équations sont analogues à celles du champ et du potentiel électrique V qui découlent des équations de Maxwell en régime stationnaire (cf. chapitre 8).

II. — INVARIANCE DE LA FORME DES LOIS DE LA PHYSIQUE

II. 1. — Apparence du caractère privilégié des référentiels galiléens

Dans ses publications originales de 1915 et 1916 sur les fondements de la théorie de la relativité générale, Einstein souleva d'emblée le problème de l'origine du caractère privilégié des référentiels galiléens, tels qu'ils sont introduits en relativité newtonienne, et confortés en relativité restreinte.

Pour établir la simple apparence de ce caractère privilégié, il considère deux corps déformables, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$, de même taille et de même nature, formant un système très éloigné de tout autre masse, le premier $\mathcal{S}$ au repos par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}$ et le second $\mathcal{S}'$, tel que chacun de ses points ait un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe, par exemple Oz (Fig. 10.6) ; les seules interactions à prendre en compte sont les forces de gravitation mutuelle. On constate que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ se comportent différemment : alors que le premier a la forme d'une sphère, le second a celle d'un ellipsoïde.

En mécanique newtonienne, on attribue cette différence observée au caractère privilégié de $\mathcal{R}$ galiléen comparé au référentiel $\mathcal{R}'$, dans lequel $\mathcal{S}'$ est au repos, et qui est en rotation par rapport à $\mathcal{R}$, autour de Oz ; en effet, dans $\mathcal{R}'$, apparaissent des forces d'inertie d'entraînement centrifuge qui aplattissent $\mathcal{S}'$ suivant l'axe de rotation.

Selon Einstein, cette cause purement fictive cache une vraie cause, située en dehors du système des deux corps et liée à l'ensemble des masses très éloignées de S et S' . En ce sens, il conforte Mach, lorsque ce dernier affirmait, dès 1903, que, contrairement à l'analyse de Newton, les faits observés ne conduisent en réalité qu'à des mouvements relatifs de corps par rapport à d'autres corps, pris comme référence.

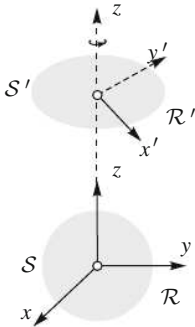


FIG. 10.6.

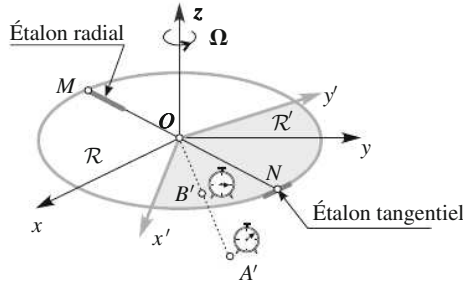


FIG. 10.7.

II. 2. — Systèmes de coordonnées

Le concept de référentiel quadridimensionnel, introduit en relativité newtonienne et en relativité restreinte, doit être abandonné en relativité générale, au profit d'un *système de quatre coordonnées* spatio-temporelles, x_0, x_1, x_2, x_3 , plus général, qui permette de constater essentiellement la coïncidence ou non des coordonnées d'événements différents.

En effet, un référentiel suppose un ensemble de points de l'espace invariablement liés entre eux et pouvant être infiniment éloignés les uns des autres. Il en résulte des problèmes concernant la vitesse de certains points suffisamment éloignés d'un centre de rotation, la mesure des durées, ainsi que celles des longueurs dans ces référentiels. Pour s'en convaincre, considérons un référentiel $\mathcal{R}' = Ox'y'z'$ tournant autour de l'axe Oz , par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R} = Oxyz$ (Fig. 10.7a).

i) Un point A' , suffisamment éloigné du centre de rotation O , peut atteindre et dépasser la vitesse de la lumière, puisque $v_{A'} = \Omega OA'$.

ii) On ne peut pas associer un seul temps à $\mathcal{R}'$. En effet, deux horloges $H'_{A'}$ et $H'_{B'}$ de $\mathcal{R}'$, placées respectivement aux points distincts A' et B' , ne peuvent pas être synchronisées, puisqu'elles sont en mouvement relatif l'une par rapport à l'autre (Fig. 10.7b); pour un observateur de $\mathcal{R}$, l'horloge la plus éloignée de l'axe de rotation, de vitesse plus grande, subira un ralentissement plus élevé (cf. chapitre 3).

iii) On ne peut pas non plus associer un seul étalon de longueur à $\mathcal{R}'$. Radialement l'étalon ne subit pas de contraction, alors que tangentiellement, il en subit une. Il en résulte que le rapport entre le périmètre d'un cercle, de centre O , et son diamètre est différent de π dans $\mathcal{R}'$: dans ce dernier, la mesure du diamètre donne D , comme dans $\mathcal{R}$, puisque le segment MN est comparé à un étalon inchangé; en revanche, la mesure du périmètre dans $\mathcal{R}'$ donne une valeur supérieure à L , car elle est le rapport de la longueur du cercle dans $\mathcal{R}'$, qui vaut aussi L , sur celle contractée de l'étalon en mouvement car porté tangentiellement au cercle (Fig. 10.7).

II. 3. — Équivalence locale d'un champ de gravitation et d'un champ d'accélération

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, une masselotte tombe en *chute libre*, c'est-à-dire qu'elle est soumise à la seule action du champ de gravitation $\mathcal{G}$. Son mouvement, étudié par un observateur de $\mathcal{R}$,

est caractérisé par une accélération $\mathcal{G}$ (Fig. 10.8a). En effet, cette dernière est donnée par la loi fondamentale de Newton si, comme c'est le cas, la vitesse reste négligeable devant c :

$$m \mathbf{a} = m^* \mathcal{G} \quad \text{d'où} \quad \mathbf{a} = \mathcal{G} \quad \text{puisque} \quad m = m^*$$

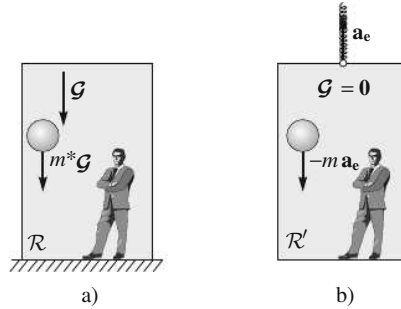


FIG. 10.8.

Un observateur d'un référentiel $\mathcal{R}'$, en translation accélérée par rapport à $\mathcal{R}$, avec l'accélération d'entraînement $\mathbf{a}_e = -\mathcal{G}$, dans lequel le champ de gravitation serait nul, observerait le même mouvement accéléré d'un corpuscule A , abandonné sans vitesse initiale par rapport à $\mathcal{R}'$ (Fig. 10.8 b). En effet, la loi fondamentale appliquée à A , par rapport à $\mathcal{R}'$ non galiléen, donnerait :

$$m \mathbf{a} = -m \mathbf{a}_e = m \mathcal{G} \quad \text{d'où} \quad \mathbf{a} = \mathcal{G}$$

Ainsi, en raison de l'égalité des masses grave et inerte, on peut compenser la force de gravitation par la force d'inertie d'entraînement, c'est-à-dire neutraliser un champ de gravitation par un champ d'accélération, d'où l'équivalence entre un champ d'accélération et un champ de gravitation.

Il convient cependant de souligner que cette compensation, qui est exacte dans le cas particulier considéré, ne peut l'être dans le cas général, puisque les comportements à grande distance du champ de gravitation et du champ d'accélération sont fondamentalement différents : le premier s'effondre à grande distance contrairement au second. Aussi énonce-t-on le principe d'équivalence sous la forme suivante :

Aucune expérience de physique ne peut révéler de différence entre un laboratoire local accéléré dans l'espace et son analogue soumis à un champ de gravitation.

Remarque : En toute rigueur, dans le voisinage de la surface de la Terre, le champ de gravitation $\mathcal{G}$ doit être remplacé par le champ de pesanteur $\mathbf{g}$, lequel est une combinaison de $\mathcal{G}$ et de l'accélération d'entraînement terrestre, mais on sait que $\mathbf{g} \approx \mathcal{G}$ avec une bonne approximation (cf. *Mécanique*).

II.4. — Référentiels naturels ou référentiels inertiels

En dynamique newtonienne, comme en dynamique einsteinienne, ce qui distingue les référentiels galiléens de ceux qui ne le sont pas, ce sont les forces d'inertie, lesquelles sont, comme la force de gravitation, proportionnelles à la masse. Aussi a-t-il paru naturel à Einstein de chercher les raisons du caractère privilégié des référentiels galiléens dans l'analyse de la formulation newtonienne habituelle de l'interaction gravitationnelle.

Rappelons que, pour expliquer le mouvement des planètes autour du Soleil, Newton admit que celles-ci étaient soumises, dans le référentiel galiléen lié au système solaire, à la force de gravitation

exercée par le Soleil (cf. *Mécanique*). Bien que les résultats obtenus aient été remarquables, au point de permettre l'invention de la planète Neptune par Le Verrier, avant sa découverte en 1846 par Galles, Einstein songea à une autre interprétation fondée sur l'introduction de référentiels plus adaptés à l'analyse du mouvement d'un corps dans un champ de gravitation.

Selon Einstein, pour étudier *localement* la chute libre d'un corps, dans un champ de gravitation, le référentiel *naturel* à utiliser n'est pas le référentiel terrestre $\mathcal{R}$, mais celui $\mathcal{R}'$ qui *tombe* avec le corps, c'est-à-dire celui qui a un mouvement de translation, avec une accélération $\mathcal{G}$, par rapport à $\mathcal{R}$. Dans $\mathcal{R}'$, le mouvement du corps satisfait au principe de l'inertie. En effet, appliquons la loi fondamentale de la dynamique à un corpuscule A dans $\mathcal{R}'$. Il vient, en tenant compte de la force d'inertie d'entraînement et d'une force occasionnelle $\mathbf{F}_{oc}$:

$$m\mathbf{a}_{A/\mathcal{R}'} = m\mathcal{G} - m\mathbf{a}_e + \mathbf{F}_{oc} = \mathbf{F}_{oc} \quad \text{puisque} \quad \mathcal{G} = \mathbf{a}_e$$

Aussi, le référentiel $\mathcal{R}'$, dans lequel le principe de l'inertie peut être réalisé, est-il appelé *référentiel inertiel*.

De même, le référentiel naturel $\mathcal{R}'$ à adopter pour étudier *localement* le mouvement d'un corpuscule, dans le champ de gravitation produit par la Terre, à grande distance du sol, est une cabine spatiale qui est soumise pratiquement au même champ de gravitation que le point considéré (Fig. 10.4). La cabine forme alors un référentiel inertiel.

Formulées dans les référentiels inertiels, pour lesquels la force de gravitation est compensée par la force d'inertie d'entraînement, les lois de la physique gardent une même forme par changement quelconque de référentiel. Choisir un référentiel inertiel plutôt qu'un référentiel galiléen revient à compenser la gravitation par des forces d'inertie, et donc à prendre en compte la gravitation, non pas sous la forme d'une force d'interaction, mais sous celle d'une modification de la structure de l'espace-temps.

Dans le cas général, l'introduction des référentiels inertiels locaux, plus précisément de systèmes locaux de coordonnées permet d'écrire les lois de la physique sous une *forme invariante* ; cette formulation locale s'appuie naturellement sur le calcul tensoriel (cf. Annexe 2).

II.5. — Principe de relativité générale

Cette analyse préalable d'Einstein l'a conduit à généraliser le principe de relativité restreinte, sous la forme suivante :

Les lois de la physique doivent être valables par rapport à des systèmes de coordonnées en mouvement quelconque les uns par rapport aux autres.

Soulignons que cette validité des lois de la physique dans tout système de référence ne signifie pas, comme en relativité restreinte, une écriture identique, mais seulement une *forme universelle* qui légitime tous les systèmes de référence, et exclut tout privilège accordé à une famille d'entre eux ; l'écriture concrète des lois diffèrera selon le système de référence.

Remarque : Comme en relativité restreinte, on peut dire, ici aussi, que le nom de relativité générale incite au contresens, car il s'agit en fait, pour Einstein, de proposer une nouvelle théorie de la gravitation en relation avec la structure de l'espace-temps.

II.6. — Courbure de l'espace-temps

Nous sommes ainsi conduits à étudier le mouvement des corps dans des systèmes de référence dans lesquels la gravitation est prise en compte sous la forme d'une modification des facteurs qui caractérisent

la métrique spatio-temporelle. En RR, où la gravitation est ignorée, les facteurs de la métrique sont uniformes et valent ± 1 . Rappelons l'écriture du carré de l'intervalle élémentaire :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

ce qui s'écrit aussi, en utilisant la notation tensorielle avec la règle de sommation d'Einstein (cf. Annexe 2) :

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad \text{avec} \quad dx^0 = c dt \quad dx^1 = dx \quad dx^2 = dy \quad \text{et} \quad dx^3 = dz$$

Les facteurs g_{ij} , qui sont au nombre de 10 (4 avec les deux indices i et j identiques et 6 avec les deux indices différents), sont nuls pour $i \neq j$, valent 1 pour la coordonnée temporelle x^0 et -1 pour les coordonnées spatiales x^1 , x^2 et x^3 :

$$g_{ij} = 1 \quad \text{pour} \quad i = j = 0 \quad \text{et} \quad g_{ij} = -1 \quad \text{pour} \quad i = j = 1, 2, 3$$

En RG, où l'on prend en compte l'interaction gravitationnelle, cette dernière apparaît, non pas sous la forme d'une force, mais par l'intermédiaire des facteurs g_{ij} de la métrique, lesquels ne sont plus uniformes mais dépendent localement du champ de gravitation. On dit que l'espace-temps n'est plus plat, mais qu'il est *courbé* par la gravitation.

II. 7. — Trajectoire dans l'espace-temps

Une image simpliste mais efficace permet d'illustrer le point de vue de la RG comparé à celui de la RR. Dans ce dernier cadre, le mouvement de révolution de la Terre autour du Soleil peut être représenté par celui du centre de masse T de la Terre orbitant autour du centre de masse S du Soleil, sous l'action de la force de gravitation (Fig. 10.19a). En RG, la grosse masse S modifie l'espace-temps en le courbant : l'espace prend la forme d'une cuvette, comme le ferait une nappe en caoutchouc souple au milieu de laquelle on aurait placé une grosse masse ; la planète T , soumise à *aucune* interaction, autre que la gravitation, a alors dans le voisinage de S une trajectoire circulaire autour de S (Fig. 10.19b).

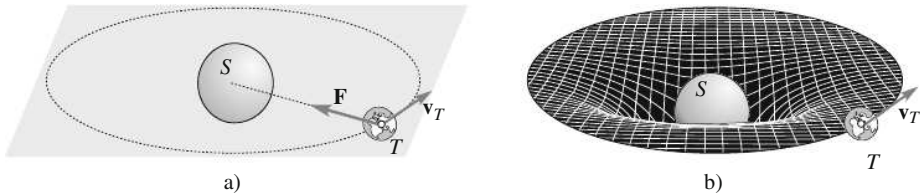


FIG. 10.9.

Dans l'espace-temps modifié par une grosse masse, la trajectoire d'une particule est celle qui réalise une valeur extrême, généralement minimale, de l'intervalle entre deux points de l'espace-temps. On dit que la trajectoire de la particule est une *géodésique* de l'espace-temps (cf. Annexe 2).

Lorsque l'intervalle est nul, la trajectoire est celle de particules de masse nulle, par exemple un photon. Une telle trajectoire, influencée par la présence de la grosse masse qui détermine l'espace-temps, n'est donc pas rectiligne. Ainsi, contrairement à ce que laisse supposer l'expression de la force de gravitation universelle de Newton, la relativité générale prévoit une influence de la gravitation sur les photons.

Traduite en termes de force, l'analyse d'Einstein prédit une force de gravitation entre une masse M au point S et un photon P d'énergie $\mathcal{E}_\gamma = h\nu$, se déplaçant à la vitesse c selon la direction SP , de la forme :

$$\mathbf{F}_{S \rightarrow P} = -G \frac{(\mathcal{E}_\gamma / c^2) M}{r^2} \mathbf{e}_r \quad \text{avec} \quad r = SP \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{SP}}{r}$$

Remarques : 1) Notons que la masse m du corpuscule dont on cherche le mouvement, dans un environnement influencé par les autres masses, participe elle-même à la définition de l'espace-temps. Cette contribution ne joue pas de rôle significatif dans l'hypothèse où cette masse m est négligeable devant celle M de l'environnement ; seule cette dernière est alors déterminante dans la définition de la métrique de l'espace-temps.

2) Certains astrophysiciens n'ont pas hésité à proposer d'utiliser cette modification de l'espace-temps par la matière, pour envisager des voyages intersidéraux, entre points distants de plusieurs milliers d'années-lumière, pendant des durées de quelques années seulement pour les cosmonautes. Cependant, en dehors de problèmes techniques difficilement surmontables, ce type de modification semble remettre en cause un principe de base admis en physique, le principe de causalité, selon lequel l'effet doit nécessairement suivre la cause qui le produit.

Du point de vue quantitatif, la trajectoire d'une particule, de masse m , dans l'espace-temps, peut être obtenue, comme en relativité restreinte, à partir du lagrangien et du principe de moindre d'action. Rappelons que ce dernier s'écrit, pour une particule libre, qui n'est pas soumise à un champ électromagnétique (cf. chapitre 9) :

$$\delta S = 0 \quad \text{avec} \quad S = \int_1^2 \mathcal{L} dt = \int_1^2 -\frac{mc^2}{\gamma} dt = -mc \int_1^2 \frac{c}{\gamma} dt = -mc \int_1^2 ds$$

puisque $ds = c d\tau = c dt/\gamma$.

En RG, l'écriture est la même puisque le champ de gravitation est pris en compte dans la structure de l'espace-temps.

II.8. — Formulation locale invariante d'Einstein

Dans la formulation locale invariante d'Einstein, les lois du mouvement d'un corps dans l'espace-temps se présentent sous la forme d'une équation de proportionnalité entre un *tenseur géométrique* G_{ij} , associé à la courbure de l'espace-temps produite par le corps, homogène à l'inverse d'une surface, et un *tenseur énergie-quantité de mouvement* E_{ij} associé au corps, homogène à une énergie volumique :

$$G_{ij} = \kappa E_{ij} \quad \text{avec} \quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \approx 2,069 \times 10^{-43} \text{ N}^{-1}$$

G étant la constante de Newton et c celle d'Einstein. Une simple analyse dimensionnelle montre que κ est homogène à l'inverse d'une force.

La composante $i = 0$ et $j = 0$ de l'égalité tensorielle précédente permet de restituer l'équation de Poisson bien connue à laquelle satisfait le potentiel de gravitation Φ (cf. *Mécanique*) :

$$\Delta\Phi = 4\pi G \rho$$

Δ étant l'opérateur laplacien et ρ la masse volumique. En effet, cette dernière apparaît dans E_{00} , qui vaut ρc^2 (énergie volumique de masse), ce qui modifie les coefficients g_{ij} de la métrique, notamment g_{00} .

Pour trouver g_{00} , il suffit d'exprimer l'action S en fonction du lagrangien, comme on l'a déjà fait plus haut, mais en ajoutant, au terme c/γ , la contribution du potentiel de gravitation Φ/c . Il vient :

$$ds = \left(\frac{c}{\gamma} + \frac{\Phi}{c} \right) dt = c dt \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\Phi}{c^2} \right)$$

ce qui donne, en élevant au carré, en première approximation :

$$ds^2 \approx c^2 dt^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} + 2 \frac{\Phi}{\gamma c^2} \right) \approx c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + 2 \frac{\Phi}{c^2} \right) = c^2 dt^2 \left(1 + 2 \frac{\Phi}{c^2} \right) - dr^2$$

puisque $dr = v dt$. On en déduit :

$$g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \quad \text{d'où} \quad \Delta g_{00} = 2 \frac{\Delta \Phi}{c^2}$$

en considérant le laplacien, comme le suggère l'équation de Poisson. On retrouve cette dernière en identifiant G_{00} à Δg_{00} . En effet :

$$G_{00} = \kappa E_{00} \quad \text{donne} \quad \Delta g_{00} = 2 \frac{\Delta \Phi}{c^2} = \frac{8\pi G}{c^4} \rho c^2 \quad \text{et donc} \quad \Delta \Phi = 4\pi G \rho$$

Remarque : Dans son travail original, Einstein introduisit, non pas $8\pi G/c^4$, mais $8\pi G/c^2$, qui vaut $1,87 \times 10^{-26} \text{ m.kg}^{-1}$, car le « tenseur énergie-quantité de mouvement » qu'il utilisait était divisé par c^2 .

III. — PARTICULE DANS LE VOISINAGE D'UNE GROSSE MASSE

Cette étude présente un intérêt multiple. D'abord, elle est un exemple d'illustration du point de vue de la RG. Ensuite, appliquée à la planète Mercure, elle permet d'interpréter l'avance du périhélie de cette planète. Enfin, dans le cas des photons ($m = 0$), elle permet de prédire la valeur de la déviation par le Soleil d'un rayon lumineux provenant d'une étoile éloignée.

III. 1. — Métrique de Schwarzschild

Lorsqu'une particule A , de masse m , se trouve dans le champ de gravitation produit par une distribution de masse *sphérique, uniforme*, de centre S , de masse $M \gg m$ (Fig. 10.10), on admet selon la RG que A évolue *librement* dans un espace dont la métrique d'espace-temps est la suivante :

$$ds^2 = g_{00} c^2 dt^2 + g_{11} dr^2 + g_{22} d\theta^2 + g_{33} d\varphi^2$$

avec :

$$g_{00} = 1 - \frac{r_S}{r} \quad g_{11} = -\frac{1}{1 - r_S/r} \quad g_{22} = -r^2 \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta \quad \text{et} \quad r_S = \frac{2GM}{c^2}$$

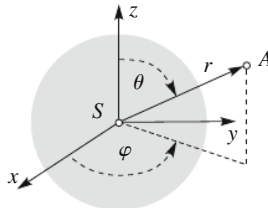


FIG. 10.10.

Remarque : Notons que les coefficients g_{ij} n'ont pas tous la même dimension physique : g_{00} et g_{11} sont des facteurs (sans dimension), alors que g_{22} et g_{33} sont homogènes à une surface.

Cette métrique fut introduite en 1916 par le physicien allemand K. Schwarzschild ; aussi est-elle appelée la métrique de Schwarzschild, et r_S le *rayon de Schwarzschild*. Elle s'écrit donc :

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{r_S}{r} \right) dt^2 - \frac{1}{1 - r_S/r} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

On retrouve évidemment l'espace plat de la RR, en annulant la constante de gravitation, c'est-à-dire en faisant $r_S = 0$:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

Calculons r_S pour le Soleil :

$$r_S = \frac{2GM_S}{c^2} = \frac{2 \times 6,67 \times 10^{-11} \times 1,99 \times 10^{30}}{9 \times 10^{16}} = 2,94 \times 10^3 \approx 3 \text{ km}$$

On peut en déduire la courbure de l'espace-temps produite par le Soleil S , dans le voisinage de planètes telles que la Terre T et Mercure M . Comme $ST = 1,49 \times 10^{11} \text{ m}$ et $SM/ST = 0,39$, il vient :

$$\frac{r_S}{ST} = \frac{2,94 \times 10^3}{1,49 \times 10^{11}} \approx 2 \times 10^{-8} \quad \text{et} \quad \frac{r_S}{SM} = \frac{2,94 \times 10^3}{0,391,49 \times 10^{11}} \approx 5 \times 10^{-8}$$

Lorsque la distribution de masse a la *symétrie sphérique*, les variables angulaires θ et φ ne jouent aucun rôle ; on peut alors réduire la métrique à :

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{r_S}{r} \right) dt^2 - \frac{1}{1 - r_S/r} dr^2$$

III.2. — Troux noirs

Le concept de trou noir fut introduit dès 1784 par le révérend anglais J. Michell, puis repris et vulgarisé par le français P. Laplace, à l'aide de la notion de vitesse de libération ou d'évasion (cf. *Mécanique*). On sait que cette dernière s'introduit naturellement en mécanique newtonienne lorsqu'on étudie le mouvement d'une particule dans le voisinage du champ de gravitation produit par un corps sphérique. Si la masse M de ce dernier est suffisamment grande ou son rayon suffisamment faible, la valeur de la vitesse de libération dépasse celle de la lumière. Dans le voisinage du corps, aucune particule ne peut donc se libérer complètement de l'attraction gravitationnelle, même pas une particule de lumière. Aussi un tel corps est-il appelé *trou noir*. Michell a même obtenu, à partir d'un raisonnement newtonien (!), l'expression du rayon de Schwarzschild r_S . On a, en effet, en introduisant la constante de l'interaction gravitationnelle $K = -GMm$:

$$\frac{mv_l^2}{2} + \frac{K}{r} = 0 \quad \text{soit} \quad v_l = \left(\frac{2GM}{r} \right)^{1/2}$$

On en déduit :

$$v_l > c \quad \text{si} \quad r \leq \left(\frac{2GM}{c^2} \right)^{1/2} \quad \text{ou} \quad r \leq r_S$$

On retrouve ce même résultat, dans le cadre naturel de la RG, en cherchant la trajectoire d'une particule de lumière, de masse nulle, à l'extérieur d'un corps attractif. En effet, on obtient, en imposant à l'intervalle ds une valeur nulle (géodésique nulle) :

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{r_S}{r} \right) dt^2 - \frac{1}{1 - r_S/r} dr^2 = 0 \quad \text{d'où} \quad c dt = \pm \frac{dr}{1 - r_S/r}$$

Ainsi, dans l'espace-temps courbé par un champ de gravitation, la lumière se déplace à une vitesse radiale différente de la constante d'Einstein c et d'expression :

$$c_l = c \left(1 - \frac{r_S}{r} \right) = c \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)$$

Lorsque r_S est négligeable devant r , cette équation permet de retrouver la relation newtonienne bien connue $dr = c dt$, laquelle exprime la propagation de la lumière dans le vide à la vitesse c , malgré la présence d'un corps attractif :

$$\frac{dr}{dt} = c \left(1 - \frac{r_S}{r} \right) \approx c$$

En revanche, si r_S n'est pas négligeable devant r , la lumière se propage avec une vitesse affaiblie :

$$\frac{dr}{dt} = c \left(1 - \frac{r_S}{r} \right)$$

Dans le cas extrême où $r = r_S$, cette vitesse s'annule : la lumière ne peut s'extraire de l'attraction gravitationnelle du corps attractif ; ce dernier est alors un trou noir. La contraction gravitationnelle continue d'un trou noir n'a été établie qu'en 1939 par R. Oppenheimer et H. Snyder.

Remarque : Les astrophysiciens pensent avoir localisé au cœur de notre galaxie, la Voie Lactée, un trou noir plusieurs millions de fois plus massif que le Soleil.

III. 3. — Problème de Kepler en relativité générale

Étudions le mouvement d'un corpuscule, de masse m , dans le voisinage d'une distribution de masse M , à symétrie sphérique, telle que $M \gg m$. C'est par exemple celui du centre de la planète Mercure dans son mouvement de révolution autour du Soleil.

Comme en mécanique newtonienne, ce mouvement est plan car le moment cinétique est constant (cf. chapitre 5). On peut donc choisir la coordonnée θ de telle sorte que le plan du mouvement soit celui défini par $\theta = \pi/2$. La métrique est alors :

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 \left(1 - \frac{r_S}{r} \right) dt^2 - \frac{1}{1 - r_S/r} dr^2 - r^2 d\varphi^2$$

Pour un observateur, de coordonnées spatiales fixées ($dr = 0$ et $d\varphi = 0$), la relation entre le temps propre τ et le temps t qu'il mesure est alors la suivante :

$$d\tau = \left(1 - \frac{r_S}{r} \right)^{1/2} dt$$

ce qui n'a de sens évidemment que pour $r > r_S$. Avec la métrique précédente, la vitesse par rapport à l'observateur a pour expression :

$$\mathbf{v} = \frac{1}{(1 - r_S/r)^{1/2}} \frac{dr}{d\tau} \mathbf{e}_r + \frac{r d\varphi}{d\tau} \mathbf{e}_\varphi = \frac{\dot{r}}{1 - r_S/r} \mathbf{e}_r + \frac{r\dot{\varphi}}{(1 - r_S/r)^{1/2}} \mathbf{e}_\varphi$$

Remarque : En faisant $r_S = 0$, on retrouve évidemment les expressions relatives à l'espace plat de la relativité restreinte :

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r\dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad \text{et} \quad \mathcal{E} = \gamma mc^2$$

Quant à l'énergie, elle devient :

$$\mathcal{E} = \gamma mc^2 \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{1/2}$$

afin de prendre en compte l'énergie potentielle newtonienne de gravitation dans la géométrie de l'espace-temps ; c'est ce que l'on peut vérifier en faisant $r_S \ll r$ et $v \ll c$ dans cette nouvelle expression de l'énergie :

$$\mathcal{E} = \gamma mc^2 \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{1/2} \approx \gamma mc^2 \left(1 - \frac{r_S}{2r}\right) = \gamma mc^2 - G \left(\frac{\gamma m M}{r}\right) \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2} - \frac{GmM}{r} = \gamma mc^2 - G \frac{\gamma m M}{r}$$

soit :

$$\mathcal{E} \approx \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p + mc^2 \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_k = (\gamma - 1)mc^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_p = -G \frac{\gamma m M}{r}$$

Remarque : L'énergie potentielle de gravitation entre le corpuscule et la distribution de masse ne diffère de celle non relativiste que par le facteur relativiste γ qui affecte m .

Le moment cinétique a pour expression :

$$\mathbf{L} = \mathbf{OA} \times \mathbf{p} = r \mathbf{e}_r \times \gamma m \left[\frac{\dot{r}}{1 - r_S/r} \mathbf{e}_r + \frac{r\dot{\varphi}}{(1 - r_S/r)^{1/2}} \mathbf{e}_\varphi \right] = L \mathbf{e}_z \quad \text{où} \quad L = \frac{\gamma m r^2 \dot{\varphi}}{(1 - r_S/r)^{1/2}}$$

$\mathbf{e}_z$ étant le vecteur unitaire normal au plan du mouvement.

Proposons-nous d'établir l'équation différentielle du mouvement d'une planète autour du Soleil. On a la relation suivante :

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \quad \text{d'où} \quad v^2 = c^2 \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}$$

ce qui donne, en remplaçant v^2 par son expression, en fonction des coordonnées polaires r et φ :

$$c^2 \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} = \frac{\dot{r}^2}{(1 - r_S/r)^2} + \frac{r^2 \dot{\varphi}^2}{(1 - r_S/r)}$$

Si, comme en mécanique newtonienne, on introduit la variable de Binet $u = 1/r$, on obtient (cf. *Mécanique*) :

$$r^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{L^2}{\gamma^2 m^2 r^2} \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) = \frac{L^2}{\gamma^2 m^2} u^2 (1 - ur_S)$$

et :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\varphi} \dot{\varphi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \frac{Lu^2}{\gamma m} (1 - ur_S)^{1/2} = -\frac{L}{\gamma m} \frac{du}{d\varphi} (1 - ur_S)^{1/2}$$

Il vient, en tenant compte des expressions de $r^2 \dot{\varphi}^2$ et $\dot{r}^2$ dans v^2 :

$$\frac{L^2}{\gamma^2 m^2} \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 \frac{1}{1 - ur_S} + \frac{L^2}{\gamma^2 m^2} u^2 = c^2 \left(\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}\right)$$

soit :

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 (1 - ur_S) = \frac{m^2 c^2}{L^2} (\gamma^2 - 1) (1 - ur_S) = \frac{m^2 c^2}{L^2} \left[\frac{\mathcal{E}^2}{m^2 c^4} - (1 - ur_S) \right]$$

En dérivant par rapport à φ et en simplifiant par $2 \, du/d\varphi$, on trouve, puisque $\mathcal{E}$ est constant :

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u(1 - ur_s) - \frac{r_s}{2} u^2 = \frac{m^2 c^2 r_s}{2L^2} = \frac{GMm^2}{L^2}$$

ce qui donne, en simplifiant :

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{GMm^2}{L^2} + \frac{3GM}{c^2} u^2$$

Ainsi l'équation différentielle du mouvement d'une planète, en RG, ne diffère de l'équation newtonienne que par le *terme quadratique* $(3GM/c^2) u^2$, qui est très faible devant u , comme le montre l'application numérique suivante relative à la planète Mercure :

$$\frac{(GM/c^2)u^2}{u} = \frac{GMu}{c^2} = \frac{GM}{rc^2} = \frac{r_s}{2r} = \frac{3 \times 10^3}{2 \times 10^7, 39 \times 1, 49 \times 10^{11}} = 2, 6 \times 10^{-8} \ll 1$$

Notons que la perturbation apportée par la RG à la théorie classique de Newton fait apparaître le rapport sans dimension r_s/r .

On résout l'équation différentielle précédente par approximation, en remplaçant u dans le terme quadratique par la solution u_0 de l'équation approchée :

$$\frac{d^2 u_0}{d\varphi^2} + u_0 = \frac{GMm^2}{L^2} \quad \text{soit} \quad \frac{d^2 u_0}{d\varphi^2} + u_0 = \frac{1}{p} \quad \text{en introduisant} \quad p = \frac{L^2}{GMm^2}$$

comme en mécanique newtonienne (cf. *Mécanique*). Cette équation admet comme solution :

$$u_0 = A \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{p} = \frac{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}{p} \quad \text{en posant} \quad e = Ap$$

Il reste à trouver la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p} + \frac{3GM}{c^2 p^2} [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2$$

Si on néglige le terme proportionnel au carré e^2 de l'excentricité et si l'on tient compte de la forte inégalité $3GM/c^2 p \ll 1$, l'équation précédente se réduit à :

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p} + \frac{6GM}{c^2 p^2} e \cos(\varphi - \varphi_0)$$

Posant $U = u - 1/p$, l'équation précédente devient :

$$\frac{d^2 U}{d\varphi^2} + U = \frac{6GM}{c^2 p} e \cos(\varphi - \varphi_0) \approx \frac{6GM}{c^2 p} U$$

soit :

$$\frac{d^2 U}{d\varphi^2} + \kappa^2 U \approx 0 \quad \text{avec} \quad \kappa^2 = 1 - 6 \frac{GM}{c^2 p}$$

Il en résulte :

$$u - \frac{1}{p} = A \cos[\kappa(\varphi - \varphi_0)] \quad \text{d'où} \quad r = \frac{p}{1 + e \cos[\kappa(\varphi - \varphi_0)]}$$

en posant $e = Ap$. Comme $e < 1$ et $\kappa \approx 1$, la trajectoire est sensiblement une ellipse dont le grand axe tourne, à chaque révolution, d'un angle δ égal à (Fig. 10.11) :

$$\delta = \frac{2\pi}{\kappa} - 2\pi = 2\pi \left[\left(1 - \frac{6GM}{c^2 p} \right)^{-1/2} - 1 \right] \approx \frac{6\pi GM}{c^2 p} = 3\pi \frac{r_s}{p}$$

En fonction de l'excentricité e et du demi-grand axe a , on trouve :

$$\delta \approx \frac{6\pi GM}{c^2 a(1-e^2)} \quad \text{soit aussi} \quad \delta \approx 24\pi^3 \frac{a^2}{c^2 T^2(1-e^2)}$$

en introduisant la période T de révolution newtonienne qui est reliée à a par la relation bien connue $T^2/a^3 = 4\pi^2/(GM)$ (cf. *Mécanique*).

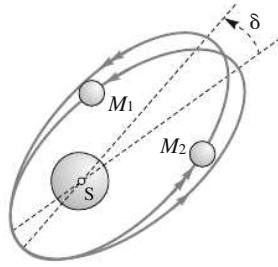


FIG. 10.11.

Cet effet est maximal pour la planète Mercure, la plus proche du Soleil, pour laquelle $e = 0,206$ et $a = 57,9 \times 10^9$ m :

$$r_s = 2,94 \text{ km} \quad p = a(1-e^2) = 55,15 \times 10^9 \text{ m} \quad \text{d'où} \quad \delta = 0,502 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

Exprimée en seconde d'arc ($1'' = 4,85 \mu\text{rad}$), l'avance du périhélie de Mercure, pour une révolution complète, est $\delta = 0,1036''$. La période de révolution du Mercure étant de 87,8 jours, on en déduit l'avance du périhélie de la planète *par siècle* :

$$\frac{\delta \times 100 \times 365,25}{87,8} \approx 43 \text{ secondes d'arc}$$

Sur la figure 10.11, les points M_1 et M_2 représentent deux positions M_1 et M_2 de la planète Mercure.

La première confirmation expérimentale de cette avance fut obtenue en 1915. L'avance du périhélie prévue par la théorie newtonienne, en raison des perturbations dues aux autres planètes, est de $532''$ par siècle, alors que celle mesurée est de $574''$, soit une valeur supérieure de $43''$ précisément. Dans le tableau 10.1, on a rassemblé les valeurs mesurées et celles calculées pour les planètes Mercure, Vénus et la Terre ; la concordance est excellente.

Une telle concordance a été testée plus récemment sur le pulsar PSR 1913 + 16, situé dans la constellation de l'Aigle, à une distance de $1,55 \times 10^{20}$ m. Un pulsar est une étoile à neutrons, c'est-à-dire une étoile très dense qui émet un rayonnement électromagnétique centimétrique associé à son mouvement de rotation propre. Dans ce pulsar, découvert en 1974, par les astrophysiciens américains J. Taylor et A. Hulse, les trains d'ondes émis se succèdent avec une période qui passe de 59 ms à 80 ms, après un cycle de 7,75 heures environ. Cette modification de la période d'émission fut attribuée à l'existence d'un compagnon qui forme avec le pulsar initial un système à deux corps dont le mouvement, dans le référentiel du centre de masse, est une ellipse décrite précisément en 7,75 h. Comme ces étoiles sont très denses, les effets de la gravitation sont importants ; ce test décisif conforta l'analyse relativiste, ce qui valut à leurs auteurs le prix Nobel en 1993.

	Avance séculaire du périhélie en secondes d'arc	
Planète	Valeurs mesurées	Valeurs calculées
Mercure	$43,11 \mp 0,45$	43,03
Vénus	$8,4 \mp 4,8$	8,6
Terre	$5,0 \mp 1,2$	3,8

TAB. 10.1.

Remarque : À la fin du XIX^e siècle, on tenta d'expliquer l'avance du périhélie de Mercure par la présence d'une planète située entre le Soleil et Mercure ; on donna même le nom de Vulcain à cette planète hypothétique. Cette méthode, qui permit à Le Verrier d'inventer Neptune avant sa découverte à partir du mouvement d'Uranus, ne donna jamais aucun résultat avec Mercure (cf. *Mécanique*). Rappelons que le traitement de ce problème, dans le cadre de la RR, avec la gravitation considérée comme une force, donne aussi une avance du périhélie de Mercure, mais beaucoup trop faible (cf. chapitre 5).

III. 4. — Déviation des rayons lumineux par un champ de gravitation

a) Rayon lumineux perpendiculaire à un champ de gravitation

Dans un référentiel inertiel, par exemple le référentiel $\mathcal{R}_n$ défini par une cabine d'ascenseur en chute libre par rapport au référentiel terrestre galiléen $\mathcal{R}$, d'accélération $\mathbf{a} = \mathcal{G}$, un observateur envoie un faisceau lumineux dans une direction horizontale, perpendiculaire au champ $\mathcal{G}$ (Fig. 10.12). La trajectoire de la lumière dans $\mathcal{R}_n$ est la droite horizontale SR qui relie la source S au récepteur R , tous deux fixes dans $\mathcal{R}_n$ et placés à la même hauteur dans la cabine. Notons que, dans ce référentiel, la gravitation est compensée par la force d'inertie d'entraînement.

Pour un observateur du référentiel galiléen $\mathcal{R}$, dans lequel la gravitation est présente, la trajectoire lumineuse est courbe, puisque, au cours de la propagation, chaque point atteint par la lumière, de coordonnée horizontale x , tombe avec une vitesse qui dépend de x :

$$\mathcal{G}t = \mathcal{G} \frac{x}{c}$$

On en déduit que le champ de gravitation courbe le rayon lumineux.

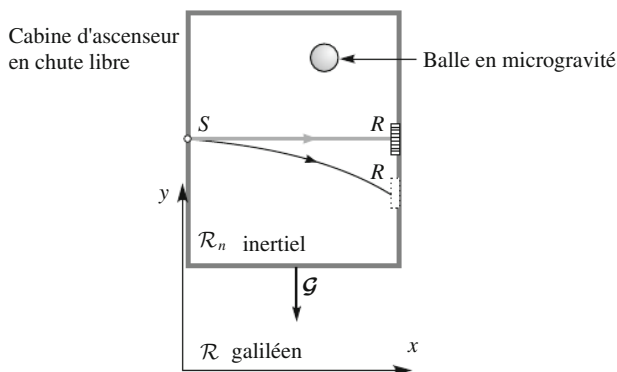


FIG. 10.12.

b) Déviation des rayons lumineux passant au voisinage du Soleil

On peut déterminer, de façon précise, la déviation des rayons lumineux par le champ de gravitation que produit une masse, à partir de l'équation différentielle en $u = 1/r$, établie pour étudier le mouvement d'une planète. En effet, il vient, en imposant dans l'équation $m = 0$, puisque la particule considérée est un photon :

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \left(1 - \frac{3GMu}{c^2} \right) = 0$$

Comme précédemment, on peut remplacer le terme correctif $3GMu/c^2$ par la valeur approchée $3GMu_0/c^2$, u_0 étant solution de l'équation :

$$\frac{d^2 u_0}{d\varphi^2} + u_0 = 0$$

La solution s'écrit donc :

$$u_0 = \frac{\cos(\varphi - \varphi_0)}{b} \quad \text{soit} \quad r_0 = \frac{b}{\cos(\varphi - \varphi_0)}$$

b étant une distance constante. C'est l'équation d'une droite Δ , située à la distance b du centre S du Soleil. L'angle $\psi = \varphi - \varphi_0$ est l'angle que fait le vecteur position avec la normale menée de S à la droite Δ (Fig. 10.13). L'équation à résoudre s'écrit alors :

$$\frac{d^2 u}{d\psi^2} + u = u_m \cos^2 \psi \quad \text{en posant} \quad u_m = \frac{3GM}{b^2 c^2} = \frac{3r_S}{2b^2}$$

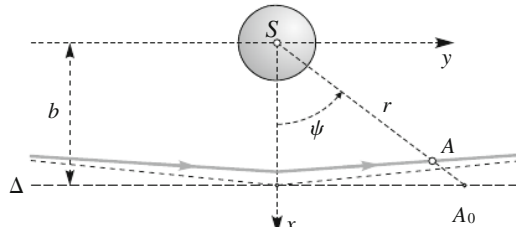


FIG. 10.13.

Introduisant la variable $U = u - u_m/2$, cette équation devient :

$$\frac{d^2 U}{d\psi^2} + U = \frac{u_m}{2} \cos(2\psi) \quad \text{soit} \quad \frac{d^2 \underline{U}}{d\psi^2} + \underline{U} = \frac{u_m}{2} \exp(i2\psi)$$

en notation complexe. La solution générale complexe de cette dernière équation homogène est bien connue (cf. *Mécanique*) :

$$\underline{U} = C_+ \exp(i\psi) + C_- \exp(-i\psi)$$

Une solution particulière ayant la même forme que le deuxième membre s'obtient aisément ; en effet, en injectant une solution en $\mathcal{A} \exp(i2\psi)$, on trouve :

$$(-4\mathcal{A} + \mathcal{A}) \exp(i2\psi) = \frac{u_m}{2} \exp(i2\psi) \quad \text{d'où} \quad \mathcal{A} = -\frac{u_m}{6}$$

Il vient donc :

$$\underline{U} = C_+ \exp(i\psi) + C_- \exp(-i\psi) - \frac{u_m}{6} \exp(i2\psi) \quad \text{soit} \quad U = \frac{\cos \psi}{b} - \frac{u_m}{6} \cos(2\psi)$$

en prenant la partie réelle, b étant un coefficient constant, homogène à une longueur. On en déduit :

$$u = \frac{1}{r} = \frac{\cos \psi}{b} + \frac{u_m}{2} \left[1 - \frac{\cos(2\psi)}{3} \right] = \frac{\cos \psi}{b} + \frac{GM}{b^2 c^2} (\cos^2 \psi + 2 \sin^2 \psi)$$

puisque :

$$1 - \frac{\cos(2\psi)}{3} = 1 - \frac{\cos^2 \psi - \sin^2 \psi}{3} = \frac{2}{3} (\cos^2 \psi + 2 \sin^2 \psi)$$

En introduisant les coordonnées cartésiennes $x = r \cos \psi$, $y = r \sin \psi$, le résultat précédent se met sous la forme :

$$1 = \frac{x}{b} + \frac{GM}{b^2 c^2 r} (x^2 + 2y^2) \quad \text{d'où} \quad x = b - \frac{GM}{c^2 b} \frac{x^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

On trouve aisément les deux asymptotes de cette courbe en faisant $y^2 \gg x^2$:

$$x \approx b \pm \frac{r_s}{b} y \quad \text{avec} \quad r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

L'angle qu'elles font entre elles est précisément la déviation angulaire α :

$$\alpha = \frac{2r_s}{b} = \frac{4GM/c^2}{b}$$

Pour un rayon passant sur le bord du Soleil, on trouve, puisque, dans ce cas, $M = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$ et $b = 0,7 \times 10^9 \text{ m}$:

$$\alpha = 8,47 \times 10^{-6} \text{ rad} = 1,75''.$$

La première tentative de vérification de cette déviation fut réalisée par l'astronome britannique A. Eddington, en mai 1919, le jour d'une éclipse totale de Soleil, à partir de deux stations d'observation, l'une située sur l'île Principe, dans le golfe de Guinée, et l'autre à Sobral au Brésil. On a comparé les positions apparentes d'une étoile, d'une part lorsque le disque solaire était proche du rayon lumineux observé, d'autre part lorsque le Soleil était dans une région éloignée de ce rayon. Les résultats expérimentaux déclarés furent les suivants :

À Principe (Golfe de Guinée) : $\alpha = 1,61'' \pm 0,30''$ À Sobral (Nord du Brésil) : $\alpha = 1,98'' \pm 0,12''$

Eddington annonça immédiatement que la théorie d'Einstein était vérifiée expérimentalement. Par la suite, des mesures plus précises, faites jusqu'en 1952, confirmèrent cette annonce.

Remarques : 1) Dans sa publication originale de juin 1911, Einstein avait prévu initialement une valeur incorrecte, car deux fois trop faible, précisément $r_s/b = 0,85''$, ce qu'il corrigea, cinq ans plus tard, dans sa contribution sur les fondements de la théorie de la relativité générale. 2) Il est instructif de développer le calcul newtonien de la déviation de la trajectoire hyperbolique d'une particule. On rappelle l'équation différentielle du mouvement de la particule (Fig. 10.14) :

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{p} = \frac{GMm^2}{L^2} = \frac{GM}{(L/m)^2}$$

dont la solution est :

$$u = \frac{1}{p} [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]$$

Comme $u = 1/b$ lorsque $\varphi = \varphi_0$, il vient :

$$\frac{1}{b} = \frac{1+e}{p} \quad \text{et} \quad e = -1 + \frac{p}{b} \approx \frac{p}{b}$$

En outre, l'angle α_N de déviation de la trajectoire vaut $2(\varphi - \varphi_0) - \pi$, lorsque $u = 1/r = 0$. Par conséquent :

$$0 = \frac{1}{p} \left[1 - e \sin \left(\frac{\alpha_N}{2} \right) \right] \approx \frac{1}{p} \left(1 - e \frac{\alpha_N}{2} \right) \quad \text{d'où} \quad \alpha_N \approx \frac{2}{e} = \frac{2b}{p} = \frac{2bGM}{(L/m)^2}$$

Dans le cas qui nous intéresse, la particule, de masse m , a une vitesse $\mathbf{v}$ perpendiculaire au rayon vecteur, lorsque ce dernier est égal à b . Par conséquent :

$$L = m v b \quad \text{et} \quad \alpha_N \approx \frac{2GM}{bv^2} = \frac{r_S}{b\beta^2} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

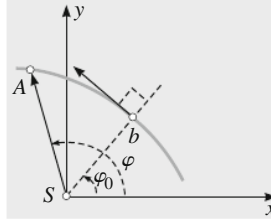


FIG. 10.14.

III.5. — Mirages gravitationnels

Les mirages gravitationnels sont une conséquence naturelle de l'influence de la présence de grosses masses sur la propagation de la lumière ; en effet, l'espace se comporte alors comme un milieu non homogène, ce qui incurve la trajectoire des rayons lumineux (cf. *Optique*). On a ainsi constaté que les deux quasars 0957 + 561 A et B, radio-sources stellaires très compactes, séparés par une distance angulaire de $10''$, avaient les mêmes propriétés optiques.

Sur la figure 10.15, on a représenté la géométrie d'un tel mirage, dans le cas simplifié où la masse déviante est située au point C et où l'objet stellaire ponctuel A_o se trouve sur la droite CT qui relie C à l'observateur terrestre T. L'angle de déviation α et l'angle θ_i , sous lequel T voit l'image A_i , sont faibles et reliés par l'équation approchée :

$$|\alpha| = |\theta_i| + |\theta_o| \quad \text{avec} \quad b = (D_o - D_c)|\theta_o| = D_c|\theta_i|$$

dans laquelle $D_o = A_o T$ et $D_c = CT$. On en déduit :

$$|\theta_i| = |\alpha| \frac{D_c}{D_o} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{4GM}{bc^2} = \frac{2r_S}{b}$$

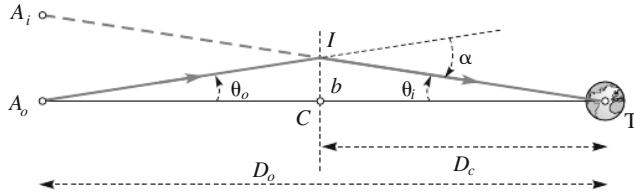


FIG. 10.15.

On pourrait retrouver ce résultat directement, à l'aide du principe de Fermat en optique et de l'équation de la trajectoire d'une particule de masse nulle :

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - r_S/r} dr^2 = 0$$

Il en résulte, en introduisant le chemin optique élémentaire $dL = c dt$, qui n'est, rappelons-le, que la durée de propagation exprimée en mètre, compte tenu du facteur de conversion c :

$$dL = c dt = \frac{dr}{1 - r_S/r}$$

Comme $r_S \ll r$, cette expression devient :

$$dL \approx dr \left(1 + \frac{r_S}{r}\right)$$

Il suffit alors d'exprimer l'intégrale curviligne L le long d'une trajectoire hypothétique, entre l'objet A_o et l'observateur en T , en fonction de la distance $b = CI$, et d'appliquer le principe de Fermat, selon lequel la trajectoire réelle est celle qui réalise une valeur minimale de $L(b)$:

$$\frac{dL}{db} = 0 \quad \text{avec} \quad L = \int_{A_o I} \left(1 + \frac{r_S}{r}\right) dr = A_o I + IT + r_S \int_{A_o I} \frac{dr}{r}$$

On retrouve alors le résultat précédent (cf. Exercices). Compte tenu de la symétrie axiale, l'image de l'étoile-objet A_o est un anneau de rayon angulaire $|\theta_i|$, appelé *anneau d'Einstein*.

IV. — DÉCALAGE SPECTRAL D'ORIGINE GRAVITATIONNELLE

Lorsqu'une onde électromagnétique monochromatique se propage dans un champ de gravitation, on constate que sa fréquence ν change et que le décalage spectral, associé à ce changement, est directement relié au champ de gravitation.

IV.1. — Onde lumineuse le long d'un champ de gravitation

a) Décalage spectral dans un champ de gravitation uniforme

Considérons une source lumineuse S , qui émet une onde lumineuse monochromatique, selon la direction du champ de gravitation $\mathcal{G}$, *uniforme*, produit par une certaine distribution de masse, dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$. L'onde est reçue par un récepteur R placé à une distance H de S (Fig. 10.16a). Nous nous proposons d'établir la relation entre la fréquence ν_s de l'onde émise par la source et celle ν_r de l'onde reçue par le récepteur.

D'après le principe d'équivalence, ce problème est *localement* analogue à celui posé dans un référentiel $\mathcal{R}'$, d'accélération égale à $-\mathcal{G}$ par rapport à $\mathcal{R}$.

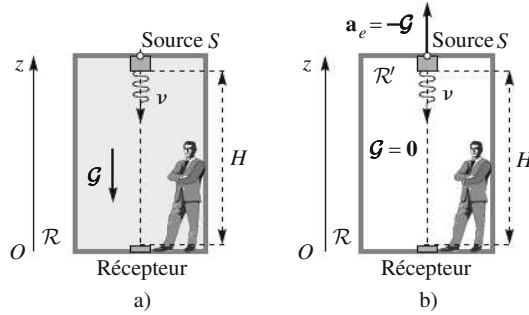


FIG. 10.16.

Adoptons comme origine des temps, l'instant d'émission de la lumière par S . À cet instant, la vitesse de S par rapport à $\mathcal{R}$ est nulle. Au bout de la durée τ nécessaire à la lumière pour atteindre le récepteur R , cette vitesse par rapport à $\mathcal{R}$, qui est aussi celle de S , vaut selon l'axe descendant $\mathcal{G}H/c$, H/c étant la durée parcourue par R pendant la propagation du signal électromagnétique depuis S jusqu'à R . Par conséquent, le signal émis est reçu à l'instant $\tau = H/c$, lorsque le récepteur a une vitesse de *rapprochement* par rapport à la source égale à $v_r = \mathcal{G}H/c$. D'après la formule de l'effet Doppler-Fizeau (cf. chapitre 3), la fréquence du signal que le récepteur reçoit diffère de celle émise par S , selon la formule approchée suivante :

$$\frac{\nu_r - \nu_s}{\nu_s} \approx \frac{v_r}{c} = \frac{\mathcal{G}\tau}{c} \quad \text{soit} \quad \frac{\nu_r - \nu_s}{\nu_s} \approx \frac{\mathcal{G}H}{c^2}$$

Ainsi, la marche d'une horloge dépend du champ de gravitation dans lequel elle se trouve.

Remarques : 1) Le décalage spectral précédent peut s'exprimer aussi, en fonction de l'énergie $\mathcal{E}_\gamma = h\nu$ du photon associé à l'onde électromagnétique de fréquence ν :

$$\frac{\nu_r - \nu_s}{\nu_s} = \frac{\mathcal{E}_{\gamma,r} - \mathcal{E}_{\gamma,s}}{\mathcal{E}_{\gamma,s}} = \frac{\mathcal{G}H}{c^2}$$

2) La relation entre les fréquences ν_s et ν_r est parfois établie en effectuant un bilan énergétique sur le photon, comme on le ferait sur un objet newtonien, de masse $h\nu_s/c^2$, dite masse en vol du photon :

$$h\nu_r = h\nu_s + \frac{h\nu_s}{c^2}\mathcal{G}H$$

Nous avons écarté une telle démonstration, d'abord pour éviter ce concept hypothétique de « masse en vol » du photon, qui change de S à R en passant au cours de la chute de $h\nu_s/c^2$ à $h\nu_r/c^2$, ensuite pour ne pas masquer l'effet Doppler-Fizeau, lequel joue un rôle essentiel dans l'analyse, enfin pour reproduire la démonstration faite par Einstein lui-même.

b) Décalage spectral en fonction du potentiel de gravitation

Il est judicieux d'exprimer le décalage spectral en fonction du potentiel de gravitation Φ , lequel apparaît naturellement dans l'expression précédente puisque (cf. *Mécanique*) :

$$\mathcal{G}H = \Phi_s - \Phi_r$$

On trouve alors :

$$\frac{\nu_r - \nu_s}{\nu_s} = -\frac{\Phi_r - \Phi_s}{c^2} \quad \text{ou bien} \quad \frac{T_r - T_s}{T_s} \approx \frac{\Phi_r - \Phi_s}{c^2}$$

en fonction des périodes $T_r = 1/\nu_r$ et $T_s = 1/\nu_s$. Les relations précédentes, en fonction du potentiel Φ , sont satisfaites évidemment, même si le champ de gravitation n'est pas uniforme.

Dans le cas important où le champ de gravitation est créé par une distribution de masse, à symétrie sphérique, de rayon R , on trouve, en désignant par M la masse de cette distribution et H la hauteur au-dessus de la surface :

$$\frac{\nu_r - \nu_s}{\nu_s} \approx -\frac{\Phi_r - \Phi_s}{c^2} = \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H} \right) \quad \text{soit} \quad \frac{\nu_r - \nu_s}{\nu_s} \approx \frac{G_0 H}{c^2 (1 + H/R)}$$

puisque, à l'extérieur, $\Phi(r) = -GM/r$, et, sur la surface, au niveau du récepteur, le champ vaut $G_0 = GM_T/R^2$.

c) Application à la correction de relativité générale du GPS

Dans sa publication originale de 1911, Einstein appliqua le résultat précédent au potentiel de gravitation produit par le Soleil, en un point de sa surface, à une distance R_S de son centre, et en un point de la surface de la Terre, à la distance $R_S + ST$ où est placé le récepteur. Il trouva :

$$\frac{\Phi_r - \Phi_s}{c^2} = \frac{\Phi(R_S + ST) - \Phi(R_S)}{c^2} \approx -\frac{\Phi(R_S)}{c^2} = \frac{GM_S}{R_S c^2} = \frac{r_S}{2R_S}$$

en introduisant le rayon de Schwarzschild $r_S = 2GM_S/c^2$ et en négligeant $\Phi(R_S + ST)$ devant $\Phi(R_S)$. Il en résulte :

$$\frac{\nu_r - \nu_s}{\nu_s} \approx -\frac{r_S}{2R_S} = -\frac{2,94 \times 10^3}{2 \times 0,69 \times 10^9} \approx -2,13 \times 10^{-6}$$

Dans les systèmes de radionavigation par satellite, essentiels pour l'atterrissage des avions et le guidage des bateaux, tels que le GPS américain ou son équivalent européen Galileo (cf. chapitre 3), la précision sur la détermination des durées exige que l'on prenne en compte ce décalage spectral. Il vient, en désignant par H l'altitude des satellites au-dessus de la Terre (masse M_T et rayon R_T) :

$$\frac{T_r - T_s}{T_s} = \frac{\Phi_r - \Phi_s}{c^2} = -\frac{GM_T}{c^2} \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + H} \right) = -\frac{GM_T}{R_T c^2} \left(1 - \frac{1}{1 + H/R_T} \right)$$

ce qui donne, à une altitude $H = 20\,200$ km :

$$\frac{T_r - T_s}{T_s} \approx -\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{6,4 \times 10^6 \times 9 \times 10^{16}} \left(1 - \frac{1}{1 + 20,2/6,4} \right) \approx -5,4 \times 10^{-10}$$

Sur une durée de 1 min, l'horloge satellitaire *avance* de 32 ns sur celle du récepteur sur la Terre, ce qui implique une variation de position d'environ 9,7 m ! Ainsi, l'avance gravitationnelle est plus grande que le retard de 5 ns liée à la vitesse des satellites (cf. Leçon 3). L'erreur de 27 ns que l'on ferait en négligeant ces deux corrections relativistes, de signes opposés, entraînerait une imprécision dans la géolocalisation de 8,1 m ! On tient compte des deux corrections relativistes en diminuant légèrement la fréquence des horloges au sol.

Remarque : En ne tenant pas compte de la rotation propre de la Terre, les deux erreurs relativistes se compenseraient à l'altitude H telle que :

$$\frac{T_s - T_r}{T_r} = \frac{1}{\gamma} - 1 \approx -\frac{v^2}{2c^2} \quad \text{et} \quad \frac{T_r - T_s}{T_s} = -\frac{GM_T}{R_T c^2} \left(1 - \frac{1}{1 + H/R_T} \right)$$

ce qui donne, puisque $GM_T/R_T = v^2$:

$$\frac{v^2}{2c^2} - \frac{v^2}{c^2} \left(1 - \frac{1}{1 + H/R_T} \right) = 0 \quad \text{soit} \quad H \approx R_T$$

IV . 2 . — Expérience de Pound et Rebka

En 1959, les physiciens américains R. Pound et G. Rebka ont eu l'idée de se servir de l'effet Mössbauer (cf. chapitre 8), c'est-à-dire de l'émission *sans recul* de rayons γ , à la suite de transitions de noyaux atomiques insérés dans des structures cristallines, pour tester sur Terre la validité de la théorie d'Einstein sur la gravitation. En effet, les raies du spectre du rayonnement émis sont alors extrêmement fines, ce qui permet de faire des mesures très précises.

Ils utilisèrent un rayonnement γ , d'énergie 14,4 keV, émis selon la verticale descendante par une source radioactive de noyau de fer 57 (cf. chapitre 8), placée à une hauteur $H = 22,6$ m au-dessus du sol, là où se trouvait un photomultiplicateur détectant le rayonnement incident (Fig. 10.17). La variation relative de fréquence est donc la suivante :

$$\frac{\nu_r - \nu_s}{\nu_s} \approx \frac{\mathcal{G}_0 H}{c^2(1 + H/R_T)} \approx \frac{9,81 \times 22,6}{9 \times 10^{16}} \approx 2,5 \times 10^{-15}$$

sachant que $R_T = 6,4 \times 10^6$ m et $\mathcal{G}_0 \approx 9,81$ m · s⁻².

Pour mettre en évidence cette très petite variation de la fréquence, ils eurent l'idée de communiquer un mouvement d'*éloignement* de la source par rapport au récepteur, afin de compenser, par effet Doppler-Fizeau longitudinal (cf. chapitre 3), la variation relative de fréquence due à la gravitation. On a, alors, si v_e désigne la vitesse d'éloignement de la source :

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu} \right)_G + \left(\frac{\Delta\nu}{\nu} \right)_{DFL} = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{\mathcal{G}H}{c^2} + \frac{v_e}{c} = 0 \quad \text{et} \quad v_e = -\frac{\mathcal{G}H}{c}$$

Dans cette expérience, l'ordre de grandeur de la vitesse v_e était, en valeur absolue :

$$|v_e| = \frac{9,81 \times 22,6}{3 \times 10^8} \approx 0,74 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La mesure précise de v_e permet de tester cette prévision théorique et donc de confirmer l'influence de la gravitation sur l'énergie du rayonnement.

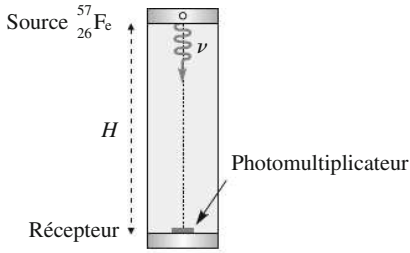


FIG. 10.17.

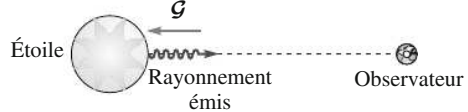


FIG. 10.18.

IV.3. — Décalage spectral vers le bleu ou vers le rouge ?

Lorsqu'on observe le rayonnement électromagnétique émis par une source stellaire (Fig. 10.18), située à une distance d , le champ de gravitation qu'elle crée est opposé au rayonnement. On a donc :

$$\frac{\nu_r - \nu_s}{\nu_s} = -\frac{Gd}{c^2} < 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{\lambda_r - \lambda_s}{\lambda_s} = \frac{Gd}{c^2} > 0$$

Le décalage spectral se produit donc vers le rouge. Aussi est-il appelé communément *redshift* (décalage vers le rouge en anglais). Il fut observé, pour la première fois en 1927, par J. Evershed, en analysant les raies émises par des jets de plasma provenant du Soleil.

L'influence de la gravitation solaire sur la fréquence des ondes électromagnétiques a été soigneusement testée en 1971. Des ondes centimétriques émises par les radio-télescopes de l'Haystack (MIT, États-Unis) et d'Arecibo (Île américaine de Porto-Rico) ont été envoyées vers les planètes Mercure, Mars et Vénus. En analysant les ondes réfléchies, on a constaté que l'accord avec les prévisions était, là encore, excellent.

V. — COSMOLOGIE

La cosmologie, ou discours raisonné sur le monde ordonné, est l'étude de la formation et de l'évolution de la structure de l'Univers, et donc des lois physiques qui le régissent. Elle tient une place singulière en physique, car son objet, l'Univers, unique par définition, rend inopérant le critère habituel de crédibilité en physique que constitue la reproductibilité expérimentale. Depuis la théorie de la gravitation d'Einstein, la démarche scientifique en cosmologie consiste essentiellement à imaginer des modèles d'Univers et à comparer leurs implications aux observations. Cette confrontation et la réfutation éventuelle de ces modèles et des lois fondamentales sous-jacentes en font une science à part entière, pourvu évidemment que ces lois gardent leur universalité, comme l'exige la démarche scientifique. Il en résulte que la cosmologie présente principalement deux aspects :

- i) le premier est l'accumulation de données observationnelles,
- ii) le second est l'interprétation de ces données à l'aide de modèles cohérents d'Univers.

V.1. — Données observationnelles

a) Étoiles, galaxies, amas de galaxies, super-amas

Depuis la Terre, qui est l'une des huit planètes orbitant autour d'une étoile proche, le Soleil, l'observation attentive du ciel montre que l'Univers visible est formé d'un nombre considérable d'étoiles analogues au Soleil : environ 10^{12} soit mille milliards d'étoiles. La distance de la Terre au Soleil étant de $1,49 \times 10^{11}$ m, la lumière met environ 8 min pour nous parvenir du Soleil. On mesure cette dis-

tance D par triangulation, c'est-à-dire à partir de l'angle θ que font entre elles les directions des droites $T_1 S$ et $T_2 S$ qui pointent le centre du Soleil, depuis deux points T_1 et T_2 de la Terre (Fig. 10-19a) :

$$D \approx \frac{T_1 T_2}{\theta}$$

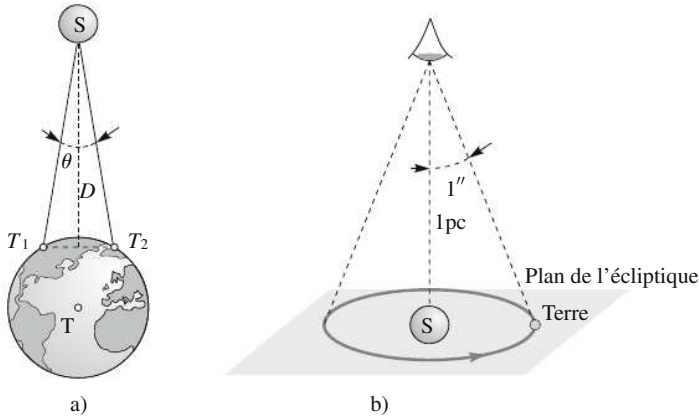


FIG. 10.19.

En astrophysique, les distances sont généralement exprimées en parsecs, brièvement pc : le parsec (mot formé à partir de *parallaxe* et de *seconde d'arc*) est la distance à laquelle le *rayon* de l'orbite terrestre est vu sous un angle de 1 seconde d'arc (Fig. 10.19 b) :

$$1 \text{ pc} = \frac{ST}{1''} = \frac{1,49 \times 10^{11}}{5 \times 10^{-6}} = 3,085677 \times 10^{16} \text{ m} \quad \text{soit} \quad 1 \text{ pc} \approx 30 \text{ Pm} \quad (\text{pétamètre})$$

On utilise souvent le mégaparsec $1 \text{ Mpc} = 3,085677 \times 10^{22} \text{ m}$ et l'année-lumière (al), laquelle est la distance parcourue par la lumière dans le vide en une année :

$$1 \text{ al} = 24 \times 3600 \times 365,25 \times 3 \times 10^8 = 0,946 \times 10^{16} \text{ m} \quad \text{ou} \quad 1 \text{ al} = 0,3066 \text{ pc}$$

Au-delà du système solaire, les étoiles se regroupent pour former notre galaxie, dont la *Voie Lactée* est l'image que nous en avons en observant le ciel (Fig. 10.20). Cette dernière a l'allure d'une spirale dont le diamètre D_{vl} et l'épaisseur H_{vl} valent en kiloparsec (kpc) :

$$D_{vl} \sim 12,5 \text{ kpc} \quad \text{et} \quad H_{vl} \sim 0,3 \text{ kpc}$$

Les galaxies se regroupent à leur tour en amas de galaxies. Notre galaxie appartient au *Groupe Local* constitué de la galaxie Messier 31 et d'une vingtaine de galaxies-satellites. La distance moyenne entre deux galaxies dans un amas est de l'ordre de 0,1 Mpc.

b) La fuite des galaxies

C'est en 1915, que l'astronome américain V. Slipher constata expérimentalement un décalage spectral vers le rouge du rayonnement électromagnétique émis par plusieurs galaxies. Plusieurs années plus tard, en 1929, un autre astronome américain E. Hubble publia une étude approfondie des résultats obtenus par des expérimentateurs pour en déduire une relation entre le décalage spectral relatif z du rayonnement émis par les galaxies et leur distance d à la Terre. Il obtint la loi simple suivante :

$$cz = H_0 d \quad \text{avec} \quad z = \frac{\lambda_r - \lambda_s}{\lambda_s} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_s} \quad \text{en posant} \quad \Delta\lambda = \lambda_r - \lambda_s$$

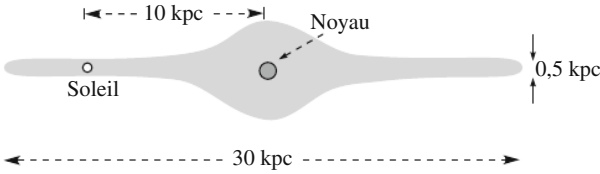


FIG. 10.20.

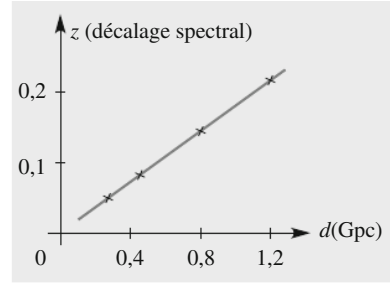


FIG. 10.21.

λ_r étant la longueur d'onde du rayonnement reçu sur la Terre, λ_s la longueur d'onde du rayonnement dans le référentiel lié à la source et H_0 une quantité homogène à l'inverse d'une durée que l'on appelle le *coefficient d'Hubble à l'instant présent*. Notons que λ_s est aussi la longueur d'onde dans le vide de la radiation émise par une source analogue en laboratoire. La distance d est obtenue par diverses méthodes selon l'ordre de grandeur.

i) Pour les distances telles que les distances Terre-Soleil et Terre- α du Centaure, on utilise la méthode de triangulation qui consiste à déterminer l'angle sous lequel on voit l'astre depuis deux points de la Terre de distance connue.

ii) Pour des distances plus élevées, on s'appuie sur la relation entre d et la variation du flux lumineux émis par un astre et détecté sur la Terre. Or, dans le cas des étoiles à flux variable, telles que les céphéides, situées à des distances connues, on a pu établir la relation entre le flux qu'elles émettent et la période de variation de ce flux que l'on mesure. On en déduit alors la distance d .

Sur la figure 10.21, on a représenté z , en fonction de d , pour différentes galaxies. Historiquement, on a exprimé le coefficient d'Hubble H_0 en $\text{km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$, ou mieux, ce qui est plus commode, dans l'unité H_{100} qui vaut :

$$H_{100} = 100 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1} = \frac{10^5}{10^6 \times 3,085\,677 \times 10^{16}} = \frac{1}{3,085\,677 \times 10^{17}} \text{ s}^{-1}$$

La valeur de H_{100} est souvent donnée en Gan^{-1} , le Gan étant le milliard d'années (Giga ou 10^9) :

$$H_{100} = \frac{1}{9,77\,792} \text{ Gan}^{-1} \quad \text{d'où} \quad H_{100}^{-1} = 9,77\,792 \text{ Gan}$$

avec :

$$1 \text{ Gan} = 10^9 \times 3\,600 \times 24 \times 365,25 = 3,15576 \times 10^{16} \text{ s}$$

Les différentes méthodes de détermination de $h_0 = H_0/H_{100}$ ont donné jusqu'à présent des valeurs voisines de 0,7. La valeur la plus récente obtenue avec la mission européenne Planck en 2013 est :

$$h_0 = \frac{H_0}{H_{100}} \approx 0,673$$

Hubble a interprété le décalage spectral cosmologique z , comme un effet Doppler-Fizeau longitudinal *apparent*.

Rappelons l'équation reliant la fréquence ν_r du rayonnement lumineux monochromatique reçu par un observateur, en mouvement longitudinal, à la fréquence ν_s du rayonnement émis par la source

(cf. chapitre 3) :

$$\nu_r = \nu_s \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{1/2} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

v étant la vitesse d'éloignement du récepteur ou de la source. En fonction des longueurs d'onde $\lambda_r = c/\nu_r$ et $\lambda_s = c/\nu_s$, on a :

$$\lambda_r = \lambda_s \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^{1/2} \quad \text{soit} \quad z = \frac{\lambda_r - \lambda_s}{\lambda_s} = \frac{\nu_s - \nu_r}{\nu_r} = \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^{1/2} - 1$$

On voit que, si la source s'éloigne de la Terre ($\beta > 0$), l'écart en longueur d'onde est positif. Ce décalage spectral se produit, dans ce cas, vers le rouge, d'où son nom anglais *redshift*. De z , on déduit aisément la vitesse d'éloignement selon :

$$v = \beta c = \frac{(z + 1)^2 - 1}{(z + 1)^2 + 1} c$$

Notons que, pour les faibles vitesses ($\beta \ll 1$) et donc pour des faibles valeurs de z , la relation précédente se réduit à :

$$v = \frac{(z + 1)^2 - 1}{(z + 1)^2 + 1} c = \frac{z(z + 2)}{(z + 1)^2 + 1} c \approx \frac{2z}{2} c \quad \text{d'où} \quad v \approx cz$$

Exemples :

1) Le décalage spectral cosmologique relatif z pour une galaxie, située à une distance de 300 Mpc, est d'environ 0,05. Dans ce cas, puisque $z \ll 1$:

$$z \approx \beta \quad \text{d'où} \quad v \approx 0,05 c = 15 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2) Pour des quasars, qui sont probablement des trous noirs super massifs (10^8 à 10^{10} fois la masse du Soleil), z peut être bien plus grand ; avec le quasar PC1158 + 4635, on a trouvé 4,73, d'où :

$$v = \beta c = \frac{(z + 1)^2 - 1}{(z + 1)^2 + 1} c = \frac{31,83}{33,83} c \approx 0,941 c$$

3) En 2004, on a pu détecter un rayonnement IR, provenant d'une galaxie lointaine, correspondant à la raie H_α de l'atome d'hydrogène dans l'UV, à 121,6 nm, avec un décalage spectral relatif z égal à 10 ; la vitesse de récession de cette galaxie est donc :

$$v = \beta c = \frac{(z + 1)^2 - 1}{(z + 1)^2 + 1} c = \frac{120}{122} c \approx 0,9836 c$$

Comme z est directement relié à la vitesse d'éloignement des galaxies par rapport à la Terre, pour les faibles vitesses, Hubble écrivit la loi reliant cz à d sous la forme :

$$v = H_0 d$$

En réalité, cette loi fut prévue par le physicien belge l'abbé G. Lemaître, dès 1927, et interprétée comme une *dilatation* ou d'une *expansion* de l'Univers au cours du temps : l'Univers « gonfle », précisément les distances qui séparent les différentes galaxies augmentent lorsque le temps s'écoule. Ainsi, dans le passé, les galaxies se trouvaient plus proches les unes des autres qu'aujourd'hui. Dans la suite, nous appellerons loi de Lemaître-Hubble cette relation entre vitesse v des galaxies et distance d .

L'extrapolation cavalière et donc très spéculative de cette réduction des distances entre galaxies, lorsqu'on remonte le temps, conduit à une *singularité* (taille de l'Univers nulle et masse volumique infinie), que Lemaître appela imprudemment « atome primitif ». Un ordre de grandeur de la durée T qui sépare l'instant présent de cette singularité, vaut, si l'on admet évidemment que la théorie est toujours valable, même si la masse volumique devient infinie :

$$T \sim \frac{1}{H_0} \approx \frac{1}{h_0 H_{100}} = \frac{9,77792}{0,673} \text{Gan} \approx 14,5 \text{ Gan}$$

Une détermination plus précise de cette durée, appelée durée de vie de l'Univers, a donné $T \approx 13,7 \text{ Gan}$.

Des mesures spectrales sur le rayonnement des étoiles les plus vieilles, révèlent une présence de noyaux lourds radioactifs dans des proportions qui accréditent une telle estimation. L'application de la loi de Lemaître-Hubble à des mesures de grand décalage spectral relatif, tel que $z = 10$, donne une distance d qui nous sépare de l'objet céleste considéré de :

$$d = \frac{v}{H_0} = \beta cT = 0,9836 \times 13,7 \approx 13,5 \text{ Gal}$$

La naissance d'un tel objet date donc de $13,5 \text{ Gan}$, soit de $13,7 - 13,5 = 0,2 \text{ Gan}$, après la singularité.

Remarques : 1) L'expansion de l'Univers ne doit pas être confondue avec une simple dilatation de toutes les distances : *seules les distances intergalactiques sont dilatées.*

2) On utilise souvent l'expression malheureuse *big bang* (grande explosion) pour désigner la singularité ; rappelons que cette expression a été utilisée pour la première fois par l'astrophysicien F. Hoyle, en 1949, précisément pour ridiculiser les adeptes d'une théorie non stationnaire de l'Univers.

c) Rayonnement du fond cosmologique

Vers la fin des années 1940 et au début des années 1950, G. Gamow, R. Alpher et R. Herman firent une prédiction extraordinaire sur l'existence d'un rayonnement cosmologique isotrope caractéristique d'un corps noir dont ils estimèrent la température à quelques degrés K. Ce rayonnement du fond diffus cosmologique fut découvert plus tard en 1965, par hasard, par les physiciens américains A. Penzias et R. Wilson, auxquels le jury Nobel accorda le prix en 1978.

La valeur de la température du corps noir associé a été depuis déterminée de façon précise par le satellite COBE (COsmic Background Explorer) en 1993 (Fig. 10.22), en mesurant la fréquence du maximum de la luminance spectrale L_ν , qui est le flux lumineux (en femtowatt) par unité de surface (en mètre carré), par unité d'angle solide (en steradian) et par unité de fréquence (en hertz) (cf. *Optique*). La fréquence de ce maximum est reliée à la température T par la relation suivante (cf. *Thermodynamique*) :

$$\frac{\nu_m}{T} \approx 5,879 \times 10^{10} \text{ Hz} \cdot \text{K}^{-1} \quad \text{d'où} \quad T \approx \frac{\nu_m}{5,879 \times 10^{10}} = 2,728 \text{ K} \quad \text{puisque} \quad \nu_m \approx 160 \text{ GHz}$$

Ce rayonnement est celui émis par l'Univers primordial 380 000 ans après la singularité.

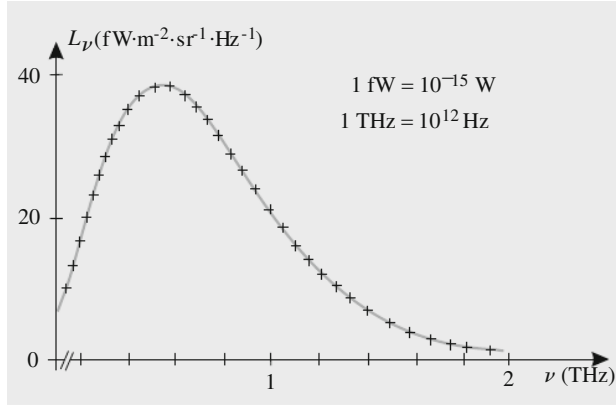


FIG. 10.22.

Remarques : 1) Le succès de la mission COBE a valu le prix Nobel aux deux astrophysiciens J. Mather et G. Smoot, responsables des instruments de mesure.

2) Les astrophysiciens appellent habituellement brillance la luminance des sources stellaires.

3) Très souvent, les expérimentateurs considèrent, non pas la luminance spectrale par hertz L_ν , mais la luminance spectrale par mm de longueur d'onde L_λ , ces deux fonctions étant différentes. La longueur d'onde λ_m pour laquelle L_λ est maximale est reliée à la température T par :

$$\lambda_m T \approx 2898 \text{ } \mu\text{m.K} \quad \text{d'où} \quad T \approx \frac{2898}{\lambda_m} \approx 2,728 \text{ K} \quad \text{puisque} \quad \lambda_m \approx 1,06 \text{ mm}$$

L'expérience a montré que le rayonnement présentait une légère anisotropie que l'on a attribuée avec succès au mouvement de la Terre, à la vitesse de 365 km.s^{-1} , par rapport à un référentiel dans lequel un tel rayonnement est isotrope.

Rappelons que le maximum de la luminance spectrale L_ν ne s'obtient pas à partir du maximum de la luminance spectrale L_λ , en remplaçant λ_m par c/ν_m (cf. *Thermodynamique*).

d) Métrique FLRW

Cette métrique fut proposée, pratiquement en même temps, par les quatre astrophysiciens A. Friedmann, G. Lemaître, H. Robertson et A. Walker, d'où son nom ; le premier est russe, le second est belge et les deux derniers américains. Le carré de l'intervalle entre deux événements voisins, exprimé en coordonnées sphériques (r, θ, φ) , prend en compte la courbure K de l'espace, homogène à l'inverse du carré d'une longueur, et fait apparaître un facteur d'échelle $a(t)$:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad \text{en posant} \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$$

Si K est nul, la métrique, alors plate, se réduit à :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) (dr^2 + r^2 d\Omega^2)$$

Si K n'est pas nul, il est naturel d'introduire le *facteur de courbure* $k = K/|K|$ et la coordonnée radiale réduite $\eta = r|K|^{1/2}$. Il en résulte l'expression suivante du carré de l'intervalle d'espace-temps :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)|K|^{-1} \left(\frac{d\eta^2}{1-k\eta^2} + \eta^2 d\Omega^2 \right)$$

ce qui s'écrit aussi, en introduisant la *distance d'échelle* $R(t) = a(t)|K|^{-1/2}$:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left(\frac{d\eta^2}{1-k\eta^2} + \eta^2 d\Omega^2 \right)$$

Le facteur de courbure k ne peut prendre que deux valeurs :

- i) $k = 1$, l'espace-temps est de courbure *positive* : l'Univers est dit *fermé*,
- ii) $k = -1$, l'espace-temps est de courbure *négative* : l'Univers est qualifié d'*ouvert*.

Le paramètre t qui apparaît dans l'expression de la métrique est appelé le *temps cosmique*, en raison de la contribution spécifique des coordonnées spatiales en RG ; la durée élémentaire dt coïncide avec l'invariant $d\tau = ds/c$, qui est la durée élémentaire mesurée par un observateur d'un système de référence, dit *comobile*, dans lequel les coordonnées η , θ et φ restent constantes :

Les différentes expressions du carré de l'intervalle d'espace-temps, dans la métrique FLRW, peuvent être mis sous une forme générale qui les englobe :

- i) Espace-temps de courbure positive ($k = 1$)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left(\frac{d\eta^2}{1-\eta^2} + \eta^2 d\Omega^2 \right) = c^2 dt^2 - R^2(t) (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2)$$

en posant $\eta = \sin \chi$, puisque $d\eta = \cos \chi d\chi$ et $1 - \eta^2 = \cos^2 \chi$.

- ii) Espace-temps de courbure négative ($k = -1$)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left(\frac{d\eta^2}{1+\eta^2} + \eta^2 d\Omega^2 \right) = c^2 dt^2 - R^2(t) (d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\Omega^2)$$

en posant $\eta = \sinh \chi$, puisque $d\eta = \cosh \chi d\chi$ et $1 + \eta^2 = \cosh^2 \chi$.

Le cas singulier d'un espace-temps plat ($K = 0$) s'écrit aussi :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) (dr^2 + r^2 d\Omega^2) = c^2 dt^2 - R^2(t) (d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2)$$

où l_0 est une longueur arbitraire :

$$\chi = \frac{r}{l_0} \quad \text{et} \quad R(t) = a(t) l_0$$

Finalement, le carré de l'intervalle d'espace-temps peut se mettre sous la forme générale suivante :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) [d\chi^2 + S_k^2(\chi) d\Omega^2]$$

avec :

$$S_1(\chi) = \sin \chi \quad S_{-1}(\chi) = \sinh \chi \quad \text{et} \quad S_0(\chi) = \chi$$

On écrit parfois le carré de l'intervalle autrement, en *conformité* avec la métrique de la RR. En effet, si on pose $R_0 = R(t_0)$, à l'instant cosmique t_0 pris comme instant de référence, on obtient :

$$ds^2 = \left[\frac{R(t)}{R_0} \right]^2 \left[c^2 d\Theta_c^2 - \left(\frac{d\eta^2}{1-k\eta^2} + \eta^2 d\Omega^2 \right) \right]$$

en introduisant la *durée élémentaire conforme* $d\Theta_c = [R_0/R(t)] dt$. La durée conforme Θ_c , ou *temps conforme*, qui s'est écoulée entre les instants cosmiques t_0 et t , s'obtient alors par intégration :

$$\Theta_c = R_0 \int_{t_0}^t \frac{du}{R(u)}$$

Il est judicieux d'introduire aussi une durée élémentaire $d\Theta_e$ directement reliée à l'expansion relative dR/R :

$$H = \frac{\dot{R}}{R} \quad \text{donne} \quad \frac{dR}{R} = H dt = H_0 d\Theta_e \quad \text{avec} \quad d\Theta_e = \frac{H}{H_0} dt$$

En intégrant, on obtient l'expression suivante de la durée Θ_e ou *temps d'expansion* :

$$\Theta_e = \frac{1}{H_0} \ln \left[\frac{R(t)}{R_0} \right]$$

L'instant du big bang, défini par un effondrement progressif du rapport $R(t)/R_0$, tend alors vers $-\infty$, ce qui présente l'intérêt d'éviter toute interprétation abusive en affectant au big bang les caractéristiques d'un hypothétique instant initial de la création.

V. 2. — Modèle cohérent d'Univers

a) Équations de Friedmann-Lemaître

En 1922, Friedmann publia deux équations fondamentales auxquelles satisfait la distance d'échelle R , lorsqu'on assimile, à grande échelle, l'Univers à un fluide homogène et isotrope, de masse volumique ρ et de *pression* p . Ces deux équations furent généralisées en 1927 par Lemaître, en prenant en compte la contribution du rayonnement électromagnétique.

On obtient ces équations généralisées en explicitant, dans le cadre de la métrique FLRW, les deux premières composantes de l'équation tensorielle d'Einstein (cf. Annexe 2) avec *constante cosmologique* :

$$G_{ij} - \Lambda g_{ij} = \kappa E_{ij} \quad \text{avec} \quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

Cette constante cosmologique fut introduite par Einstein en 1917, comme une extension de son équation tensorielle initiale compatible avec le principe d'invariance de la relativité générale. Elle fut abandonnée en 1929, puis réintroduite bien plus tard, dans les années 1990, pour interpréter l'*accélération* observée de l'expansion de l'Univers. Sa valeur est d'environ 10^{-52} m^{-2} . Notons que la longueur caractéristique associée vaut

$$l_\Lambda = \Lambda^{-1/2} \approx 10^{26} \text{ m}$$

ce qui est curieusement de l'ordre de grandeur de la taille actuelle de l'Univers obtenue à partir de l'estimation de sa durée.

On a, d'après la métrique :

$$g_{00} = 1 \quad \text{et} \quad g_{11} = -\frac{R^2}{1 - k\eta^2}$$

En outre, une analyse poussée permettrait d'établir les expressions suivantes des premières composantes de l'équation tensorielle. D'une part :

$$E_{00} = \rho c^2 \quad E_{11} = \frac{pR^2}{1 - k\eta^2}$$

D'autre part :

$$G_{00} = \frac{3\dot{R}^2}{R^2 c^2} + \frac{3k}{R^2} \quad G_{11} = -\frac{k + 2R\ddot{R}/c^2 + \dot{R}^2/c^2}{1 - k\eta^2}$$

Il en résulte, en explicitant l'équation tensorielle précédente :

$$\frac{3\dot{R}^2}{R^2 c^2} + \frac{3k}{R^2} - \Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} \rho c^2 \quad \text{et} \quad -\frac{k + 2R\ddot{R}/c^2 + \dot{R}^2/c^2}{1 - k\eta^2} + \Lambda \frac{R^2}{1 - k\eta^2} = \frac{8\pi G}{c^4} \frac{pR^2}{1 - k\eta^2}$$

soit :

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad \text{et} \quad -2\frac{\ddot{R}}{R} - \frac{kc^2}{R^2} - \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \Lambda c^2 = -\frac{8\pi G}{c^2}p$$

En sommant ces deux dernières équations, on obtient une nouvelle équation qui ne contient ni $\dot{R}/R$ ni k :

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + p) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Le système est donc régi par les deux équations suivantes :

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad \text{et} \quad \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + 3p) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Remarques : 1) Il existe plusieurs écritures équivalentes de l'équation tensorielle $G_{ij} - \Lambda g_{ij} = \kappa E_{ij}$ qui dépendent de trois choix de signes, le premier sur la signature de la métrique (ici $+- --$), le deuxième sur le signe placé devant G_{ij} (ici $+$), le troisième sur celui qui est placé devant le coefficient positif κ (ici $+$).

2) Pour justifier l'introduction de la constante cosmologique Λ , Einstein s'appuya sur la nécessité d'ajouter une constante analogue $-\Lambda_N \Phi$ à l'équation de Poisson $\Delta \Phi = 4\pi G \rho$, à laquelle satisfait le potentiel gravitationnel (cf. *Mécanique*). En effet, dans l'impossibilité de trouver une solution non nulle pour le potentiel créé par une distribution infinie et uniforme, de masse volumique ρ_0 , ce terme supplémentaire donne la solution non nulle $\Phi = (4\pi G/\Lambda_N)\rho_0$.

b) Signification énergétique du facteur de courbure

On peut donner une signification énergétique au facteur de courbure k à partir de l'analyse newtonienne d'un modèle simplifié d'Univers. Pour cela, considérons un volume sphérique, dont le rayon R est très supérieur à la distance g qui sépare en moyenne deux galaxies, mais très inférieur à la taille U de l'Univers (Fig. 10.23) : $g \ll R \ll U$.

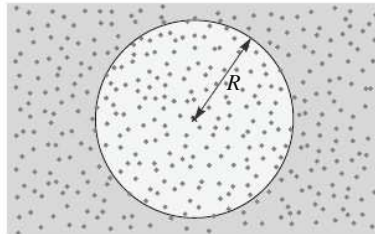


FIG. 10.23.

Admettant que la masse volumique de l'ensemble galactique, de masse totale M , soit uniforme, on a évidemment : $M = (4/3)\pi R^3 \rho$.

L'énergie mécanique du système de galaxies a pour expression :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_k = \int_{\mathcal{V}} \rho \frac{v^2}{2} d\mathcal{V} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_p = -\frac{1}{4\pi G} \int_{\text{espace}} \frac{\mathcal{G}^2}{2} d\mathcal{V}$$

Or, d'après la loi de Lemaître-Hubble, $v = Hr$, r étant la distance qui nous sépare d'une galaxie. Il vient donc, en admettant l'hypothèse d'un nombre suffisant de galaxies dans le volume considéré :

$$\mathcal{E}_k = \int_0^R \rho \frac{H^2}{2} 4\pi r^4 dr = 4\pi \rho \frac{H^2}{2} \int_0^R r^4 dr = 4\pi \rho \frac{H^2}{10} R^5 = \frac{3}{10} M H^2 R^2$$

Comme l'énergie potentielle de gravitation d'une telle distribution volumique sphérique uniforme est (cf. *Mécanique*) : $\mathcal{E}_p = -(3/5)GM^2/R$, l'énergie mécanique de l'ensemble a pour expression :

$$\mathcal{E} = \frac{3}{10} M \dot{R}^2 - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \quad \text{ce qui donne} \quad \frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{2GM}{R^3} + \frac{10}{3} \frac{\mathcal{E}}{MR^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{10}{3} \frac{\mathcal{E}}{MR^2}$$

En identifiant cette dernière équation à la première équation de Friedmann-Lemaître, sans constante cosmologique car négligeable, on trouve :

$$\frac{10}{3} \frac{\mathcal{E}}{MR^2} = -\frac{kc^2}{R^2} \quad \text{soit} \quad k = -\frac{10}{3} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}$$

d'où la relation étroite entre le facteur de courbure k et l'énergie mécanique $\mathcal{E}$ du système de galaxies.

c) Énergie sombre

Le concept d'énergie sombre (ou noire) s'introduit naturellement en transposant, dans le second membre de l'équation tensorielle d'Einstein, le terme contenant la constante cosmologique. En effet :

$$G_{ij} = \kappa (E_{ij} + \rho_{\Lambda} c^2 g_{ij}) \quad \text{où} \quad \rho_{\Lambda} c^2 = \frac{\Lambda}{\kappa} = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}$$

a les dimensions d'une énergie volumique. Depuis la découverte de l'accélération de l'expansion de l'Univers en 1998, par S. Perlmutter, B. Schmidt et A. Riess, ce qui leur a valu le prix Nobel en 2011, on a interprété la constante cosmologique comme la manifestation locale d'une *énergie sombre* volumique, ou *énergie noire* volumique, concept jusqu'ici inconnu en physique, d'où son nom.

L'énergie volumique sombre $\rho_{\Lambda} c^2$ est très faible et donc souvent négligeable. En effet :

$$\rho_{\Lambda} c^2 = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} = \frac{10^{-52} \times (3 \times 10^8)^4}{8\pi \times 6,67 \times 10^{-11}} \approx 0,5 \times 10^{-9} \text{ J.m}^{-3}$$

alors que pour la Terre, par exemple, $\rho c^2 \approx 5,5 \times 10^3 \times 9 \times 10^{16} \approx 0,5 \times 10^{21} \text{ J.m}^{-3}$.

Dans le modèle d'Univers en expansion de Friedmann-Lemaître, l'équation :

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\rho c^2 + 3p) + \frac{\Lambda c^2}{3} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\rho c^2 + 3p - 2\rho_{\Lambda} c^2)$$

fait apparaître aussi l'énergie sombre volumique sous la forme d'un terme énergétique supplémentaire qui s'oppose à l'action combinée de l'énergie de masse volumique et de la pression.

Remarques : 1) La tentative d'attribuer cette énergie sombre au vide, dans le cadre quantique (cf. *Quantique*), aboutit à une aporie, comme le montre le rapport entre Λ et une grandeur, de même dimension physique, associée au vide, l'inverse du carré de la longueur de Planck $l_p \approx 10^{-35}$ m :

$$\frac{\Lambda}{l_p^2} \approx \frac{10^{-52}}{10^{-70}} \approx 10^{-122}$$

2) La présence de la constante de Newton G dans la définition de l'énergie sombre volumique nous interroge sur le plan épistémologique. C'est probablement pour cette raison que certains astrophysiciens éludent l'interprétation énergétique de Λ , considérant qu'il s'agit simplement d'une constante qui s'introduit naturellement dans les équations de la RG.

3) Le qualificatif noire, utilisé pour désigner l'énergie sombre associée à la constante cosmologique, exprime notre ignorance sur sa nature précise, mais en aucun cas un quelconque rapport avec le corps noir qui, lui, doit son nom à son aspect à 300 K (cf. *Thermodynamique*).

d) Analyse thermodynamique du modèle de Friedmann-Lemaître

Les deux équations fondamentales précédentes, issues du modèle FLWR, admettent une intégrale première en relation avec le premier principe de la thermodynamique. En effet, la première équation s'écrit :

$$\dot{R}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2 + \frac{\Lambda c^2}{3}R^2 \quad \text{d'où par dérivation} \quad 2\dot{R}\ddot{R} = \frac{8\pi G}{3}d(\rho R^2)dt + 2\frac{\Lambda c^2}{3}R\dot{R}$$

Si l'on remplace $\ddot{R}$ issu de cette dernière équation dans la seconde équation de Friedmann-Lemaître, on obtient :

$$2\dot{R} \left[-\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + 3p)R + \frac{\Lambda c^2}{3}R \right] = \frac{8\pi G}{3} \frac{d(\rho R^2)}{dt} + 2\frac{\Lambda c^2}{3}R\dot{R}$$

ce qui donne, en simplifiant :

$$\dot{R} [-(\rho c^2 + 3p)R] = d(\rho c^2 R^2) \quad \text{soit} \quad R \frac{d(\rho c^2 R^2)}{dt} + \rho c^2 R^2 \dot{R} = -3p R^2 \dot{R}$$

Finalement, on trouve :

$$d(\rho c^2 R^3) = -p d(R^3)$$

Pour interpréter cette égalité en terme énergétique, il suffit de multiplier ses deux membres par $4\pi/3$:

$$d \left(\frac{4\pi R^3 \rho c^2}{3} \right) = -p d \left(\frac{4\pi R^3}{3} \right)$$

Le terme de gauche représente la variation d'énergie interne d'une boule, de rayon R , et celui de droite le travail des forces de pression sur cette boule. Cette équation exprime le bilan du premier principe de la thermodynamique appliqué à un boule de rayon R , au cours d'une évolution adiabatique (cf. *Thermodynamique*).

e) Modèle vraisemblable d'Univers

À l'instant présent, les équations de Friedmann-Lemaître s'écrivent :

$$H_0^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)_0 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 - \frac{kc^2}{R_0^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\ddot{R}}{R} \right)_0 = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + 3p) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Il est commode d'écrire la première équation en introduisant les grandeurs réduites (sans dimension) suivantes :

$$\Omega_m = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{c,0}} \quad \Omega_k = -\frac{kc^2}{H_0^2 R_0^2} \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}$$

$\rho_{c,0} = 3H_0^2/(8\pi G)$ étant une masse volumique critique à l'instant présent. On a alors :

$$\Omega_m + \Omega_k + \Omega_\Lambda = 1$$

On peut aisément estimer $\rho_{c,0}$. En effet, comme $H_0 \approx 0,673 \text{ } H_{100}$, on a :

$$\rho_{c,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = \frac{3h_0^2 H_{100}^2}{8\pi G} = \frac{3 \times 0,673^2}{8\pi \times 6,67 \times 10^{-11} \times (3,08567 \times 10^{17})^2} \approx 8,5 \times 10^{-27} \text{ kg.m}^{-3}$$

soit en nombre de nucléons par unité de volume :

$$\rho_{c,0} = n_v m_p \quad \text{d'où} \quad n_{v,0} = \frac{\rho_{c,0}}{m_p} = \frac{8,5 \times 10^{-27}}{1,67 \times 10^{-27}} \approx 5 \text{ m}^{-3}$$

Quant à la seconde équation de Friedmann-Lemaître, on l'écrit souvent, en introduisant le *facteur de décélération* q , sans dimension :

$$q = -\frac{\ddot{R}}{RH^2} \quad \text{avec} \quad H = \frac{\dot{R}}{R}$$

ce qui donne :

$$-qH^2 = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + 3p) + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad \text{ou} \quad q = \frac{4\pi G}{3c^2 H^2}(\rho c^2 + 3p) - \frac{\Lambda c^2}{3H^2}$$

On a donc, à l'instant présent, en introduisant le facteur $w_0 = p/(\rho_0 c^2)$:

$$q_0 = \frac{\Omega_m(1 + 3w_0)}{2} - \Omega_\Lambda$$

Des mesures récentes (2013), effectuées par la mission européenne Planck, accréditent les caractéristiques suivantes de l'Univers :

$$p \ll \rho c^2 \quad \Omega_k \approx 0 \quad \Omega_m \approx 0,31$$

On en déduit :

$$\Omega_\Lambda \approx 0,69 \quad \Lambda \approx \frac{3H_0^2}{c^2} \Omega_\Lambda \approx 1,1 \times 10^{-52} \text{ m}^{-2} \quad \text{et} \quad q_0 \approx \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda = -0,535$$

Finalement, l'Univers serait :

- i) sans facteur de courbure, c'est-à-dire plat ($k = 0$),
- ii) avec une contribution de la matière ($\Omega_m \approx 0,31$), très supérieure à celle du rayonnement ($p \ll \rho c^2$), mais environ deux fois plus faible que celle associée à l'énergie noire : $\Omega_\Lambda \approx 0,69$,
- iii) en expansion accélérée ($q_0 = -0,535$),
- iv) d'âge $13,7 \text{ Gans}$, depuis la singularité définie par l'extrapolation de la loi de Lemaître-Hubble.

Jusqu'à présent, seule une partie de la matière a pu être détectée avec les moyens actuellement à notre disposition, soit une contribution à Ω_m d'environ 4%. Il s'agit de la masse (baryonique) des étoiles avec leurs planètes, des galaxies et autres superstructures, lesquelles sont constituées principalement d'hydrogène et d'hélium. La partie manquante, de l'ordre de 27%, est appelée *matière noire* ou mieux *matière transparente*. Ce concept fut introduit en 1933 par l'astronome suisse F. Zwicky pour interpréter la grande différence constatée entre la masse de l'amas de galaxies Coma et la somme des masses des galaxies qui le constituent. Bien plus tard, l'astronome américaine Vera Rubin constata, elle-aussi, pour la vitesse des étoiles situées à la périphérie de la galaxie Andromède, une grande différence entre la valeur mesurée de leur vitesse et celle déduite de la théorie de Newton. La nature de la matière noire est encore mystérieuse ; on se demande si cette matière ne serait pas elle-aussi baryonique, mais difficilement détectable par les instruments actuels, ou si, au contraire, on ne devrait pas l'attribuer à une nouvelle particule inconnue ; une autre solution consisterait à modifier les lois de Newton à grande distance, la loi de gravitation universelle et même la deuxième loi reliant force et accélération.

V.3. — Ondes gravitationnelles

a) Ondes électromagnétiques et ondes gravitationnelles

L'analogie entre l'électromagnétisme et la gravitation a suggéré l'existence d'ondes gravitationnelles semblables aux ondes électromagnétiques. C'est ainsi que Poincaré parle d'ondes gravifiques dès 1905. Cependant, ces ondes n'ont été prédites que par la RG. En outre, cette dernière prévoit, d'une part une vitesse de propagation égale à c , d'autre part des difficultés d'observation, car la constante de structure fine α_e est bien plus grande que le facteur gravitationnel α_g (cf. chapitre 8) :

$$\alpha_e = \frac{q_e^2}{\hbar c} = \frac{e^2/(4\pi\epsilon_0)}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} \approx 7,3 \times 10^{-3} \quad \text{et} \quad \alpha_g = \frac{Gm_p^2}{\hbar c} \approx 0,6 \times 10^{-39}$$

L'amplitude de ces ondes est donc très faible : même lorsqu'elles sont produites par de grandes explosions (collisions d'étoiles par exemple), la perturbation de l'espace-temps sur la Terre reste infime pour les détecteurs actuels ; actuellement, ces derniers ne pourraient déceler qu'une interaction entre deux trous noirs ou entre un trou noir et une étoile à neutrons.

b) Rôle du terme quadrupolaire du potentiel de gravitation

Contrairement au rayonnement électromagnétique qui fait jouer un rôle essentiel au terme dipolaire du potentiel électromagnétique (cf. *Électromagnétisme*), le rayonnement gravitationnel est dû principalement au terme quadrupolaire. En effet, on sait que le potentiel de gravitation se développe à grande distance selon (cf. *Mécanique*) :

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 \quad \text{avec} \quad \Phi_0 = -G \frac{M}{r} \quad \Phi_1 = -G \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad \Phi_2 = -G \frac{D}{2r^5}$$

$\mathbf{p}$ étant le moment dipolaire et D le moment quadrupolaire de la distribution. Si P est un point de la distribution de masse, on a :

$$M = \int_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V} \quad \mathbf{p} = \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{OP} \, d\mathcal{V} \quad D = \int_{\mathcal{V}} \rho [3(\mathbf{OP} \cdot \mathbf{r})^2 - r^2 OP^2] \, d\mathcal{V}$$

Comme le rayonnement fait apparaître la dérivée seconde du potentiel Φ par rapport au temps, il vient en dérivant deux fois Φ , r étant fixé et ρ indépendant du temps :

$$\frac{d^2 M}{dt^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{OP} \, d\mathcal{V} = \frac{M d^2 \mathbf{OC}}{dt^2} = \mathbf{0}$$

puisque le système est isolé. Il en résulte que le terme quadrupolaire joue un rôle majeur dans la propagation des ondes gravitationnelles.

c) Tentative de détection des ondes gravitationnelles

Dans le cas du pulsar PSR 1913+16, étudié par J. Taylor et son élève R. Hulse, dans les années 1970, la variation de la période d'émission électromagnétique a pu être prédite avec une excellente précision en attribuant cette perte d'énergie électromagnétique à l'émission d'ondes gravitationnelles. Ce résultat leur valut le prix Nobel en 1993.

Il existe actuellement plusieurs sites mondiaux de détection des ondes gravitationnelles dont les principaux, VIRGO en Europe et LIGO aux États-Unis, utilisent comme instrument un interféromètre de Michelson (cf. *Optique*), à bras longs, capable de détecter un très faible décalage de franges interférentielles, provoqué par une perturbation gravitationnelle de l'espace-temps.

i) VIRGO (Réception des Ondes Gravitationnelles produites par des phénomènes VIolents dans l'Univers) Instrument franco-italien, construit à Cascina, près de Pise.

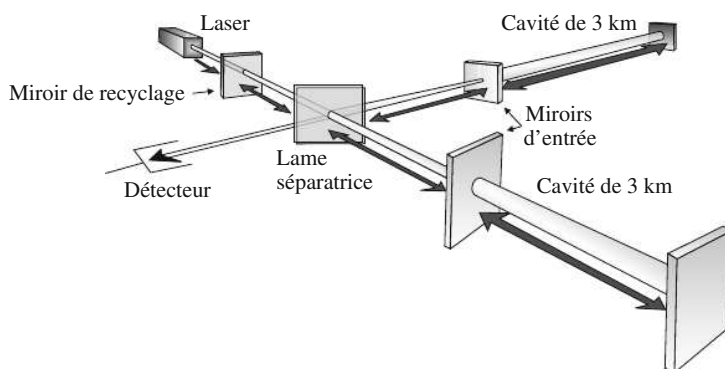


FIG. 10.24.

ii) LIGO (*Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory*), installé en deux exemplaires aux États-Unis, l'un à Hanford (dans l'état de Washington) et l'autre à Livingstone en Louisiane.

Sur la figure (Fig. 10.24), on a représenté un schéma de VIRGO. Comme ces perturbations sont extrêmement faibles et de fréquence de l'ordre de 1 kHz, les conditions à réaliser sont extrêmement sévères :

i) La puissance de la source laser doit être de 1 kW, alors que les lasers courants que l'on utilise, comme source continue en optique, ont une puissance de quelques mW. Aussi utilise-t-on un miroir de recyclage permettant de récupérer une partie de l'énergie fournie par la source et réfléchi par les différents miroirs de l'interféromètre.

ii) La fréquence du laser doit être définie avec une précision relative $\Delta\nu/\nu \approx 10^{-20}$, alors que la meilleure stabilité spectrale, connue à ce jour, est de 10^{-13} sur un laser à ions néodyme (Nd-YAG), de longueur d'onde $\lambda = 1,06 \mu\text{m}$ (proche infra-rouge).

iii) Les dimensions des bras doivent atteindre 150 km, ce que l'on réalise à l'aide de multiples réflexions intermédiaires entre miroirs distants de 3 km.

iv) Le vide dans ces bras doit être très poussé (pression inférieure à 10^{-7} Pa, valeur mille fois plus faible que celle dans un microscope électronique).

v) Les miroirs doivent être soigneusement suspendus pour éviter toute vibration (déplacements inférieurs à 10^{-18} m).

vi) Enfin, il est nécessaire de réduire considérablement tous les bruits résiduels, notamment le bruit associé à l'émission des photons, selon la loi statistique de Poisson (cf. *Électronique*).

Malgré la très grande difficulté de mise en œuvre de ces installations gigantesques, des premiers résultats de détection *directe* d'ondes gravitationnelles, attribuées à une collision entre deux trous noirs, ont été publiés en février 2016.

CONCLUSION

Rappelons les résultats essentiels de la théorie d'Einstein sur la gravitation.

1) En raison de l'identité de la masse grave et de la masse inerte, la gravitation doit être considérée, non comme une force, mais comme une modification géométrique de l'espace-temps par la matière.

2) L'analyse d'Einstein conduit d'abord à introduire les référentiels inertiels, dans lesquels le principe de l'inertie est réalisé, et ensuite à affirmer que, pour exprimer les lois de la physique, aucun système de référence ou système de coordonnées n'est privilégié.

3) L'équation covariante d'Einstein reliant le mouvement et la géométrie de l'espace-temps est de nature tensorielle : entre le tenseur géométrique $[G]$, courbure de l'espace-temps, et le tenseur d'énergie $[E]$, on a la relation suivante :

$$[G] = \kappa [E] \quad \text{avec} \quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4} = 2,069 \times 10^{-43} \text{ N}^{-1}$$

4) L'avance du périhélie de la planète Mercure, la déviation de la lumière par les étoiles, les mirages gravitationnels, les trous noirs peuvent être interprétés à l'aide de la théorie d'Einstein, à partir de la métrique spatiale à symétrie sphérique de Schwarzschild.

5) De même, cette théorie permet d'expliquer le décalage spectral d'origine gravitationnelle.

6) Enfin, avec Einstein, la cosmologie est devenue une science à part entière. Rappelons les formules de Friedmann-Lemaître avec la constante cosmologique Λ :

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad \text{et} \quad \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + 3p) - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Ces équations, caractéristiques d'un Univers en expansion, permettent d'interpréter des données observationnelles décisives :

i) le rayonnement du fond cosmique à $T = 2,728 \text{ K}$,

ii) la loi d'Hubble entre le décalage spectral relatif z , de nature cosmologique, et la distance d qui nous sépare des galaxies :

$$cz = H_0 d \quad \text{avec} \quad H_0 = h_0 H_{100} \quad \text{où} \quad H_{100} = 100 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1} = \frac{1}{3,085\,677 \times 10^{17}} \text{ s}^{-1}$$

Actuellement, on admet les valeurs suivantes du coefficient relatif d'Hubble h_0 et de la constante Λ :

$$h_0 \approx 0,7 \quad \text{et} \quad \Lambda \sim 10^{-52} \text{ m}^{-2}$$

La théorie d'Einstein prévoit aussi la propagation, à la vitesse c , d'ondes gravitationnelles, que des expériences, actuellement mises en œuvre aux États-Unis et en Europe, tentent de mettre en évidence.

Retenons la différence essentielle entre les points de vue newtonien et einsteinien de la gravitation : avec Newton, la suppression de la matière et de l'énergie laisse intact le cadre spatio-temporel ; avec Einstein, cette suppression de la matière et de l'énergie fait disparaître en même temps l'espace et le temps.

EXERCICES ET PROBLÈMES

P10– 1. Boule de pétanque et balle de tennis

On se propose de comparer la chute dans l'air, sur la Terre, d'une boule de pétanque (masse $m_p = 700$ kg, diamètre $2R_p = 7,6$ cm) et d'une balle de tennis (masse $m_t = 58$ g, diamètre $2R_t = 6,7$ cm) d'une hauteur de 2 m. On admet que la force de frottement visqueux est de la forme $\mathbf{F}_f = -Av^2 (\mathbf{v}/v)$, avec $A = C_x \rho S/2$, ρ étant la masse volumique de l'air, S la surface des boules projetée dans un plan perpendiculaire à la direction du mouvement et C_x un facteur de profil du corps égal à 0,44 pour une boule.

1. En négligeant la poussée d'Archimède due à l'air, montrer que la vitesse v a pour expression :

$$v = v_l \tanh\left(\frac{gt}{v_l}\right)$$

v_l étant une quantité que l'on exprimera en fonction de m , g et A . Retrouver l'approximation de la chute libre. Applications numériques.

2. En déduire l'expression suivante de la position x du centre de masse de la boule, le long de la verticale descendante :

$$x = \frac{v_l^2}{g} \ln \left[\cosh\left(\frac{gt}{v_l}\right) \right]$$

3. Quel est l'écart des deux boules lorsque la première atteint le sol ? Application numérique.

P10– 2. Effet de marée dans une cabine spatiale

1. Rappeler l'expression de la loi fondamentale de la dynamique, appliquée à un point A , de masse m , dans le référentiel $\mathcal{R}^*$ du centre de masse d'une cabine spatiale.

2. Quelle est la force de marée maximale qu'exerce la Terre sur un cosmonaute, de masse $m = 75$ kg, de hauteur $L = 1,8$ m, dans une cabine orbitant autour de la Terre, à l'altitude de $h = 800$ km au-dessus du sol terrestre ?

P10– 3. Effet de marée dans un amas de galaxies

Une galaxie G_1 , assimilée à un point A_1 , de masse M_1 , exerce un champ de gravitation en différents points d'un amas de galaxies G_2 , assimilée à une distribution sphérique homogène, de rayon R , de masse M_2 et de centre C_2 , situé à la distance d de A_1 .

1. Trouver l'expression du champ de gravitation produit par l'amas galactique G_2 en un point de sa surface ?

2. Exprimer, en fonction de M_1 , d et R , la valeur maximale de la différence du champ de gravitation produit par G_1 en tout point de G_2 .

3. Quelle doit-être la distance d pour que l'effet de marée dans G_2 neutralise l'attraction gravitationnelle ? Comparer d et R_2 pour $M_2 = 2 \times 10^3 M_1$.

P10– 4. Grandeurs fondamentales de Planck

On considère les grandeurs fondamentales suivantes : la constante d'Einstein c , la constante de gravitation G et la constante de Planck h .

1. Rappeler la valeur de ces constantes en précisant leurs unités physiques.
2. Trouver les dimensions physiques des quantités suivantes :

$$Q_1 = \frac{hG}{c^3} \quad Q_2 = \frac{hc}{G} \quad \text{et} \quad Q_3 = \frac{hc^5}{G}$$

3. Calculer la longueur de Planck l_P , la masse de Planck m_P , l'énergie de Planck $\mathcal{E}_P$, la durée de Planck τ_P et la température de Planck T_P , définies selon :

$$l_P = \left(\frac{\hbar G}{c^3} \right)^{1/2} \quad m_P = \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{1/2} \quad \mathcal{E}_P = m_P c^2 \quad \tau_P = \frac{l_P}{c} \quad T_P = \frac{m_P c^2}{k_B}$$

h étant la constante de Planck, $\hbar = h/(2\pi)$ et $k_B = 1,38 \times 10^{-38} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ étant la constante de Boltzmann. Quelle relation simple existe-t-il entre l'énergie de Planck et la durée de Planck ?

4. Comparer l'énergie potentielle de gravitation d'une distribution sphérique de matière, dont la masse est celle de Planck et le rayon la longueur de Planck, à son énergie de masse.

P10– 5. Mirages gravitationnels

On observe l'image gravitationnelle que donne, d'une étoile-objet A_o , située à la distance D_o d'un observateur terrestre T , une masse ponctuelle M placée en C , sur la ligne de visée $A_o T$, à la distance D_c de T . On désigne par b la distance qui sépare C du point I situé dans le plan transversal Oxy , perpendiculaire à l'axe Cz orienté selon CT . On peut considérer que la trajectoire lumineuse est constituée de deux portions rectilignes, l'une issue de A_o et l'autre passant par T .

1. Trouver, en fonction de D_c , b et $d_o = D_o - D_c$, la quantité $L_c = A_o I T$.
2. Calculer, en fonction de d_o , D_c et b , la quantité :

$$L_S = r_S \int_{A_o I T} \frac{dr}{r} \quad \text{avec} \quad r_S = \frac{2GM}{c^2}$$

r étant la coordonnée radiale de la particule de masse nulle, comptée à partir de l'origine C .

3. En appliquant le principe de Fermat, montrer que l'angle de déviation de la trajectoire lumineuse vaut, en valeur absolue, $|\alpha| = \Lambda_m/b$, Λ_m étant une longueur que l'on exprimera en fonction de r_S .

Application à la déviation d'un rayon lumineux par le bord de la planète Jupiter dont on rappelle la valeur du rayon et celle de la masse, respectivement : $r_J = 71,7 \times 10^6 \text{ m}$ et $M_J = 1,91 \times 10^{27} \text{ kg}$.

P10– 6. Déviation de la lumière par le Soleil

Le Soleil, assimilé à un point S de masse $M_S = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$, provoque la déviation d'un faisceau lumineux parallèle incident provenant d'un objet très éloigné.

1. Calculer, en seconde d'arc, l'angle de déviation d'un rayon lumineux passant à une distance du centre S égale à $r = 1,4 \times 10^9 \text{ m}$.

2. En déduire que le Soleil fait converger les rayons lumineux, passant à une même distance de S , en un point F dont on calculera la position par rapport à S .

3. On dit que le Soleil se comporte comme une lentille de verre, avec une forte aberration sphérique. Pourquoi ? Quelle devrait-être la variation de r autour de sa valeur pour que la variation relative de focale soit inférieure à 0,001 ?

P10– 7. Décalage spectral gravitationnel d'une onde émise par le Soleil et détectée par la Terre

1. Trouver le décalage spectral, dû au champ de gravitation du Soleil, pour la raie H_α , de longueur d'onde $\lambda = 656,3 \text{ nm}$, qu'il émet.

2. Quel est le décalage spectral relatif, provoqué par le champ de gravitation terrestre, pour cette même raie ? Commenter.

P10– 8. Loi d'Hubble et principe cosmologique

On se propose de montrer que la loi d'Hubble est compatible avec le principe cosmologique, selon lequel il n'y a pas de position privilégiée dans l'Univers. Pour cela, on considère trois galaxies dans l'Univers G_1 , G_2 , G_3 , en mouvement les unes par rapport aux autres.

1. Montrer que, si les mouvements relatifs de G_1 par rapport à G_3 et de G_2 par rapport à G_3 satisfont à la loi d'Hubble, le mouvement relatif de G_1 par rapport à G_2 suit aussi la loi d'Hubble.

2. Le point G_3 représente notre galaxie, alors que G_1 , G_2 sont deux autres galaxies, dans les constellations de la Grande Ourse et de l'Hydre, situées aux distances suivantes :

$$d_{31} = 9,18 \times 10^{24} \text{ m} \quad d_{32} = 37,1 \times 10^{24} \text{ m}$$

Les décalages spectraux relatifs sont $z_{31} = 0,05$ et $z_{32} = 0,225$; en outre, l'angle que font, entre elles, les directions d_{31} et d_{32} est $\theta \approx 90^\circ$. Trouver le décalage spectral z_{12} .

P10– 9. Décalages spectraux cosmologiques

1. Le décalage spectral relatif d'un amas de galaxies, situé dans la constellation du Bouvier, vaut $z = 0,14$. En déduire la distance qui nous sépare de cet amas.

2. Trouver la distance du quasar double UM673 dont le décalage spectral relatif z vaut 2,72. Quelle est la distance qui sépare ses deux composantes, sachant leur distance angulaire est de 2,2 secondes d'arc ?

P10– 10. Bilan énergétique d'une sphère matérielle de rayon R

Une sphère, dont le rayon est la distance d'échelle $R(t)$, contient une masse uniformément répartie avec une énergie interne volumique ρc^2 . Elle est soumise de la part de l'extérieur à une pression uniforme $p(t)$.

1. Appliquer le premier principe de la thermodynamique à la sphère matérielle, de rayon R , de masse volumique ρ , soumise à une pression extérieure p . En déduire la relation suivante :

$$\frac{d[R^3(\rho c^2 + p)]}{dt} = R^3 \frac{dp}{dt}$$

2. Établir la relation entre ρ et R , successivement pour $p \ll \rho c^2$ et $p = \rho c^2/3$. Calculer, dans ces deux cas, le rapport des masses volumiques, lorsque R est multiplié par 10 ?

P10– 11. Force associée à la constante cosmologique

Une distribution sphérique uniforme, de masse M , créée en un point quelconque de l'espace, à la distance r de son centre, le potentiel gravitationnel $\Phi(r)$. Les équations d'Einstein, avec la constante cosmologique Λ , donnent, dans l'approximation newtonienne, l'équation différentielle suivante :

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho - \Lambda c^2 \quad \text{avec} \quad \Delta = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right)$$

ρ étant la masse volumique et $\Lambda = 10^{-52}$ la constante cosmologique exprimée en SI.

1. À l'aide d'une équation aux dimensions, trouver l'unité physique SI de Λ ainsi que celle de Λc^2 .

2. Montrer que le champ de gravitation $\mathcal{G}$ présente deux contributions, l'une newtonienne attractive et l'autre cosmologique répulsive. Quelle est l'expression de cette dernière en fonction de r ?

3. Calculer ces deux contributions produites par le Soleil sur la Terre. À quelle distance du centre du Soleil, ces contributions sont-elles égales ?

P10– 12. Paradoxe du ciel noir ou paradoxe d'Olbers

Le paradoxe du ciel noir peut être formulé ainsi : pourquoi, la nuit, le ciel est-il obscur, malgré la présence des étoiles, puisque, en supposant l'Univers infini notre ligne de visée rencontre toujours une étoile ? Il est appelé aussi paradoxe d'Olbers, du nom de l'astronome allemand W. Olbers qui, en 1823, tenta de l'interpréter, sans succès, par l'absorption de la lumière dans l'espace interstellaire. Une manière simple de lever ce paradoxe consiste à comparer la durée nécessaire à la lumière pour parcourir la distance qui sépare en moyenne deux étoiles à celle de l'Univers qui est d'environ 13,7 Gan.

1. Sachant que la matière est répartie dans l'Univers avec une densité n_A d'environ cinq nucléons par mètre cube, calculer la densité d'étoiles n_s , telles que le Soleil, qui peuplent l'Univers.

2. Le libre parcours moyen d'un photon émis, puis diffusé par les étoiles, a pour expression (cf. *Thermodynamique*) :

$$\ell = \frac{1}{n_e \pi R_e^2}$$

n_e étant la densité des centres diffuseurs et R_e le rayon du centre diffuseur. Calculer sa valeur ainsi que la durée moyenne τ qui sépare deux collisions d'un photon avec une étoile. Exprimer cette durée en Gan. Commenter. On rappelle les valeurs de la masse du proton, celle du Soleil, le rayon de ce dernier et la valeur du Gan :

$$m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg} \quad M_S = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg} \quad R_S = 0,69 \times 10^9 \text{ m} \quad \text{et} \quad 1 \text{ Gan} = 3,156 \times 10^{16} \text{ s}$$

P10– 13. Matière noire dans une galaxie spirale

Les galaxies spirales peuvent être schématisées par un disque et un noyau sphérique O , de masse M_n contenant pratiquement toute la masse de la galaxie. Cette hypothèse est justifiée, car la densité d'étoiles observées dans le noyau est environ cent fois plus grande que la densité à l'extérieur. Dans le disque, chaque constituant A (étoile, nuage de dihydrogène, etc.), de masse m , situé à la distance r du centre O , est animé d'un mouvement circulaire uniforme de vitesse v .

1. En appliquant la loi fondamentale de la dynamique à A , soumis à l'action de O , établir la relation donnant v en fonction de M_n et r , d'une part pour r plus grand que le rayon R_n du noyau, d'autre part pour $r < R_n$. Représenter v en fonction de r .

2. On mesure v par effet Doppler-Fizeau appliqué à la radiation électromagnétique, de longueur d'onde $\lambda = 21$ cm, caractéristique du spectre de l'atome d'hydrogène dans le domaine centimétrique. Le décalage spectral maximal, pour un élément A observé, situé à la distance $r = 3,46$ kpc, a donné $v = 325 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Calculer la valeur de ce décalage déterminée expérimentalement. Comparer M_n à la masse du Soleil M_S .

3. On constate expérimentalement que la vitesse v augmente d'abord proportionnellement à r , jusqu'à une valeur maximale qui ne varie pratiquement plus avec r . Il apparaît une contradiction entre l'observation et le modèle précédent. Laquelle ? On lève cette contradiction en supposant l'existence d'une distribution continue de matière gazeuse dans laquelle se trouverait plongée la galaxie. Cette matière est qualifiée de noire. Pourquoi ?

P10– 14. Modèle d'Univers non stationnaire d'Einstein et de Sitter

En 1932, Einstein et de Sitter publièrent un modèle d'Univers non stationnaire, sans facteur de courbure, sans pression et sans constante cosmologique.

1. Montrer qu'un tel modèle satisfait aux deux équations suivantes :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho \quad \text{et} \quad \rho R^3 = \text{Cte}$$

dans lesquelles H est le coefficient d'Hubble, ρ la masse volumique et R la distance d'échelle.

2. En déduire que $R(t)$ varie au cours du temps t selon une loi en $t^{2/3}$.

3. Calculer la valeur constante du facteur de décélération q .

4. Trouver la variation au cours du temps du coefficient d'Hubble $H(t)$ dans ce modèle.

P10– 15. Modèle de Weinberg de l'expansion primordiale

Le modèle d'Univers de S. Weinberg est adapté à l'étude de l'expansion primordiale de l'Univers, c'est-à-dire au cas où la distance d'échelle $R(t)$ est suffisamment faible pour que l'on puisse négliger, dans les équations de Friedmann-Lemaître, le terme cosmologique contenant Λ et le facteur de courbure k . Dans ce modèle d'Univers primordial, les particules sont ultra-einsteiniennes ; l'énergie volumique ρc^2 qui apparaît dans l'équation de Friedmann doit être remplacée par une quantité $w = A/R^4$, A étant un coefficient constant.

1. Montrer que $R(t)$ est de la forme $R(t) = C_W t^{1/2}$, C_W étant un coefficient constant.

2. La température T est reliée à w par la relation $w = \sigma_B T^4$ avec $\sigma_B = 0,756 \times 10^{-15}$ SI. En déduire l'évolution de T au cours du temps.

3. Calculer la température de l'Univers au bout de 1 s, puis au bout de 3 min.

Annexe 1. Systèmes d'unités

La physique ne se réduit pas à une analyse qualitative des phénomènes observés, car cela la rendrait imprécise et difficile à formuler voire impossible. Aussi sommes-nous conduits à introduire la mesure d'une grandeur physique, c'est-à-dire sa comparaison à d'autres grandeurs, évidemment de même nature. Par exemple, on mesure la longueur d'un fil tendu en la comparant à celle d'une règle prise comme unité, ce que l'on réalise en faisant coïncider les extrémités du fil à deux des traits équidistants d'une règle graduée évidemment au repos ; de même, on estime la masse d'un corps en la comparant à celle d'une masse étalon, par exemple à l'aide d'une balance, laquelle permet en réalité de comparer leurs poids qui sont proportionnels aux masses.

La question essentielle qui se pose est alors la suivante : quel système d'unités de base choisir, compte tenu des relations physiques entre les différentes grandeurs, et combien d'unités de base adopter, sachant que le critère principal est la précision des résultats obtenus ?

I. — UNITÉS DE BASE ET UNITÉS DÉRIVÉES

Le choix des unités de base est *conventionnel* et dépend essentiellement de la *commodité de réalisation des étalons* par la communauté internationale. Notons que cette dernière exigence d'un système d'unités universel, valable pour tous les peuples, sans changement au cours du temps, animait déjà les partisans du système métrique, proposé dès 1790 sous l'impulsion de Condorcet. Cette même exigence conduit les scientifiques à proposer, dès 2018, un système d'unités totalement dématérialisées s'appuyant sur cinq constantes physiques fondamentales :

- i) la constante d'Einstein c , ou vitesse de la lumière dans le vide,
- ii) la constante de Planck h , ou quantum d'action,
- iii) la charge électrique élémentaire e , ou charge du proton,
- iv) la constante de Boltzmann k_B , qui réunit température et énergie,
- v) la constante d'Avogadro N_A qui détermine le passage de l'analyse microscopique à l'échelle macroscopique.

En fixant les valeurs de ces constantes, on abandonne la matérialisation des unités de base et, en outre, on réalise le rêve initial de Condorcet, un système d'unités *valable au cours du temps et pour toutes les nations*.

Historiquement, ce processus d'universalisation des unités de base, initié par J. Maxwell en 1870, qui souhaitait des références extrahumaines, fut développé par le physicien irlandais G. Johnstone-Stoney en 1881, puis achevé par M. Planck en 1899, à partir des constantes G , c et h . L'analyse dimen-

sionnelle donne les grandeurs suivantes, qui sont la durée, la longueur et l'énergie de Planck, d'expressions respectives, $\hbar$ étant $h/(2\pi)$:

$$t_P = \left(\frac{\hbar G}{c^5} \right)^{1/2} \approx 0,54 \times 10^{-43} \text{ s} \quad l_P = c t_P = \left(\frac{\hbar G}{c^3} \right)^{1/2} \approx 1,6 \times 10^{-35} \text{ m}$$

d'où l'énergie de Planck :

$$\mathcal{E}_P = \frac{\hbar}{t_P} = \left(\frac{\hbar c^5}{G} \right)^{1/2} \approx 1,95 \times 10^9 \text{ J} \approx 1,22 \times 10^{19} \text{ GeV}$$

et donc la masse et la température correspondantes :

$$m_P = \frac{\mathcal{E}_P}{c^2} \approx 2,17 \times 10^{-8} \text{ kg} \quad \text{et} \quad T_P = \frac{\mathcal{E}_P}{k_B} \approx 1,42 \times 10^{32} \text{ K}$$

Du seul point de vue d'une construction universelle et cohérente d'un système d'unités, l'adoption de trois unités mécaniques de base (longueur, masse, durée) fut proposée par Maxwell en 1863, à travers le système CGS (Centimètre, Gramme, Seconde), les autres unités, notamment électriques, étant dérivées à l'aide des lois physiques les reliant aux précédentes ; dans ce système, la force s'exprime en *dyne* (du mot grec « dunamis »), et l'énergie ainsi que le travail en *erg* (du mot grec « erg »). Dans ce système, on distinguait les unités électrostatiques, dans lesquelles la force électrostatique ne contenait pas de constante multiplicative (facteur 1 au lieu du coefficient $1/(4\pi\epsilon_0)$ en SI), des unités électromagnétiques choisies de telle sorte que la force magnétostatique entre deux courants ne contienne pas de constante multiplicative (facteur 1 au lieu du coefficient $\mu_0/(4\pi)$ en SI).

Dans la pratique instrumentale, ce système d'unités, qui subordonnait les mesures électriques aux mesures mécaniques, s'avéra peu précis et donc techniquement inefficace. Aussi le remplaça-t-on par le système MKSA (Mètre, Kilogramme, Seconde, Ampère), dans lequel, à la suggestion de l'ingénieur italien G. Giorgi, on substitua le mètre et le kilogramme au centimètre et au gramme respectivement, puis on ajouta l'ampère pour les mesures électriques. En outre, on « rationalisa » l'ensemble en introduisant explicitement le facteur $1/(4\pi)$, de telle sorte que le facteur π disparaisse des expressions relatives à des systèmes présentant une symétrie plane, et en revanche apparaisse dans celles relatives à des systèmes à symétrie circulaire.

La nécessité de mesurer les grandeurs physiques avec une précision encore meilleure a incité les scientifiques à adopter un nombre d'unités de base supérieur à *quatre*, ce qui permit, en outre, d'éviter que des grandeurs physiques de natures différentes soit exprimées avec la même unité ; par exemple, en unités électrostatiques, la capacité d'un condensateur a la dimension d'une longueur !

Dans le système d'unités actuel, le nombre d'unités de base est *sept* ; ce nombre sera conservé en 2018.

Remarque : Dans la recherche théorique d'un faible nombre d'unités de base, le système de Gauss à trois unités mécaniques pourrait même être réduit à l'unité : il suffirait de relier l'unité de longueur à l'unité de durée, en gardant une valeur exacte pour la constante d'Einstein, et d'écrire la loi de la gravitation universelle sans constante de Newton.

II. — LE SYSTÈME INTERNATIONAL EN 2016

II.1. — Unité de temps

La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition hyperfine entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.

Cette définition se réfère à un atome de césium au repos, à une température extrapolée de 0 K. Précisons que l'atome de césium n'est pas perturbé par le rayonnement du corps noir, car il est en équilibre dans un environnement maintenu à une température très proche de 0 K.

II.2. — Unité de longueur

Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299 792 458 de seconde.

Il en résulte que la vitesse de la lumière dans le vide est égale *exactement* à la constante d'Einstein $c = 299\,792\,458 \text{ m.s}^{-1}$. Le prototype international du mètre originel est toujours conservé au BIPM dans les conditions fixées en 1889.

II.3. — Unité de masse

Le kilogramme est l'unité de masse ; il est égal à la masse du prototype international du kilogramme.

Cependant, en raison de l'accumulation inévitable de polluants sur les surfaces, le prototype international de masse, défini depuis 1879, subit une contamination réversible de surface d'environ 1 µg par an en masse. C'est la raison pour laquelle la masse de référence du prototype international est celle qui suit immédiatement un nettoyage selon une méthode spécifique. La masse de référence ainsi définie est utilisée pour étalonner les étalons nationaux en platine iridié.

II.4. — Unité de courant électrique

L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force égale à 2×10^{-7} newton par mètre de longueur.

La constante magnétique μ_0 , ou perméabilité du vide, est alors égale à $4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$.

II.5. — Unité de température thermodynamique

Le kelvin, unité de température thermodynamique, est la fraction 1/273,16 de la température thermodynamique du point triple de l'eau.

La température thermodynamique du point triple de l'eau vaut alors 273,16 K.

La température en degrés Celsius est liée à la température en degrés kelvins par la relation : $T(^{\circ}\text{C}) = T(\text{K}) - T_0$, $T_0 = 273,15 \text{ K}$ étant le point de congélation de l'eau, à la pression $p_0 = 1 \text{ bar}$.

II.6. — Unité de quantité de matière

La mole (symbole mol) est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kilogramme de carbone 12.

Lorsqu'on emploie la mole, les entités élémentaires doivent être spécifiées et peuvent être des atomes, des molécules, des ions, des électrons, d'autres particules ou des groupements spécifiés de telles particules. La masse molaire du carbone 12 est égale à 0,012 kilogramme par mole exactement, $M(12C) = 12 \text{ g.mol}^{-1}$. Dans cette définition, on se réfère à des atomes de carbone 12 non liés, au repos et dans leur état fondamental.

II. 7. — Unité d'intensité lumineuse

La candela est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence $5,40 \times 10^{14}$ hertz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est 1/683 watt par stéradian.

L'efficacité lumineuse spectrale K d'un rayonnement monochromatique de fréquence $5,4 \times 10^{14}$ hertz est égale à 683 lumens par watt : $K = 683 \text{ lm.W}^{-1} = 683 \text{ cd.sr.W}^{-1}$.

III. — DIFFÉRENTS SYSTÈMES D'UNITÉS ÉLECTRIQUES

III. 1. — Analyse générale

a) Constantes électriques

Admettant que l'intensité électrique est définie par le flux (de charges électriques pendant l'unité de temps) à travers une surface ouverte, le point de départ de l'analyse est l'écriture des trois relations empiriques de l'électromagnétisme : la loi de Coulomb, la loi d'Ampère et la loi de force de Lorentz, en introduisant trois constantes électriques K_1 , K_2 et K_3 .

i) La force de Coulomb qu'exerce, sur une charge élémentaire q_1 , une autre charge électrique q_2 distante de r , s'écrit :

$$\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = K_1 \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{e}_r \quad \text{avec} \quad \mathbf{r} = \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

ii) La loi d'Ampère relie la circulation du champ magnétique $\mathbf{B}$, le long d'un contour fermé C enlaçant un conducteur, à l'intensité I du courant qui parcourt ce dernier, selon :

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 4\pi K_2 I$$

iii) La loi de force de Lorentz donne l'expression de la force qu'exerce, sur une charge q de vitesse $\mathbf{v}$, un champ électromagnétique $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + K_3 \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

b) Relation entre les trois constantes K_1 , K_2 et K_3

Une analyse dimensionnelle des trois relations précédentes donne :

$$K_1 [Q]^2 [L]^{-2} = K_3 [Q] [L] [T]^{-1} [B] = K_2 K_3 [Q] [L] [T]^{-1} [I] [L]^{-1}$$

d'où :

$$\frac{K_2 K_3}{K_1} ([L] [T]^{-1})^2 = K_f$$

K_f étant un simple facteur (sans dimension physique). La vitesse fondamentale qui apparaît étant naturellement c , les trois constantes électriques K_1, K_2, K_3 sont reliées par l'équation :

$$\frac{K_2 K_3}{K_1} c^2 = K_f$$

Dans les systèmes rationalisés, $K_f = 4\pi$. En revanche dans les autres $K_f = 1$.

c) *Écriture des équations de Maxwell avec les constantes K_1, K_2, K_3*

Avec ces constantes électriques, les deux équations structurelles de Maxwell s'écrivent :

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad \text{rot } \mathbf{E} + K_3 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

la même constante K_3 que précédemment s'imposant par une simple analyse dimensionnelle. Il résulte de ces deux équations l'existence du potentiel électromagnétique ($V, \mathbf{A}$) associé au champ électromagnétique ($\mathbf{E}, \mathbf{B}$) selon :

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad \text{et} \quad \text{rot} \left(\mathbf{E} + K_3 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0} \quad \text{d'où} \quad \mathbf{E} = -\text{grad } V - K_3 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Quant aux deux équations reliées aux sources (charge volumique ρ et courant volumique $\mathbf{J}$), elles peuvent s'écrire, par analogie avec les propriétés du champ de gravitation (cf. *Mécanique*) :

$$\frac{1}{K_1} \text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \frac{1}{K_2} \text{rot } \mathbf{B} - \frac{1}{K_1} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi\mathbf{J}$$

le facteur $1/K_1$ affectant le champ électrique dans sa relation aux charges et le facteur $1/K_2$ affectant le champ magnétique dans sa relation aux courants.

Dans les milieux matériels, deux nouveaux champs doivent être introduits, le vecteur polarisation volumique $\mathbf{P}$ et le vecteur aimantation volumique $\mathbf{M}$, produits dans la matière par des charges et des courants induits supplémentaires, différents des charges et des courants extérieurs ρ_{ex} et $\mathbf{J}_{ex}$ (cf. *Électromagnétisme*). Précisément :

$$\rho_{in} = -\text{div } \mathbf{P} \quad \text{et} \quad \mathbf{J}_{in} = \frac{1}{K_3} \text{rot } \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

En explicitant les charges et les courants dans les équations de Maxwell, on obtient :

$$\text{div} \left(\frac{1}{K_1} \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \right) = 4\pi\rho_{ex} \quad \text{et} \quad \text{rot} \left(\frac{1}{K_2} \mathbf{B} - \frac{4\pi}{K_3} \mathbf{M} \right) - \frac{1}{K_1} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - 4\pi \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = 4\pi\mathbf{J}_{ex}$$

III. 2. — Équations de Maxwell dans SI

Dans SI :

$$K_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad K_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \quad K_3 = 1$$

d'où, la force de Lorentz :

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

et les équations de Maxwell :

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{B} &= 0 & \text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \mathbf{0} \\ \text{div } \mathbf{D} &= \rho_{ex} & \text{rot } \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{J}_{ex} \end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \text{et} \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

Les relations entre le champ électromagnétique ($\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$) et le potentiel électromagnétique sont évidemment (cf. *Électromagnétisme*) :

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad \text{et} \quad \mathbf{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

III. 3. — Équations de Maxwell dans le système de Gauss

C'est dans ce système d'unités que L. Landau écrivit son célèbre cours de physique théorique. Dans ce cas, les constantes sont :

$$K_1 = 1 \quad K_2 = \frac{1}{c} \quad K_3 = \frac{1}{c}$$

ce qui donne $K_f = 1$; le système n'est donc pas rationalisé. Il en résulte la force de Lorentz :

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$$

et les équations de Maxwell :

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad \text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

$$\text{div } (\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}) = 4\pi \rho_{ex} \quad \text{rot } (\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}) - \frac{1}{c} \frac{\partial (\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P})}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{ex}$$

soit

$$\text{div } \mathbf{D} = 4\pi \rho_{ex} \quad \text{et} \quad \text{rot } \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{ex}$$

avec

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} \quad \text{et} \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}$$

Le coefficient $K_3 = 1/c$ devant $\text{rot } \mathbf{M}$ implique une autre définition du moment magnétique d'une particule. Précisément, le moment magnétique orbital de l'électron orbitant autour du proton s'écrit $e/(2m_e c)$ et non $e/(2m_e)$; il en est de même de la contribution magnétique $q\mathbf{A}/c$, dans la quantité de mouvement d'une particule, de charge q , dans un potentiel vecteur $\mathbf{A}$, et celle $q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}/c$ dans son lagrangien, $\mathbf{v}$ étant sa vitesse. Ce choix présente pour certains auteurs l'avantage de rappeler le caractère relativiste de l'interaction magnétique.

Notons que, dans le système de Gauss, les vecteurs $\mathbf{D}$ et $\mathbf{E}$ sont identiques dans le vide, ainsi que les vecteurs $\mathbf{B}$ et $\mathbf{H}$. En outre, les trois vecteurs électriques $\mathbf{E}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{D}$ ont la même dimension physique, comme les trois vecteurs magnétiques $\mathbf{B}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{H}$.

Les relations entre le champ électromagnétique ($\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$) et le potentiel associé (V , $\mathbf{A}$) électromagnétique sont alors :

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad \text{et} \quad \mathbf{E} = -\text{grad } V - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

III. 4. — Équations de Maxwell dans le système dit des théoriciens

Dans ce système singulier, les constantes K_1, K_2, K_3 sont toutes égales à l'unité :

$$K_1 = 1 \quad K_2 = 1 \quad K_3 = 1$$

ce qui implique $K_2 K_3 / K_1 c^2 = c^2 = 1$ (système non rationalisé) et donc $c = 1$. La force de Lorentz s'écrit alors :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

et les équations de Maxwell structurelles :

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad \text{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

Quant aux équations reliées aux sources, elles deviennent :

$$\text{div} (\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}) = 4\pi \rho_{ex} \quad \text{rot} (\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}) - \frac{\partial (\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P})}{\partial t} = 4\pi \mathbf{J}_{ex}$$

soit :

$$\text{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho_{ex} \quad \text{et} \quad \text{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi \mathbf{J}_{ex}$$

avec

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} \quad \text{et} \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}$$

Les trois autres systèmes d'unités présentent surtout un intérêt historique.

III. 5. — Équations de Maxwell dans le système d'Heaviside-Lorentz

Dans ce système voisin de celui de Gauss, les constantes K_1, K_2, K_3 sont respectivement :

$$K_1 = \frac{1}{4\pi} \quad K_2 = \frac{1}{4\pi c} \quad K_3 = \frac{1}{c}$$

ce qui donne $K_f = 1$, caractéristique d'un système non rationalisé, et l'expression suivante de la force de Lorentz :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B})$$

Les deux équations de Maxwell structurelles ont, dans ce système, pour expressions respectives :

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad \text{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

Quant aux équations reliées aux sources, elles deviennent :

$$\text{div} (4\pi \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}) = 4\pi \rho_{ex} \quad \text{rot} (4\pi c \mathbf{B} - 4\pi c \mathbf{M}) - \frac{\partial}{\partial t} (4\pi \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}) = 4\pi \mathbf{J}_{ex}$$

ce qui s'écrit :

$$\text{div} \mathbf{D} = \rho_{ex} \quad \text{et} \quad \text{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{c} \mathbf{J}_{ex}$$

en introduisant les vecteurs excitations

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \text{et} \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - \mathbf{M}$$

Dans ce système, on retrouve les résultats du système de Gauss, au facteur 4π près.

III. 6. — Équations de Maxwell dans le système électrostatique

Dans un tel système, les constantes K_1, K_2, K_3 valent respectivement :

$$K_1 = 1 \quad K_2 = \frac{1}{c^2} \quad K_3 = 1$$

ce qui donne $K_f = 1$ (système non rationalisé). On en déduit la force de Lorentz :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

et les équations de Maxwell structurelles :

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad \text{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

Quant aux équations de Maxwell reliées aux sources, elles s'écrivent :

$$\text{div} (\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}) = 4\pi \rho_{ex} \quad \text{rot}(\mathbf{B}c^2 - 4\pi \mathbf{M}) - \frac{\partial (\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P})}{\partial t} = 4\pi \mathbf{J}_{ex}$$

soit

$$\text{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho_{ex} \quad \text{et} \quad \text{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 4\pi \rho_{ex}$$

en posant

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} \quad \text{et} \quad \mathbf{H} = \mathbf{B}c^2 - 4\pi \mathbf{M}$$

III. 7. — Équations de Maxwell dans le système électromagnétique

Dans ce système, les constantes K_1, K_2, K_3 sont respectivement :

$$K_1 = c^2 \quad K_2 = 1 \quad K_3 = 1$$

ce qui donne $K_f = 1$ (système non rationalisé). On en déduit la force de Lorentz :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

et les équations de Maxwell structurelles :

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad \text{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

Dans les milieux matériels, les deux équations liées aux sources deviennent :

$$\text{div} \left(\frac{\mathbf{E}}{c^2} + 4\pi \mathbf{P} \right) = 4\pi \rho_{ex} \quad \text{rot}(\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}) - \frac{\partial (\mathbf{E}/c^2 + \mathbf{P})}{\partial t} = 4\pi \mathbf{J}_{ex}$$

soit :

$$\mathbf{D} = 4\pi \rho_{ex} \quad \text{et} \quad \text{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 4\pi \mathbf{J}_{ex}$$

en posant

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E}}{c^2} + 4\pi \mathbf{P} \quad \text{et} \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}$$

Annexe 2. Tenseurs

Nous donnons ici quelques éléments de calcul tensoriel, le but recherché n'étant pas de remplacer un cours de mathématiques sur le sujet, mais de montrer comment le concept de *tenseur* s'est introduit naturellement en physique, notamment en mécanique, en électromagnétisme et surtout en relativité générale.

I. — DIFFÉRENTS TENSEURS EN PHYSIQUE

Les vecteurs et les scalaires sont familiers en physique. Rappelons qu'une grandeur est vectorielle si elle s'exprime à l'aide de composantes qui dépendent de la base adoptée. Lorsqu'on change de base, les composantes d'un vecteur changent, mais doivent satisfaire à certaines conditions ; ainsi, avec des bases orthonormées, la somme des carrés des composantes doit être conservée.

En revanche, une grandeur est un scalaire lorsqu'elle reste *invariante par changement de base* ; ainsi la masse (positive ou nulle) d'un corps, sa charge électrique (positive, nulle ou négative), le travail d'une force, la pression d'un gaz ainsi que son énergie interne et son entropie sont des scalaires. Notons que les composantes d'un vecteur ne sont pas des scalaires, puisqu'elles changent d'une base à l'autre, alors que la norme l'est.

En physique, les relations entre grandeurs vectorielles sont le plus souvent linéaires, au moins en première approximation. Dans de nombreux cas, la relation reste linéaire, mais elle ne se réduit pas à une simple multiplication par un nombre réel ou complexe.

I. 1. — Tenseur des contraintes

En mécanique newtonienne des fluides, la relation locale entre une contrainte, la force surfacique $\mathbf{f}_{s,1 \rightarrow 2}$, exercée par un fluide sur la paroi qui sépare une partie 1 de ce fluide d'une autre 2, et la normale $\mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}$ à cette paroi, orientée de 1 vers 2, se met sous la forme (cf. *Mécanique*) :

$$\mathbf{f}_{s,1 \rightarrow 2} = -[\sigma] \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}$$

L'opérateur linéaire $[\sigma]$, qui traduit les *tensions* entre les différentes parties d'un fluide, a été introduit et appelé en 1899 *tenseur des contraintes* par le physicien cristallographe allemand W. Voigt. Si le fluide est au repos, ce tenseur se réduit à un scalaire qui est l'opposé de la pression p du fluide.

I. 2. — Tenseur dilatation-déformation

Toujours en mécanique des fluides, lorsqu'on exprime le champ des vitesses $\mathbf{v}$ dans un fluide, précisément la relation entre les vitesses en deux points voisins P et Q du fluide, s'introduit naturellement

un opérateur $[D]$ appelé *tenseur dilatation-déformation* (cf. *Mécanique*) :

$$\mathbf{v}(Q, t) = \mathbf{v}(P, t) + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{PQ} + [D]\mathbf{PQ}$$

$\boldsymbol{\Omega} = \text{rot } \mathbf{v}/2$ étant le vecteur tourbillon ou vorticité.

I. 3. — Tenseur d'inertie d'un solide rigide

En mécanique de Newton, la relation entre le vecteur vitesse de rotation $\boldsymbol{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$ d'un solide rigide S , par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$, et son moment cinétique $\mathbf{L}_{O/\mathcal{R}}$ dans son mouvement autour de son point fixe O , s'écrit (cf. *Mécanique*) :

$$\mathbf{L}_{O/\mathcal{R}} = [I]_O \boldsymbol{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$$

L'opérateur $[I]_O$ permettant de passer du premier vecteur au second est appelé *tenseur d'inertie*. Si l'axe de rotation du solide coïncide avec un axe principal du solide, cet opérateur se réduit à un scalaire qui est le moment d'inertie du solide par rapport à cet axe.

I. 4. — Tenseur diélectrique

En électromagnétisme, on établit l'existence d'une relation vectorielle linéaire entre le champ électrique $\mathbf{E}$ d'une onde électromagnétique et son vecteur excitation électrique $\mathbf{D}$ dans un milieu matériel. Dans le vide et dans les milieux *isotropes*, cette relation se réduit à une simple proportionnalité, respectivement $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ ou $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ SI étant une constante, de valeur exacte, appelée constante diélectrique du vide, et ε la constante diélectrique du milieu (cf. *Électromagnétisme*).

En revanche, dans les milieux matériels *anisotropes*, la relation linéaire entre ces deux vecteurs ne se réduit pas à une simple proportionnalité (cf. *Optique*) :

$$\mathbf{D} = [\varepsilon] \mathbf{E}$$

l'opérateur $[\varepsilon]$, qui permet de passer de $\mathbf{E}$ à $\mathbf{D}$, étant le *tenseur diélectrique*.

I. 5. — Tenseur électromagnétique

En électromagnétisme émerge naturellement le quadrivecteur potentiel 4-A dont la composante temporelle V/c est directement reliée au potentiel électrique, alors que les autres composantes sont celles du potentiel vecteur $\mathbf{A}$ (cf. chapitre 9). Le champ électromagnétique qui s'en déduit est le *tenseur champ électromagnétique*, noté $[C]$, défini à partir de la force de Lorentz $\mathbf{F}$ qu'exerce un champ électromagnétique sur une particule, de charge électrique q et de vitesse $\mathbf{v}$, selon :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \text{qui s'écrit} \quad \mathbf{F} = qC\mathbf{v}$$

À trois dimensions, les tenseurs d'ordre deux s'explicitent dans une base selon une matrice carrée 3×3 , dont 6 éléments sur 9 sont indépendants, alors que les vecteurs s'explicitent, eux, selon une matrice colonne à trois éléments indépendants.

Les tenseurs d'ordre deux et antisymétriques ne sont, eux, définis que par trois éléments, ce qui les rapproche des vecteurs sans qu'ils le soient réellement, car ils dépendent de l'orientation de l'espace. C'est le cas du vecteur rotation $\boldsymbol{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$ d'un corps rigide, du vecteur vorticité, du moment cinétique $\mathbf{L}_{O/\mathcal{R}}$ d'un système, du moment magnétique $\mathbf{m}$ d'un dipôle et du champ magnétique $\mathbf{B}$ (cf. *Électromagnétisme*). Pour les distinguer des vecteurs habituels, dits polaires, on les appelle *pseudo-vecteurs* ou *vecteurs axiaux*.

Le tenseur électromagnétique s'explicit, lui, selon une matrice carrée à 16 éléments (cf. chapitre 9).

Remarque : Lorsque les vecteurs polaires étaient surmontés d'une flèche droite, on les distinguait de ces derniers en incurvant la flèche.

II. — CONCEPT DE TENSEUR

Les exemples concrets précédents, issus de la physique, conduisent à introduire un nouveau concept, le *tenseur*, qui généralise ceux de vecteur et de scalaire. Ce concept permet d'exprimer de façon intrinsèque, c'est-à-dire indépendamment de tout système particulier de coordonnées, les lois de la physique.

II. 1. — Définition d'un tenseur

Un tenseur est un opérateur linéaire qui relie un vecteur de sortie $\mathbf{x}_s$ à un vecteur d'entrée $\mathbf{x}_e$:
 $\mathbf{x}_s = [T] \mathbf{x}_e$

II. 2. — Propriétés d'un tenseur

a) Linéarité

La linéarité du tenseur est définie par la propriété suivante : $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ étant deux vecteurs quelconques, et λ_1 , λ_2 deux nombres complexes, on a :

$$[T] (\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2) = \lambda_1 [T] \mathbf{x}_1 + \lambda_2 [T] \mathbf{x}_2$$

b) Égalité de deux tenseurs

Deux tenseurs $[T]_1$ et $[T]_2$ sont égaux s'ils transforment en un même vecteur de sortie tout vecteur d'entrée $\mathbf{x}$: $[T]_1 \mathbf{x} = [T]_2 \mathbf{x}$.

c) Tenseur nul et tenseur identité

Un tenseur $[T]$ est nul si, quel que soit le vecteur $\mathbf{x}$, on a : $[T] \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Un tenseur se réduit à l'identité si $[T] \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

III. — CHAMP DE VECTEUR SUR UNE VARIÉTÉ

En relativité générale, les systèmes de coordonnées sont généralement quelconques, c'est-à-dire *curvilignes* comme par exemple les portions de cercles définies par la longitude φ et la colatitude θ d'un point P sur une sphère (Fig. A2.1b). En outre, ces courbes ne se coupent pas nécessairement à angle droit.

III. 1. — Variété

a) Définition

On appelle *variété*, de dimensions n , un ensemble quelconque de points qui peuvent être déterminés par n coordonnées, dites *contravariantes*, notées $\{x^i\}$, i variant entre 1 et n . En mécanique non relativiste, où le temps apparaît comme un paramètre d'évolution indépendant des coordonnées spatiales, $n \leq 3$, alors qu'en relativité, où s'introduit naturellement l'espace-temps, $n \leq 4$.

Cette notation des coordonnées contravariantes, avec les indices en position *haute*, différente de l'usage habituel en calcul vectoriel élémentaire, se justifie par l'existence d'un autre type de coordonnées, dites *covariantes*, différentes des précédentes lorsque le système de coordonnées est quelconque, précisément curviligne et non orthogonal. Les deux qualificatifs contravariantes et covariantes seront justifiés un peu plus loin, à partir des formules de transformation des coordonnées.

Exemples

1) Les points d'un plan forment une variété bidimensionnelle. On sait qu'ils peuvent être répertoriés par les coordonnées cartésiennes x et y ou par les coordonnées polaires r et φ (Fig. A2.1a); dans ce dernier cas, φ n'est pas déterminé pour $r = 0$.

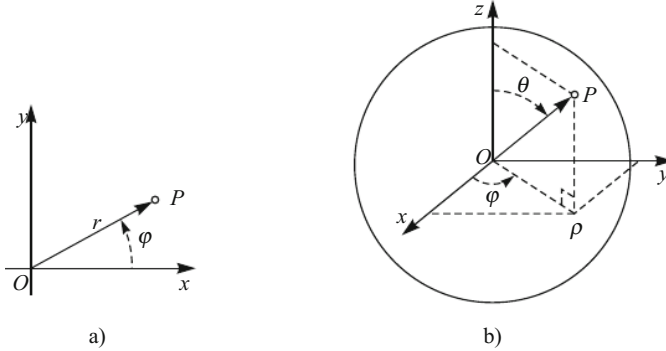


FIG. A2.1.

2) Les points de la surface d'une sphère forment aussi une variété bidimensionnelle, avec les coordonnées angulaires suivantes, l'azimut φ et la colatitude θ , l'azimut n'étant pas défini pour $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ (Fig. A2.1b). En raison de ces singularités, ces coordonnées ne suffisent pas pour couvrir globalement la variété. Aussi doit-on, dans le cas général, se limiter à des systèmes locaux de coordonnées.

Remarque : On veillera à ne pas confondre la i^{e} composante contravariante x^i de $\mathbf{x}$ avec la norme de ce vecteur à la puissance i .

b) Changement des coordonnées d'un point d'une variété

Les coordonnées contravariantes choisies pour repérer un point d'une variété sont arbitraires, d'où l'intérêt de considérer d'autres systèmes de coordonnées de repérage et donc d'établir les formules de transformation entre les deux systèmes.

Désignons par $\{x^i\}$ et $\{x'^i\}$ deux systèmes de coordonnées et par :

$$\{x'^i = x'^i(x^1, x^2, \dots, x^n)\}$$

le système de n équations permettant de passer des anciennes coordonnées $\{x^i\}$ aux nouvelles $\{x'^i\}$.

Si P et Q sont deux points voisins de la variété, de coordonnées respectives x^i et $x^i + dx^i$, on en déduit, dans le nouveau système de coordonnées $\{x'^i\}$:

$$dx'^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j$$

c) Définition d'un champ de vecteur sur une variété

Définir un champ de vecteur sur une variété consiste à associer un vecteur $\mathbf{v}(P)$ en chaque point P de cette variété.

Par exemple, le vecteur espacement élémentaire, entre deux points *voisins* P et Q , est un champ vectoriel de la variété, de même que le vecteur vitesse d'une particule-fluide $\mathbf{v}(P)$ en mécanique des fluides, le vecteur champ électrique $\mathbf{E}(P)$ ou le vecteur champ magnétique $\mathbf{B}(P)$ en électromagnétisme.

d) Vecteur tangent à une courbe sur une variété

Une courbe tracée sur une variété de dimension n est définie par les n équations $x^i(\tau)$, τ étant un paramètre de variation monotone. Les points P et Q étant voisins, c'est-à-dire déterminés par des valeurs proches τ et $\tau + d\tau$, le vecteur $\mathbf{e}_t$ tangent à la courbe est défini par l'espacement vectoriel élémentaire $d\mathbf{s} = \mathbf{PQ}$ selon :

$$\mathbf{e}_t = \frac{d\mathbf{s}}{d\tau}$$

Ce vecteur $\mathbf{e}_t$, qui ne dépend pas du système de coordonnées x^i , appartient à l'espace tangent à la variété au point P . Par exemple, pour une variété bidimensionnelle (Fig. A2.1b), $\mathbf{e}_t$ est contenu dans le plan tangent en P à la surface.

e) Base naturelle sur une variété

Sur une variété de dimension n , on peut définir n vecteurs indépendants tangents à la variété au point P , appelés *vecteurs de base*, l'ensemble de ces vecteurs formant la base d'expression des vecteurs.

Lorsque les vecteurs de base sont ceux associés au système de coordonnées, la base est dite *naturelle*. On a, alors :

$$\mathbf{e}_i = \frac{d\mathbf{s}}{dx^i}$$

Exemples

i) Pour un point P , repéré par les coordonnées cartésiennes x, y, z (Fig. A2.1b) :

$$\mathbf{OP} = x\mathbf{e}_x^0 + y\mathbf{e}_y^0 + z\mathbf{e}_z^0$$

la base naturelle correspondante est, en adoptant la notation $\partial_x = \partial\mathbf{OP}/\partial x$:

$$\mathbf{e}_x = \partial_x\mathbf{OP} = \mathbf{e}_x^0 \quad \mathbf{e}_y = \partial_y\mathbf{OP} = \mathbf{e}_y^0 \quad \mathbf{e}_z = \partial_z\mathbf{OP} = \mathbf{e}_z^0$$

ii) Si le point est repéré par les coordonnées cylindriques ρ, φ, z (Fig. A2.1b) :

$$\mathbf{OP} = \rho \cos \varphi \mathbf{e}_x^0 + \rho \sin \varphi \mathbf{e}_y^0 + z \mathbf{e}_z^0$$

la base naturelle correspondante a pour expression :

$$\mathbf{e}_\rho = \partial_\rho\mathbf{OP} = \cos \varphi \mathbf{e}_x^0 + \sin \varphi \mathbf{e}_y^0 \quad \mathbf{e}_\varphi = \partial_\varphi\mathbf{OP} = -\rho \sin \varphi \mathbf{e}_x^0 + \rho \cos \varphi \mathbf{e}_y^0 \quad \mathbf{e}_z = \partial_z\mathbf{OP} = \mathbf{e}_z^0$$

Notons que, dans les deux cas considérés, les vecteurs de la base naturelle sont unitaires.

iii) Si le point est repéré par les coordonnées sphériques r, θ, φ (Fig. A2.1b) :

$$\mathbf{OP} = r \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x^0 + r \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y^0 + r \cos \theta \mathbf{e}_z^0$$

La base naturelle correspondante n'est pas unitaire, puisque $e_r = 1$, mais $e_\theta = r$ et $e_\varphi = r|\sin \theta|$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \partial_r\mathbf{OP} = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x^0 + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y^0 + \cos \theta \mathbf{e}_z^0 \\ \mathbf{e}_\theta &= \partial_\theta\mathbf{OP} = r \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x^0 + r \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y^0 - r \sin \theta \mathbf{e}_z^0 \\ \mathbf{e}_\varphi &= \partial_\varphi\mathbf{OP} = -r \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_x^0 + r \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_y^0 \end{aligned}$$

La base unitaire serait obtenue en divisant les vecteurs naturels par leurs normes respectives :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x^0 + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y^0 + \cos \theta \mathbf{e}_z^0 \\ \mathbf{u}_2 &= \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} = \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x^0 + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y^0 - \sin \theta \mathbf{e}_z^0 \\ \mathbf{u}_3 &= \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r \sin \theta} = -\sin \varphi \mathbf{e}_x^0 + \cos \varphi \mathbf{e}_y^0 \end{aligned}$$

III. 2. — Composantes contravariantes et covariantes d'un vecteur

a) Composantes contravariantes d'un vecteur

En un point P d'une variété, tout vecteur peut s'exprimer sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs de base :

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x^i \mathbf{e}_i \quad \text{soit} \quad \mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$$

en adoptant la *convention d'Einstein* sur les sommations, précisément l'omission du signe $\sum$ lorsque deux indices identiques en position haute et en position basse sont répétés.

b) Transformation des composantes contravariantes par changement de base

Cherchons à établir les formules de transformation entre les composantes contravariantes d'un même vecteur $\mathbf{x}$ dans deux bases différentes l'une $\{\mathbf{e}_i\}$ et l'autre $\{\mathbf{e}'_j\}$. Les vecteurs de l'une des bases s'expriment en fonction des vecteurs de l'autre selon :

$$\mathbf{e}'_j = A^i_j \mathbf{e}_i \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_i = A^j_i \mathbf{e}'_j$$

Il en résulte :

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = x^i A^j_i \mathbf{e}'_j$$

en remplaçant les vecteurs $\mathbf{e}_i$ par leurs expressions en fonction des $\mathbf{e}'_j$. On en déduit, par identification avec $\mathbf{x} = x'^j \mathbf{e}'_j$, les formules de transformation suivantes pour les composantes contravariantes d'un vecteur :

$$x'^j = A^j_i x^i \quad \text{alors que} \quad \mathbf{e}'_j = A^i_j \mathbf{e}_i$$

Comme les formules de transformation font apparaître A^j_i pour les coordonnées, et, au contraire, A^i_j pour les vecteurs de base, on qualifie ces composantes de contravariantes.

c) Composantes covariantes

La distinction entre les composantes contravariantes et les composantes covariantes d'un même vecteur n'apparaît que dans le cas général où les bases utilisées *ne sont pas orthogonales*, ce que nous supposons dans la suite, afin de préparer l'analyse de la théorie de la relativité générale.

On appelle *composantes covariantes* d'un vecteur $\mathbf{x}$ les quantités notées x_i (indice en position basse) définies selon :

$$x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i$$

Sur la figure A2.2, on a représenté les coordonnées contravariantes et covariantes d'un même vecteur. Notons que, si la base est orthonormée, les composantes contravariantes et les composantes covariantes d'un vecteur sont égales, d'où l'importance de cette distinction précisément si les bases vectorielles sont quelconques.

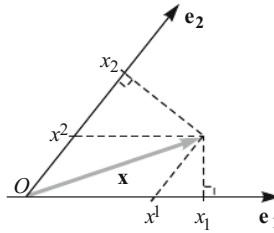


FIG. A2.2.

d) Transformation des composantes covariantes par changement de base

De même que précédemment, établissons les formules de transformation entre les composantes covariantes d'un même vecteur $\mathbf{x}$ dans deux bases différentes l'une $\{\mathbf{e}_i\}$ et l'autre $\{\mathbf{e}'_j\}$. Les vecteurs de l'une des bases s'expriment en fonction des vecteurs de l'autre selon :

$$\mathbf{e}'_j = A^i_j \mathbf{e}_i \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_i = A^j_i \mathbf{e}'_j$$

Il en résulte :

$$x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{x} \cdot A^j_i \mathbf{e}'_j = A^j_i \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}'_j = A^j_i x'_j \quad \text{puisque} \quad x'_j = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}'_j$$

On en déduit les formules de transformation suivantes pour les composantes covariantes d'un vecteur :

$$x_i = A^j_i x'_j \quad \text{comme} \quad \mathbf{e}_i = A^j_i \mathbf{e}'_j$$

d'où le qualificatif *covariantes* de ces composantes.

IV. — PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS

IV.1. — Produit scalaire en fonction des composantes contravariantes

En fonction des composantes contravariantes, le produit scalaire de deux vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ a pour expression :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x^i \mathbf{e}_i \cdot y^j \mathbf{e}_j \quad \text{ce qui s'écrit} \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = g_{ij} x^i y^j$$

en introduisant les coefficients $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ de symétrie évidente, $g_{ij} = g_{ji}$.

IV.2. — Produit scalaire en fonction des composantes covariantes

Comme les composantes covariantes d'un vecteur s'expriment aisément en fonction de ses composantes contravariantes, il vient :

$$x_i = (x^j \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i) x^j \quad \text{d'où} \quad x_i = g_{ij} x^j$$

Réciproquement, pour trouver les composantes contravariantes d'un vecteur en fonction de ses composantes covariantes, il suffit d'inverser le système linéaire précédent $\{x_i = g_{ij} x^j\}$. Il vient, si g est le déterminant des coefficients g_{ij} et α^{ji} le mineur de la matrice des g_{ij} :

$$x^j = \frac{1}{g} \alpha^{ji} x_i \quad \text{soit} \quad x^j = g^{ji} x_i \quad \text{en posant} \quad g^{ji} = \frac{\alpha^{ji}}{g}$$

Les éléments g_{ij} étant symétriques, les mineurs α^{ji} le sont aussi, ainsi que les g^{ji} .

Les formules de passage entre composantes covariantes et composantes contravariantes d'un vecteur sont donc les suivantes :

$$g_{ij} x^j = x_i \quad \text{et} \quad g^{ij} x_j = x^i$$

Retenons le résultat des procédures de passage d'un type de composantes à l'autre, en termes d'abaissement d'un indice par action de g_{ij} , et en termes d'élévation d'un indice par action de g^{ij} .

Comme $g_{ij} x^j = x_i$ et $g^{ij} y_j = y_i$, le produit scalaire s'écrit, sous les formes condensées suivantes :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = g_{ij} x^i y^j = x^j y_j = x^j y_j$$

On en déduit aisément les différentes écritures du carré de la norme d'un vecteur $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = g_{ij} x^i x^j = g^{ij} x_i x_j = x^i x_i = x_i x^i$$

Cette dernière équation permet d'établir la relation suivante entre les vecteurs de base $\mathbf{e}_i$ et $\mathbf{e}^j$. En effet :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = (x^i \mathbf{e}_i) \cdot (x_j \mathbf{e}^j) = x^i x_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j x^j$$

ce qui implique :

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j$$

IV.3. — Métrique séparant deux points voisins d'une variété

Dans la base naturelle associée au système de coordonnées x^i d'une variété à n dimensions, le vecteur $d\mathbf{s}$ séparant deux points voisins P et Q a pour expression :

$$d\mathbf{s} = dx^i \mathbf{e}_i$$

d'où la métrique, d'après ce qui précède :

$$ds^2 = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) dx^i dx^j = g_{ij} dx^i dx^j = g^{ij} dx_i dx_j = dx_i dx^i = dx^i dx_i$$

avec $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ et $g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j$.

Dans le cas particulier où la base est orthonormée, on a :

$$g_{ij} = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j \quad \text{et} \quad g_{ij} = \pm 1 \quad \text{pour} \quad i = j$$

De même :

$$g^{ij} = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j \quad \text{et} \quad g^{ij} = \pm 1 \quad \text{pour} \quad i = j$$

On montre que les coefficients de la métrique permettent d'obtenir ceux de connexion.

En coordonnées cylindriques ρ , φ , z (Fig. A2-1b), la métrique s'écrit :

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 \quad \text{d'où} \quad g_{\rho\rho} = 1 \quad g_{\varphi\varphi} = \rho^2 \quad \text{et} \quad g_{zz} = 1$$

les autres coefficients étant nuls.

V. — DÉRIVÉE COVARIANTE D'UN VECTEUR EN UN POINT

V.1. — Dérivée covariante en fonction des coordonnées contravariantes

Considérons un point P d'une variété, de dimension n , repéré par les coordonnées contravariantes x^i , et le champ de vecteur $\mathbf{v}(P) = v^i \mathbf{e}_i$, dans sa base naturelle construite à partir de ces coordonnées. La variation du champ de vecteur, lorsque l'on passe du point P au point voisin Q , présente alors deux contributions, l'une due à la variation des coordonnées contravariantes v^i , l'autre liée à celle des vecteurs de base $\mathbf{e}_i$:

$$d\mathbf{v} = dv^i \mathbf{e}_i + v^i d\mathbf{e}_i$$

Une telle variation est dite *covariante* ou *intrinsèque* (ou vraie), en raison de la prise en compte de la variation $d\mathbf{e}_i$ des vecteurs de base. En divisant les deux membres de l'équation précédente par dx_k , il vient d/dx_k désignant la dérivée covariante :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dx_k} = \frac{\partial v^i}{\partial x_k} \mathbf{e}_i + v^i \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x_k}$$

Si l'on adopte la notation ∂_k pour la dérivation partielle par rapport à la coordonnée x_k , et par ∇_k pour la dérivée covariante au premier membre, l'équation précédente s'écrit alors :

$$\nabla_k \mathbf{v} = \partial_k v^i \mathbf{e}_i + v^i \partial_k \mathbf{e}_i$$

Comme $\partial_k \mathbf{e}_i$ s'exprime aussi en fonction des vecteurs de base et des différentielles des coordonnées, on peut introduire les n^3 coefficients Γ_{ik}^j dits de *connexion*, tels que :

$$\partial_k \mathbf{e}_i = \Gamma_{ik}^j \mathbf{e}_j \quad \text{d'où} \quad \Gamma_{ik}^j = \mathbf{e}^j \cdot \partial_k \mathbf{e}_i$$

en multipliant les deux membres par $\mathbf{e}^j$. Les coefficients Γ_{ik}^j sont aussi appelés *symboles de Christoffel de deuxième espèce*, du nom du mathématicien allemand E. Christoffel qui les a introduits en 1869. Finalement :

$$\nabla_k \mathbf{v} = \partial_k v^i \mathbf{e}_i + v^i \Gamma_{ik}^j \mathbf{e}_j \quad \text{ce qui s'écrit} \quad \nabla_k \mathbf{v} = \partial_k v^i \mathbf{e}_i + v^j \Gamma_{jk}^i \mathbf{e}_i$$

en permutant les indices *muets* i et j dans le dernier terme de l'égalité. On en déduit alors l'écriture suivante de la i^e composante contravariante de la dérivée covariante du vecteur $\mathbf{v}$:

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + v^j \Gamma_{jk}^i$$

Remarque : Contrairement à ce que pourrait suggérer la notation, les symboles de Christoffel Γ_{jk}^i ne sont pas des tenseurs, puisqu'ils ne transforment pas un vecteur en un autre vecteur, mais permettent seulement de prendre en compte la modification des vecteurs de base $\mathbf{e}_i$ dans l'expression de la dérivée covariante d'un vecteur.

Exemple : Symboles de Christoffel en coordonnées cylindriques

Si le point P est repéré par les coordonnées cylindriques ρ, φ, z (Fig. A2-1b), on déduit aisément les dérivées des vecteurs de base en différentiant les expressions des vecteurs de base établies antérieurement :

$$\mathbf{e}_\rho = \cos \varphi \mathbf{e}_x^0 + \sin \varphi \mathbf{e}_y^0 \quad \mathbf{e}_\varphi = -\rho \sin \varphi \mathbf{e}_x^0 + \rho \cos \varphi \mathbf{e}_y^0 \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z^0$$

En dehors des dérivées de $\mathbf{e}_z$ qui sont évidemment toutes nulles, on obtient :

$$\begin{aligned}\partial_\rho \mathbf{e}_\rho &= 0 & \partial_\varphi \mathbf{e}_\rho &= -\sin \varphi \mathbf{e}_x^0 + \cos \varphi \mathbf{e}_y^0 = \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\varphi \\ \partial_\rho \mathbf{e}_\varphi &= -\sin \varphi \mathbf{e}_x^0 + \cos \varphi \mathbf{e}_y^0 = \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\varphi & \partial_\varphi \mathbf{e}_\varphi &= -\rho \cos \varphi \mathbf{e}_x^0 - \rho \sin \varphi \mathbf{e}_y^0 = -\rho \mathbf{e}_\rho\end{aligned}$$

On en déduit les coefficients de connexion, à partir de la relation de définition $\partial_k \mathbf{e}_i = \Gamma_{ik}^j \mathbf{e}_j$:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\rho\rho}^\rho &= 0 & \Gamma_{\rho\rho}^\varphi &= 0 & \Gamma_{\rho\varphi}^\rho &= 0 & \Gamma_{\rho\varphi}^\varphi &= \frac{1}{\rho} \\ \Gamma_{\varphi\rho}^\rho &= 0 & \Gamma_{\varphi\rho}^\varphi &= \frac{1}{\rho} & \Gamma_{\varphi\varphi}^\rho &= -\rho & \Gamma_{\varphi\varphi}^\varphi &= 0\end{aligned}$$

Notons que la permutation des deux indices du bas ne modifie pas les coefficients de connexion, si l'indice supérieur ne change pas. On doit attribuer ce résultat à l'hypothèse d'*absence de torsion*, dite de Levi-Cevita, souvent satisfaite, selon laquelle l'ordre de deux dérivations successives des vecteurs $\mathbf{e}_i$ par rapport à la permutation de deux coordonnées ne change pas le résultat. Dans la suite, nous ne considérerons que des espaces sans torsion.

Remarque : Les espaces avec torsion furent analysés par le mathématicien français E. Cartan.

V.2. — Dérivée covariante en fonction des coordonnées covariantes

Montrons que l'on a, de façon analogue, pour la i^e composante covariante de la dérivée covariante du vecteur $\mathbf{v}$, notée $\nabla_k v_i$:

$$\nabla_k v_i = \partial_k v_i - \Gamma_{ik}^j v_j$$

Comme $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}^i$, il vient, en dérivant par rapport à la coordonnée x^k :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dx^k} = \frac{\partial v_i}{\partial x^k} \mathbf{e}^i + v_i \frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial x^k}$$

On calcule aisément le terme de dérivation des vecteurs de base à partir de la relation $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j$. En effet :

$$\mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial x^k} + \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^k} \cdot \mathbf{e}^j = 0 \quad \text{d'où} \quad \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial x^k} = -\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^k} \cdot \mathbf{e}^j = -\Gamma_{ik}^j \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial x^k} = -\Gamma_{ik}^j \mathbf{e}^i$$

en multipliant les deux membres de cette dernière égalité par $\mathbf{e}^i$ et en sommant sur i . Il vient donc, en notant j l'indice *muet* i du second terme du second membre de l'équation de départ :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dx^k} = \frac{\partial v_i}{\partial x^k} \mathbf{e}^i + v_j \frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial x^k} = \frac{\partial v_i}{\partial x^k} \mathbf{e}^i - v_j \Gamma_{ik}^j \mathbf{e}^i$$

Finalement, la dérivée covariante d'un vecteur en fonction des composantes covariantes s'écrit, en utilisant la notation ∂_k pour $\partial/\partial x^k$ et en remplaçant d_k par ∇_k :

$$\nabla_k \mathbf{v} = \partial_k v_i \mathbf{e}^i - v_j \Gamma_{ik}^j \mathbf{e}^i$$

ce qui donne, pour la composante covariante v_i :

$$\nabla_k v_i = \partial_k v_i - v_j \Gamma_{jk}^i$$

On voit que cette expression est semblable à celle relative à la dérivée contravariante, au signe moins près qui affecte le coefficient de connexion.

VI. — GÉODÉSIQUES SUR UNE VARIÉTÉ

VI.1. — Définition

On appelle *géodésique* sur une variété la courbe qui réalise, entre deux points quelconques P et Q , une longueur *minimale*. C'est une généralisation de la ligne droite entre deux points d'une surface plane, ou des cercles méridiens entre deux points d'une surface sphérique ; ainsi, le plus court chemin pour relier, en avion, deux lieux sur la surface terrestre, par exemple Paris et New-York, est une géodésique, appelée ici *orthodromie* (courbe droite en grec), précisément une portion du grand cercle passant par ces points.

Cette définition est en relation directe avec le *principe de moindre action* de Maupertuis, en mécanique, selon lequel le mouvement d'une particule matérielle (masse non nulle), par rapport à un référentiel galiléen, est tel que l'action $\mathcal{S}$ entre les points P et Q soit minimale.

En mécanique de Newton, une telle courbe est la droite définie par la quantité de mouvement initiale de la particule ou par sa vitesse initiale (cf. *Mécanique*) : $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{0}$ avec $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$.

En relativité restreinte, cette loi se généralise sous une forme quadridimensionnelle (cf. leçon 5) : $d(4-p)/d\tau = 4-0$, dans laquelle $4-p = (\gamma mc, \gamma m\mathbf{v})$ est le quadrivecteur énergie-quantité de mouvement et τ le temps propre de la particule.

En relativité générale, où la gravitation est prise en compte par la courbure de l'espace-temps, le mouvement d'une particule libre, c'est-à-dire soumise uniquement à la gravitation (pas de force occasionnelle de nature électromagnétique, pas de force de frottement, de contact ou autre), est obtenu en annulant la dérivée covariante des composantes contravariantes du *quadrivecteur* $4-p$, lesquelles ne dépendent que du temps propre τ qui paramètre la courbe décrite. On a donc :

$$\frac{d(4-p)}{d\tau} = 4-0 \quad \text{avec} \quad 4-p(\tau) = p^i(\tau) \mathbf{e}_i(\tau)$$

Remarques : 1) On sait que si les points P et Q sont suffisamment éloignés, on doit remplacer l'adjectif « minimale » par « extrémale » moins contraignant (cf. *Optique*).

2) Rappelons que la *géodésie* est la science du calcul et des dimensions géographiques de la Terre, et qu'un *système géodésique* est une référence qui permet d'exprimer les positions des points au voisinage de la Terre ; un point est alors localisé par ses coordonnées géographiques ou géodésiques : latitude, longitude et altitude.

VI.2. — Transport parallèle

Par définition, le transport d'un vecteur quelconque $\mathbf{V}$ est dit *parallèle* lorsque sa dérivée par rapport au paramètre d'évolution τ est nulle :

$$\frac{d\mathbf{V}}{d\tau} = \mathbf{0}$$

Pour un vecteur de l'espace plat de la mécanique de Newton ou de la relativité restreinte, que l'on peut exprimer dans une base fixe (qui n'évolue pas), son transport, le long d'un trajet fermé C_1NC_2 , s'effectue avec conservation de la direction après le parcours complet comme le montre la figure A2.3a.

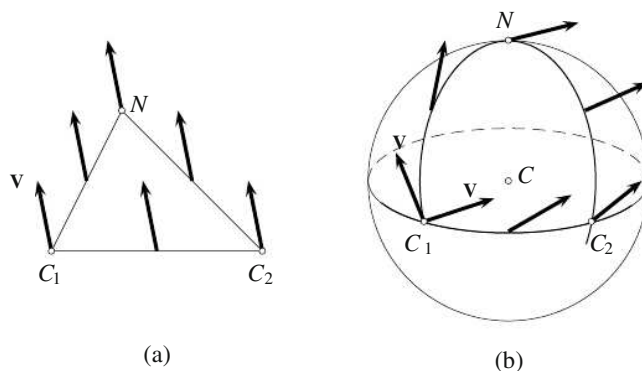


FIG. A2.3. — Transport parallèle d'un vecteur $\mathbf{V}$ le long d'une courbe fermée tracée sur une surface plane (a) et sur une sphère (b) de C_1 à N , N à C_2 , puis retour à C_1 ; au cours du transport, le vecteur $\mathbf{V}$ conserve sa norme et l'angle qu'il forme avec la géodésique considérée.

En revanche, si l'espace est courbe, la base n'est pas fixe. C'est le cas du transport d'un vecteur le long d'une courbe fermée reliant trois points de la sphère terrestre, par exemple le pôle Nord N et deux points distincts C_1 et C_2 du cercle équatorial (Fig. A2.3b). Le long de chaque portion de géodésique, C_1N , NC_2 et C_2C_1 , le vecteur garde son orientation par rapport à chaque géodésique (angle constant entre sa direction et le plan tangent à la sphère). Notons que ce transport parallèle ne restitue pas, après transport le long de la courbe fermée C_1NC_2 , la direction initiale.

Sur la figure A2.4, on a représenté, à l'aide d'une simulation numérique, le transport parallèle d'un vecteur $\mathbf{V}$ le long d'un parallèle de colatitude $\theta = 60^\circ$. On passe d'une position particulière H_1 sur le parallèle à la suivante H_2 , en décrivant une première géodésique H_1N jusqu'au pôle N , puis une seconde NH_2 . En répétant plusieurs fois cette construction, en différents points du parallèle régulièrement espacés, on obtient une visualisation du transport parallèle du vecteur $\mathbf{V}$; notons que ces différents vecteurs ne sont pas parallèles, précisément afin de tenir compte de la variation locale des vecteurs unitaires.

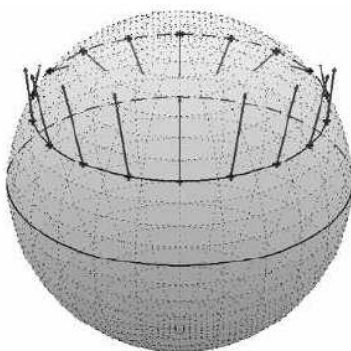


FIG. A2.4. — Vecteur $\mathbf{V}$ pour différentes positions successives le long d'un parallèle de colatitude $\theta = 60^\circ$.

VI.3. — Équation des géodésiques

Comme le quadrivecteur énergie-quantité de mouvement s'écrit, dans un espace courbe $(4-p)(\tau) = p^i(\tau) \mathbf{e}_i(\tau)$, τ étant le paramètre d'évolution, il vient, par dérivation covariante :

$$\frac{d(4-p)}{d\tau} = \frac{dp^j}{d\tau} \mathbf{e}_j + p^i \frac{d\mathbf{e}_i}{d\tau} = \frac{dp^i}{d\tau} \mathbf{e}_i + p^i \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^k} \frac{dx^k}{d\tau} = \frac{dp^i}{d\tau} \mathbf{e}_i + p^j \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^k} \frac{dx^k}{d\tau} = \mathbf{0}$$

puisque j est un indice muet. Il en résulte, en introduisant les coefficients de connexion :

$$\left(\frac{dp^i}{d\tau} + \Gamma_{jk}^i p^j \frac{dx^k}{d\tau} \right) \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$$

d'où, pour chaque composante p^j :

$$\frac{dp^j}{d\tau} + \Gamma_{jk}^i p^j \frac{dx^k}{d\tau} = 0$$

En tenant compte de la relation entre p^j et la composante u^j de la quadrivitesse $p^i = mu^i$ avec $u^i = \gamma v^i$, on obtient :

$$\frac{du^i}{d\tau} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} = 0$$

Le premier terme de cette équation est la quadriaccélération ; quant au second, on peut interpréter son opposé comme la quadriforce qui s'exerce sur la particule dans le champ de gravitation. Dans ce contexte, les coefficients g_{ij} peuvent être considérés comme des potentiels associés à ce champ.

Annexe 3. Simulation en relativité

La simulation numérique est, de nos jours, une technique très largement utilisée en physique. Grâce à la puissance des ordinateurs actuels, ainsi qu'à l'avènement de logiciels interactifs et de langages de programmation orientés objets, la simulation permet de réduire notablement la durée des projets et donc leurs coûts.

La précision des calculs qu'autorise l'informatique n'est pas le seul intérêt de la simulation numérique. En effet, la possibilité de changer les conditions particulières d'un problème, de modifier les paramètres du système et d'observer le résultat obtenu, quasiment en temps réel, apporte un éclairage complémentaire, lequel contribue à approfondir l'étude.

En relativité, où l'analyse n'est pas intuitive, comme en mécanique newtonienne, l'informatique permet d'appliquer, de façon automatique et sûre, la transformation de Lorentz-Poincaré, et d'envisager des situations techniques plus complexes ; c'est le cas, par exemple, du mouvement des particules chargées dans un champ électromagnétique.

Le choix final d'un langage ou d'un environnement de programmation est toujours un problème, auquel il est difficile d'apporter une réponse totalement satisfaisante, tant ce choix est vaste parmi la multitude de logiciels et de langages de programmation. Devant un si large éventail de possibilités, nous avons choisi l'environnement Matlab, très répandu tant dans l'enseignement qu'ailleurs et totalement indépendant des ressources en matériel informatique disponibles. En effet, Matlab est devenu bien plus qu'un simple langage de programmation orienté objet, car il permet une écriture claire, concise et très proche de celle utilisée en physique. Ce choix est d'ailleurs conforté par l'importance, toujours croissante, de la communauté des utilisateurs de Matlab. Cependant, il ne s'agit pas ici d'initier le lecteur à l'utilisation de Matlab ; l'aide en ligne et les démonstrations disponibles sont suffisamment explicites pour que l'on devienne rapidement familier de ce langage. Il ne s'agit pas non plus d'écrire de longs programmes et de perdre de vue notre but qui est, avant tout, d'illustrer les concepts introduits en relativité et de montrer l'intérêt de la simulation numérique dans l'étude.

Le lecteur trouvera l'ensemble des programmes développés dans cette annexe, à l'adresse suivante :
<http://www.obs-mip.fr/people/perez/index/html>

I. — STRUCTURES DE DONNÉES ET FONCTIONS DE BASE

Dans cette première partie, on construit quelques fonctions de base pour calculer le rapport $\beta = v/c$ d'une vitesse quelconque sur la constante d'Einstein c , et le facteur relativiste associé $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$; on introduit ensuite les classes QX et QV destinées à manipuler les quadricvecteurs espace-temps et vitesse.

La fonction `beta` nous restitue le rapport de la vitesse v , exprimée en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, sur c , tandis que `invbeta` effectue l'opération inverse. Les fonctions `gamma` et `invgamma` agissent de même,

avec le facteur relativiste γ . Souvent, on utilisera `invbeta` pour avoir la valeur de c , puisque, lorsque $\beta = 1$, $v = c$:

```
>> c = invbeta(1)
c = 299792458
```

Notons que la variable `inf` de Matlab contient la représentation numérique de ∞ , ce qui est, ici, particulièrement commode pour le facteur relativiste γ , car ce dernier tend vers l'infini lorsque v tend vers c :

```
>> gama = gamma(c)
gama = Inf
```

Dans ces conditions, `invgamma` peut aussi être utilisé pour obtenir la valeur de c :

```
>> c = invgamma(Inf)
c = 299792458
```

Il est alors aisé de tracer le graphe de γ , lorsque β varie (Fig. A3.1) :

```
>> beta=0:0.01:1;
>> for k=1:length(beta), gama(k)=gamma(invbeta(beta(k))); end
>> figure(1); clf; plot(beta,gama);
```

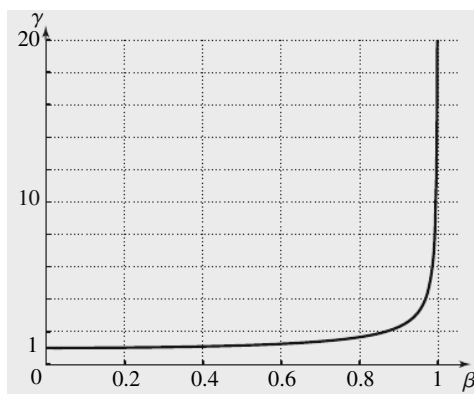


FIG. A3.1.

Le fichier `QX.m` dans le dossier `@QX` contient la définition de la classe `QX` représentative du quadrivecteur espace-temps $4\text{-}x$, lequel est caractérisé par ses quatre composantes (ct, x, y, z) .

Dans le dossier `@QX`, on trouve des fonctions, internes à la classe `QX`, qui effectuent des actions simples, comme le calcul du carré de la pseudo-norme $\|4\text{-}x\|^2$ ou celui du carré de l'intervalle entre deux événements, la mise en œuvre de la transformation de Lorentz-Poincaré, etc.

De même, le fichier `QV.m`, dans le dossier `@QV`, contient la définition de la classe `QV` représentative du quadrivecteur vitesse $4\text{-}v$, de composantes $(\gamma c, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z)$.

Dans le dossier `@QV`, on trouve aussi des fonctions, internes à la classe `QV`, qui exécutent des actions simples, comme le calcul du carré de la pseudo-norme $\|4\text{-}v\|^2$, etc.

Ces objets peuvent ensuite être utilisés dans des fonctions `MATLAB` pour effectuer des calculs parfois complexes. Le lecteur notera avec intérêt que le langage `MATLAB` permet alors d'exprimer les équations physiques d'une façon très proche de celle utilisée dans le langage scientifique habituel.

II. — QUADRIVECTEURS ET TRANSFORMATION DE LORENTZ

Dans cette partie, on illustre les propriétés des quadrivecteurs espace-temps et vitesse, relativement à la transformation de Lorentz. On vérifie les relations liant la durée impropre à la durée propre T_p et la longueur impropre à la longueur propre L_p .

II.1. — Quadrivecteur espace-temps

a) Intervalle entre deux événements du genre temps

On considère les deux événements A et B , de coordonnées spatio-temporelles suivantes, exprimées en mètre, dans le référentiel $\mathcal{R}$:

$$ct_A = 0,4 \quad x_A = 1 \quad y_A = 0 \quad z_A = 0$$

et :

$$ct_B = 1,6 \quad x_B = 2 \quad y_B = 0 \quad z_B = 0$$

respectivement. Les quadrivecteurs espace-temps $4\text{-}x_A$ et $4\text{-}x_B$ de ces événements sont créés à l'aide de la fonction QX, laquelle renvoie les informations associées dans les variables A et B :

```
>> c = invbeta(1);
>> A = QX(0.4/c, 1)
ct = 0.4
x = 1
y = 0
z = 0
>> B = QX(1.6/c, 2)
ct = 1.6
x = 2
y = 0
z = 0
>> SAB = norm2(A,B)
SAB = 0.4400
```

L'intervalle entre les événements A et B est bien du genre temps, puisque $s_{AB}^2 = 0,4400 > 0$.

b) Intervalle entre deux événements du genre espace

Soient deux événements A et B de coordonnées spatio-temporelles, dans le référentiel $\mathcal{R}$, toujours exprimées en mètre :

$$ct_A = 0,4 \quad x_A = 1 \quad y_A = 0 \quad z_A = 0$$

et :

$$ct_B = 1,2 \quad x_B = 2 \quad y_B = 0 \quad z_B = 0$$

Les quadrivecteurs espace-temps $4\text{-}x_A$ et $4\text{-}x_B$ de ces événements sont ici encore créés à l'aide de la fonction QX, laquelle restitue les informations associées dans les variables A et B :

```
>> c = invbeta(1);
>> A = QX(0.4/c, 1)
ct = 0.4
x = 1
y = 0
z = 0
>> B = QX(1.2/c, 2)
```

```

ct = 1.2
x = 2
y = 0
z = 0
>> SAB = norm2(A,B)
SAB = -0.3600

```

L'intervalle entre ces événements est du *genre espace* puisque $s_{AB}^2 < 0$.

II.2. — Durée propre

Lorsque l'intervalle entre les deux événements est du genre temps, le rapport s_{AB}/c est la durée propre qui sépare les événements A et B . Dans le premier exemple où l'intervalle est du genre temps, la fonction `Tpropre` restitue la valeur de la durée propre en mètre :

```

>> cTp = Tpropre(A,B)
cTp = 0.6633

```

ce qui est évidemment différent de $c(t_B - t_A) = cT = 1,2$.

Une autre manière de procéder consiste à calculer la vitesse d'entraînement v_e du référentiel propre, c'est-à-dire la vitesse de translation du référentiel propre $\mathcal{R}'$ dans lequel les événements se produisent en un même point de l'espace (cf. chapitre 2, paragraphe II.4) :

```

>> Ve = Rpropre(A,B);
>> Ue = beta(Ve)
Ue = 0.8333

```

puis d'appliquer la transformation de Lorentz aux coordonnées de A et B afin d'obtenir leurs coordonnées dans $\mathcal{R}'$:

```

>> Ap = lorentz(A,-Ve)
ct = -0.7839
x = 1.2060
y = 0
z = 0
>> Bp = lorentz(B,-Ve)
ct = -0.1206
x = 1.2060
y = 0
z = 0

```

Ces événements sont bien localisés au même point de l'espace $x'_A = x'_B = 1,2060$; l'intervalle de temps qui les sépare dans $\mathcal{R}'$ est bien $c(t'_B - t'_A) = cT' = cT_p = 0,6633$.

On vérifie alors que durée propre et durée impropre sont bien reliées par la relation $T = \gamma_e T_p$, puisqu'ici $\gamma_e = 1,81$.

II.3. — Longueur propre

La distance qui sépare deux événements A et B peut être considérée comme une longueur propre L_p , si la différence des abscisses $x'_B - x'_A$ dans un référentiel $\mathcal{R}'$ est indépendante de la différence des instants $ct'_B - ct'_A$. En effet, si tel est le cas, x'_A et x'_B sont fixés dans $\mathcal{R}'$. Ce dernier est alors le référentiel propre et la longueur propre L_p est obtenue en calculant $x_B - x_A$ à l'aide de la fonction `Lpropre` :

```

>> Lp = Lpropre(A,B)
Lp = 1.0000

```


Une autre manière de procéder consiste, comme précédemment, à calculer la vitesse d'entraînement v_e du référentiel propre $\mathcal{R}'$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ dans lequel on souhaite mesurer la différence des abscisses $x_B - x_A$, les événements correspondants devant se produire au même instant dans $\mathcal{R}$, afin que la mesure de longueur ait un sens pour un observateur de $\mathcal{R}$ (cf. chapitre 2, paragraphe II.4) :

```
>> Ve = Rpropre(A,B) ;
>> Ue = beta(Ve)
Ue = 0.8000
```

On applique ensuite la transformation de Lorentz à A et B pour obtenir les coordonnées de ces événements dans le référentiel impropre $\mathcal{R}$:

```
>> A = lorentz(A,-Ve)
ct = -0.6667
x = 1.1333
y = 0
z = 0
>> B = lorentz(B,-Ve)
ct = -0.6667
x = 1.7333
y = 0
z = 0
```

Ces événements ont bien lieu au même instant $ct_A = ct_B = -0.6667$ et la distance qui les sépare dans le référentiel impropre est égale à $x_B - x_A = 0,6$.

On vérifie bien que longueur propre et longueur impropre sont reliées par la relation $L = L_p/\gamma_e$:

```
>> L = Lp/gamma(Ve)
L = 0.6000
```

puisqu'en effet, ici $\gamma_e = 5/3$.

II.4. — Quadrivecteur vitesse

Une particule P se déplace, par rapport au référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, le long de l'axe $\mathbf{e}_x$, à la vitesse $\mathbf{u} = u_e \mathbf{e}_x$, avec $u_e = 0,5c$.

Elle émet une particule Q dont la vitesse, dans le référentiel en translation $\mathcal{R}_1$ lié à P , est $\mathbf{u}_1 = u_1 \mathbf{e}_y$ avec $u_1 = 0,8c$. Le quadrivecteur vitesse $4\text{-}v_1$ de Q est créé à l'aide de la fonction QV :

```
>> Ue = invbeta(0.5) ;
>> U1 = invbeta(0.8) ;
>> V41 = QV(0,U1)
beta = 0.8000
Vx/c = 0.0000
Vy/c = 0.8000
Vz/c = 0.0000
```

Les fonctions `beta` et `gamma` internes à la classe QV renvoient les valeurs de β et γ d'un quadrivecteur vitesse, ici $4\text{-}v_1$:

```
>> beta1 = beta(V41)
beta1 = 0.8000
>> gama1 = gamma(V41)
gama1 = 1.6667
```

Le quadrivecteur vitesse $4-v$ de Q dans le référentiel du laboratoire est obtenu par la transformation de Lorentz appliquée au quadrivecteur $4-v_1$:

```
>> V42 = lorentz(V41,Ue)
beta = 0.8544
Vx/c = 0.5000
Vy/c = 0.6928
Vz/c = 0.0000
```

On vérifie, à l'aide de la fonction `norm2` interne à la classe `QV`, l'invariance de la pseudo-norme des quadrivecteurs $4-v_1$ et $4-v$:

```
>> c = invbeta(1);
>> PN1 = sqrt(norm2(V41))/c
PN1 = 1.0000
>> PN2 = sqrt(norm2(V42))/c
PN2 = 1.0000
```

Enfin, en appliquant la tranformation inverse de Lorentz au quadrivecteur $4-v$

```
>> clear V41
>> V41 = lorentz(V42,-Ue)
beta = 0.8000
Vx/c = 0.0000
Vy/c = 0.8000
Vz/c = 0.0000
```

on retrouve bien le quadrivecteur $4-v_1$.

III. — ÉMISSION DE PARTICULES PAR UN OBJET EN MOUVEMENT

On s'intéresse à un noyau radioactif N , en mouvement rectiligne uniforme par rapport au référentiel du laboratoire, à la vitesse $\mathbf{u}_e = u_e \mathbf{e}_x$. Ce noyau émet, de manière isotrope, des particules P animées d'une vitesse v_1 dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_1$, d'origine N . On se propose de calculer la distribution angulaire des vitesses v de P dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$.

Le quadrivecteur $4-v_1$ de la vitesse $\mathbf{v}_1 = v_1 \cos \theta_1 \mathbf{e}_x + v_1 \sin \theta_1 \mathbf{e}_y$ des particules est créé à l'aide de la fonction `QV` pour différents angles θ_1 , compris entre 0 et π .

La transformation de Lorentz est ensuite appliquée à ce dernier pour obtenir le quadrivecteur $4-v$ associé à la vitesse $\mathbf{v}$. Enfin, pour chaque quadrivecteur, la fonction `polar` renvoie l'orientation θ et le module v du vecteur $\mathbf{v}$.

Si N se déplace, à la vitesse $u_e = 0,5c$, en émettant des électrons animés d'une vitesse $v_1 = 0,75c$ par rapport à $\mathcal{R}_1$, il vient :

```
>> Ue = invbeta(0.5);
>> V1 = invbeta(0.75);
>> T1 = (0:1:180)*pi/180;
>> for k=1:length(T1)
    V41=QV(V1*cos(T1(k)),V1*sin(T1(k)));
    V4=lorentz(V41,Ue);
    [T(k),V(k)]=polar(V4);
end
```

Les variations de θ et v , en fonction de θ_1 , sont représentées sur la figure A3.2 :

```
>> figure(1); clf; plot(T1*180/pi,T*180/pi);
>> figure(2); clf; plot(T1*180/pi,V);
```

La distribution angulaire des vitesses, dans $\mathcal{R}$, montre que l'émission a lieu dans tout l'espace, puisque θ prend des valeurs comprises entre 0° et 180° , comme θ_1 . Cependant, elle n'est pas parfaitement isotrope, puisque θ ne varie pas linéairement avec θ_1 : dans $\mathcal{R}$, environ les trois quarts des électrons sont émis dans le demi-espace situé devant le noyau radioactif. Sur la figure A3.3, on a représenté, en coordonnées polaires, les variations de v_1 en fonction de θ_1 , et celles de v en fonction de θ . Le code des couleurs utilisées est celui associé à θ_1 , depuis le noir pour $\theta_1 = 0^\circ$ jusqu'au blanc pour $\theta_1 = 180^\circ$.

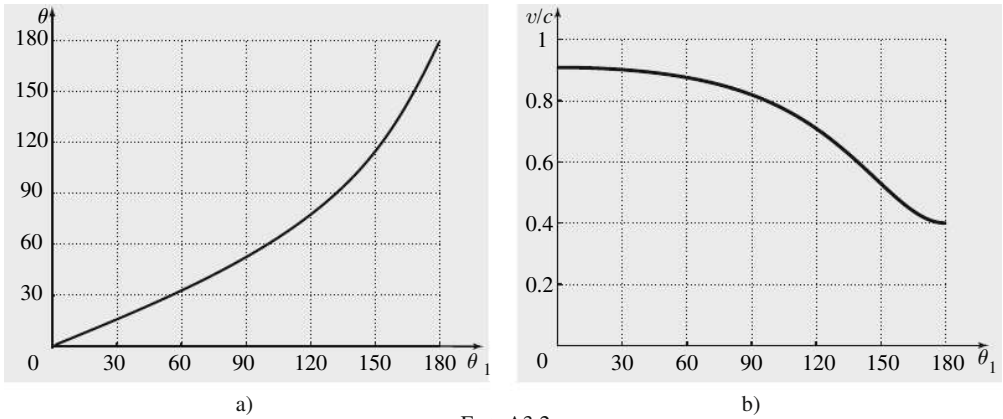


FIG. A3.2.

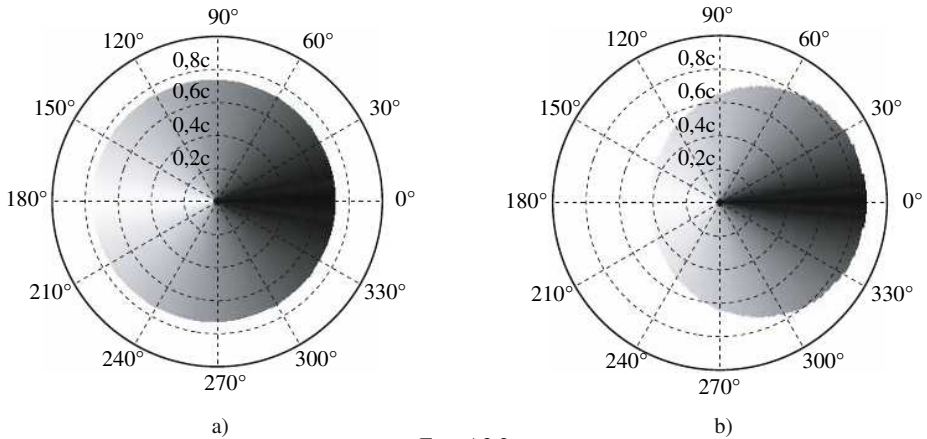


FIG. A3.3.

Ces figures changent significativement d'allure avec le rapport u_e/v_1 . En effet, lorsque $v_1 = u_e = 0,5c$, l'émission des électrons dans $\mathcal{R}$ s'effectue uniquement dans le demi-espace situé devant le noyau radioactif, comme on peut l'observer sur les figures A3.4 et A3.5.

Enfin, lorsque $v_1 < u_e$, par exemple $v_1 = 0,25c$, l'émission s'effectue dans un cône, de demi-angle au sommet $30^\circ = \arcsin v_1/u_e$, valeur correspondant à des particules émises dans le référentiel du noyau, avec un angle de 120° , comme on peut le vérifier sur les figures A3.6 et A3.7 :

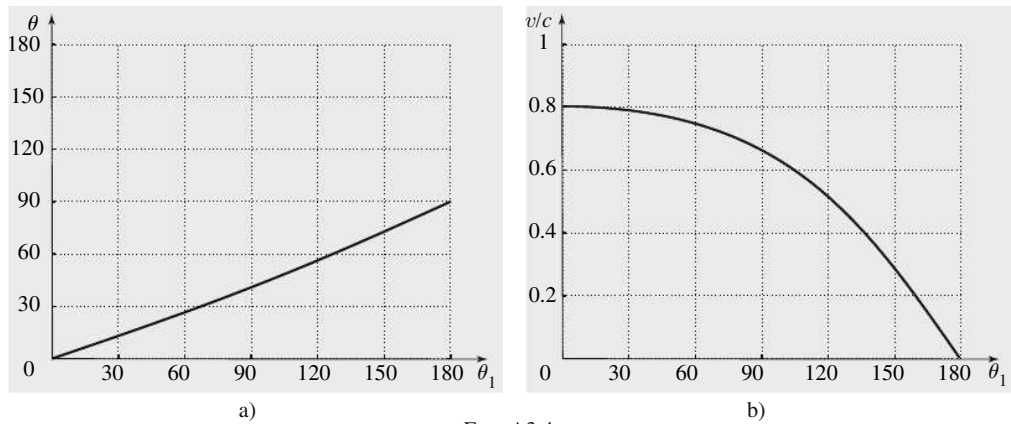


FIG. A3.4.

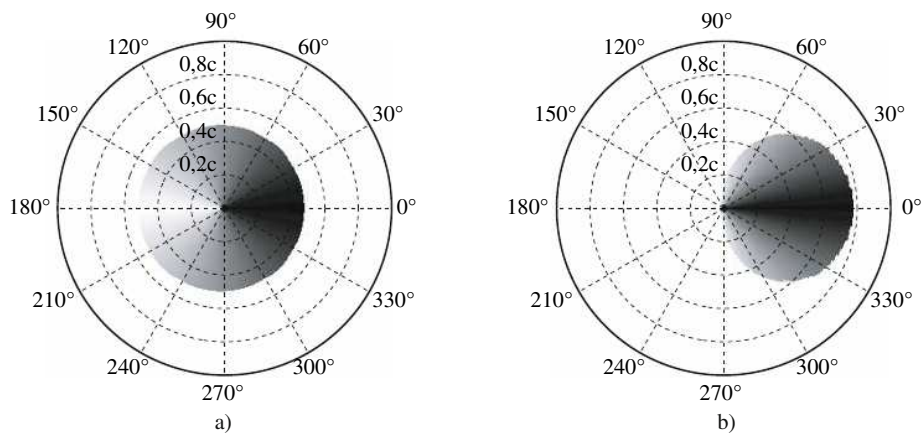


FIG. A3.5.

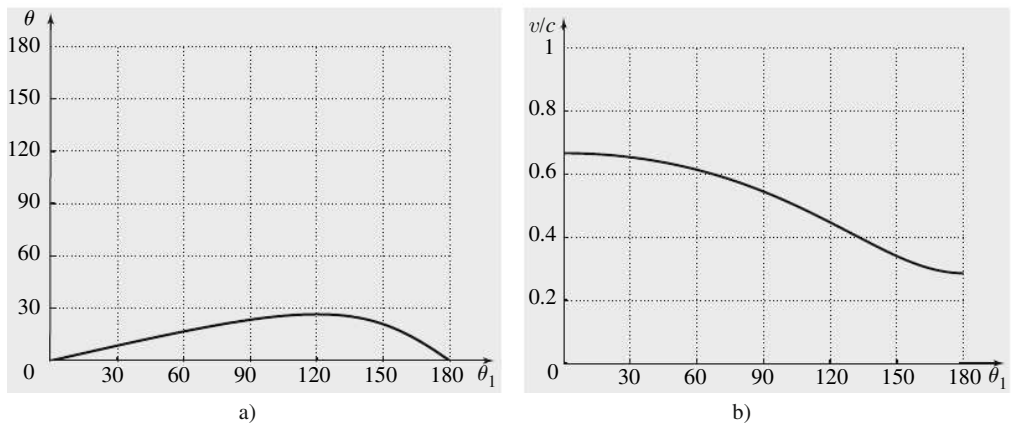


FIG. A3.6.

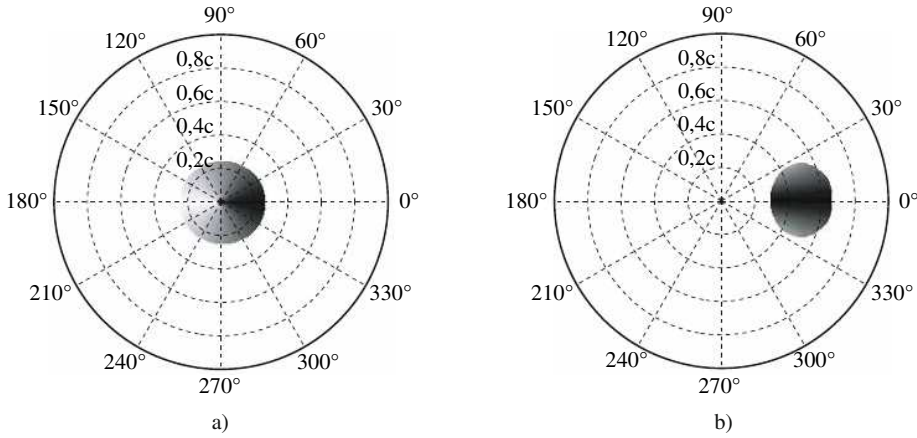


FIG. A3.7.

Notons que, dans tous les cas, la distribution angulaire de v montre que la transformation de Lorentz ne correspond pas à l'addition vectorielle newtonienne des vecteurs $\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_e = \mathbf{v}$ puisque v n'est jamais compris entre $v_1 + u_e$ et $|v_1 - u_e|$.

III. 1. — Cas ultra-relativiste

Le noyau N émet maintenant un rayonnement lumineux tout en se déplaçant à la vitesse $u_e = 0,9c$. Il vient alors :

```
>> Ue = invbeta(0.9);
>> V1 = invbeta(1);
>> T1 = (0:1:180)*pi/180;
>> for k=1:length(T1)
    V41=QV(V1*cos(T1(k)), V1*sin(T1(k)));
    V4=lorentz(V41,Ue);
    [T(k), V(k)] = polar(V4);
end
```

Les variations de θ et v en fonction de θ_1 sont représentées sur la figure A3.8 :

```
>> figure(1); clf; plot(T1*180/pi, T*180/pi);
>> figure(2); clf; plot(T1*180/pi, V2);
```

On constate que, dans $\mathcal{R}$, les vitesses v sont égales à c , quels que soient les angles θ_1 et θ . Par ailleurs, la distribution angulaire de ces vitesses montre que l'émission a lieu dans tout l'espace, puisque θ prend des valeurs comprises entre 0° et 180° , comme θ_1 . Cependant, ici aussi, elle n'est pas parfaitement isotrope car θ ne varie pas linéairement avec θ_1 . Sur la figure A3.9, on a représenté, en coordonnées polaires, les variations de v_1 en fonction de θ_1 , ainsi que celle de v en fonction de θ . Le code des couleurs utilisées est toujours celui associé à θ_1 , depuis le noir pour $\theta_1 = 0^\circ$ jusqu'au blanc pour $\theta_1 = 180^\circ$.

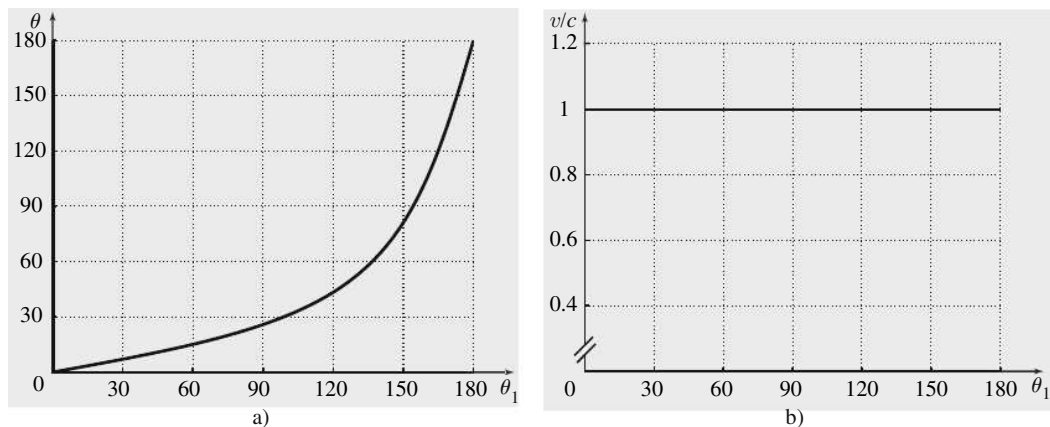


FIG. A3.8.

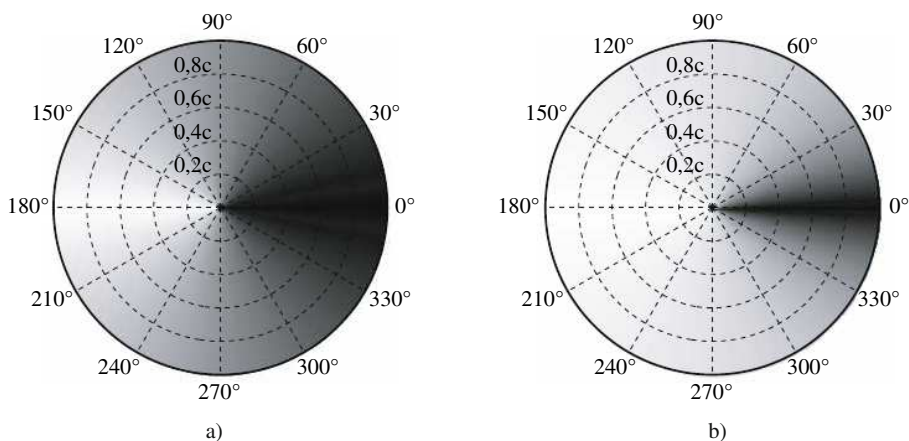


FIG. A3.9.

III. 2. — Approximation newtonienne

On restitue l'approximation newtonienne en considérant, par exemple, les vitesses suivantes $v_e = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $v_1 = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

```
>> Ue = 20;
>> V1 = 30;
>> T1 = (0:1:180)*pi/180;
>> for k=1:length(T1)
    V41=QV(V1*cos(T1(k)), V1*sin(T1(k)));
    V4=lorentz(V41,Ue);
    [T(k), V2(k)] = polar(V4);
end
```

Les variations de θ et v en fonction de θ_1 sont représentées sur la figure A3.10 :

```
>> c = invbeta(1);
>> figure(1); clf; plot(T1*180/pi, T2*180/pi);
```

```
>> figure(2); clf; plot(T1*180/pi,V2*c);
```

On voit que, dans le référentiel du laboratoire, la vitesse v varie entre $v_1 + u_e$ pour $\theta = \theta_1 = 0^\circ$ et $v_1 - u_e$ pour $\theta = \theta_1 = 180^\circ$.

Par ailleurs, la distribution angulaire des vitesses montre que l'émission a lieu dans tout l'espace puisque θ prend des valeurs comprises entre 0° et 180° , comme θ_1 . Cependant, elle n'est pas parfaitement isotrope, car θ ne varie pas linéairement avec θ_1 .

Par exemple, pour $\theta = 90^\circ$, θ_1 est de l'ordre de 132° , ce qui signifie que, dans le repère du laboratoire, environ les trois quarts des particules sont émises dans le demi-espace situé devant le noyau.

Sur la figure A3.11, on a représenté, en coordonnées polaires, les variations de v_1 , en fonction de θ_1 , et de v en fonction de θ . Le code des couleurs utilisées est toujours celui associé à θ_1 , depuis le noir pour $\theta_1 = 0^\circ$ jusqu'au blanc pour $\theta_1 = 180^\circ$.

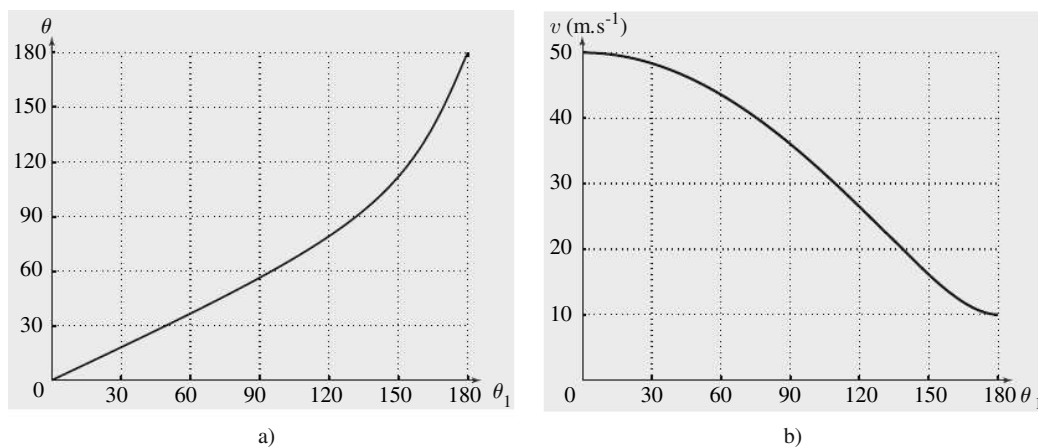


FIG. A3.10.

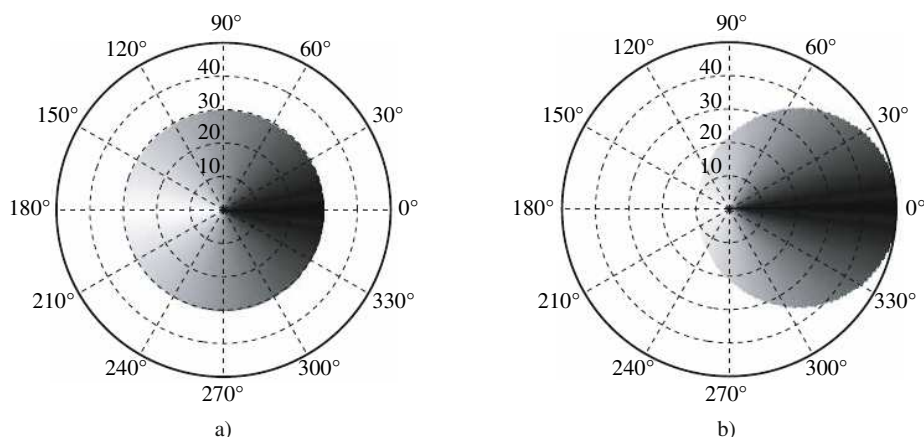


FIG. A3.11.

Ces figures changent sensiblement d'allure avec le rapport u_e/v_1 . En effet, lorsque $v_1 = u_e = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, l'émission des particules dans le référentiel du laboratoire s'effectue uniquement dans le demi-espace situé devant le noyau, comme on peut le constater sur les figures A3.12 et A3.13 :

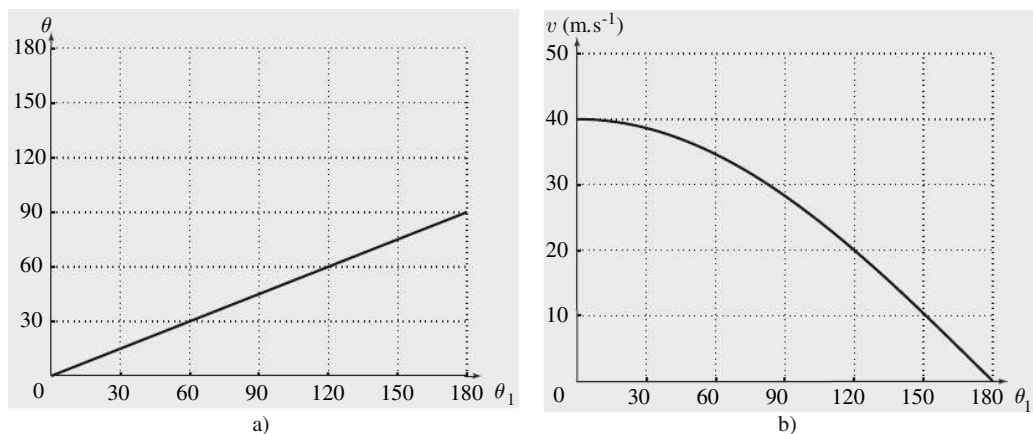


FIG. A3.12.

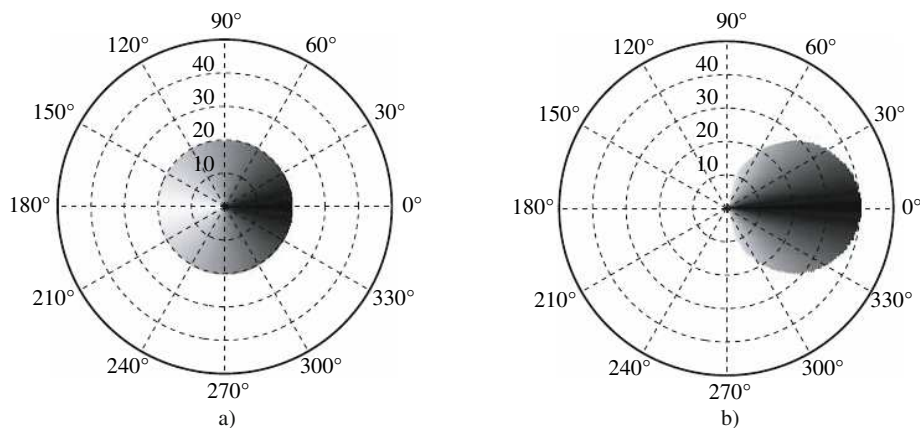


FIG. A3.13.

Enfin, lorsque $v_1 < u_e$, par exemple $v_1 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, l'émission s'effectue dans un cône de demi-angle au sommet $30^\circ = \arcsin v_1/u_e$, valeur correspondant à des particules émises dans le référentiel du noyau, avec un angle de 120° , comme on peut le vérifier sur les figures A3.14 et A3.15.

Notons que, dans tous les cas, la distribution angulaire de v montre que la transformation de Lorentz, dans le cas newtonien, correspond bien à l'addition vectorielle classique des vecteurs $\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_e = \mathbf{v}$, puisque v est ici toujours compris entre $v_1 + u_e$ et $|v_1 - u_e|$.

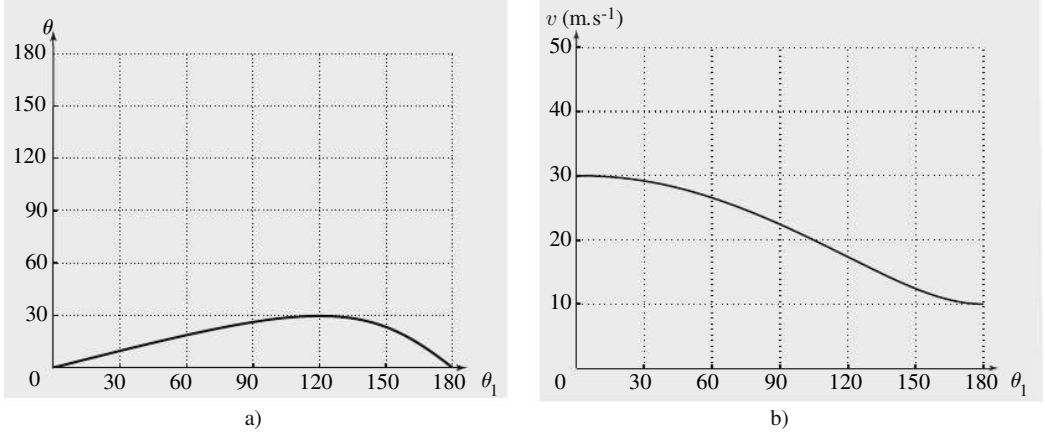


FIG. A3.14.

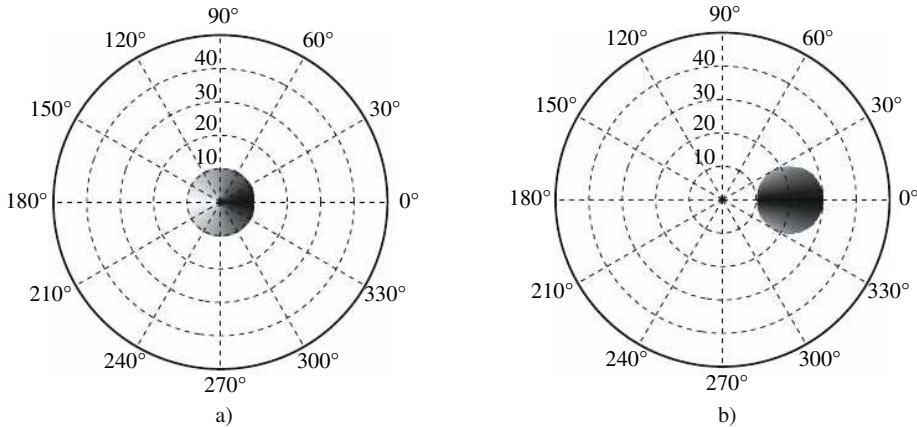


FIG. A3.15.

IV. — PARTICULE DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE STATIONNAIRE

L'équation différentielle vectorielle décrivant la trajectoire d'une particule, de masse m et de charge q , soumise à l'action d'un champ magnétique $\mathbf{B}$ stationnaire est la suivante :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \text{avec} \quad \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$$

Comme le champ magnétique est le seul champ qui agit sur la particule et que la force magnétique ne travaille pas, l'énergie cinétique de la particule est constante (cf. chapitre 6) ; par conséquent la vitesse et le facteur relativiste γ sont aussi des constantes. On peut alors réécrire l'équation précédente sous la forme :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \omega_c \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{B}}{B} \quad \text{où} \quad \omega_c = \frac{qB}{\gamma m}$$

est la pulsation cyclotron ω_c .

Lorsque le champ magnétique est orienté selon l'axe Oz , l'équation différentielle vectorielle précédente s'écrit alors en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega_c \frac{dy}{dt} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega_c \frac{dx}{dt} \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

Les solveurs de MATLAB ne permettent de résoudre que des équations différentielles vectorielles du premier ordre. Le système précédent de trois équations différentielles du second ordre peut s'écrire sous la forme d'un système de six équations différentielles du premier ordre en posant $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$ et $v_z = dz/dt$. En effet, on a alors :

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad \frac{dy}{dt} = v_y \quad \frac{dz}{dt} = v_z$$

et :

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega_c v_y \quad \frac{dv_y}{dt} = -\omega_c v_x \quad \frac{dv_z}{dt} = 0$$

La résolution de ce système fournira donc à chaque étape temporelle les coordonnées x , y et z de la particule, ainsi que les composantes v_x , v_y et v_z de son vecteur vitesse $\mathbf{v}$.

IV.1. — Particule dans un champ magnétique stationnaire uniforme

Le champ magnétique stationnaire a une valeur uniforme $B = 0,05$ T. En outre, la particule est un électron (masse $m = m_e$ et charge $q = -e$) :

```
>> c = invbeta(1);
>> q = -1.6021892E-19;
>> m = 0.9109534E-30;
>> B = 0.05;
```

Le fichier `odeB.m` contient la définition du problème que l'on cherche à résoudre : le vecteur `f` contient, lui, les valeurs de x , y , z , v_x , v_y et v_z à un instant t , tandis que le vecteur `df` renvoie les valeurs de $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$, $v_z = dz/dt$, puis de dv_x/dt , dv_y/dt et dv_z/dt :

```
function df=odeB(t,f,B,q,m)
x = f(1); Vx = f(4);
y = f(2); Vy = f(5);
z = f(3); Vz = f(6);
V = sqrt(Vx.^2 + Vy.^2 + Vz.^2);
w = (q*B) / (gamma(V)*m);
dVxdt = w*Vy;
dVydt = -w*Vx;
dVzdt = 0;
df = [Vx; Vy; Vz; dVxdt; dVydt; dVzdt];
```

La résolution de l'équation différentielle vectorielle du premier ordre, décrite dans le fichier `odeB.m`, peut s'effectuer en invoquant, par exemple, le solveur `ode45` de MATLAB qui utilise une méthode Runge-Kutta d'ordre 5 comme schéma d'intégration ; il est cependant nécessaire de préciser, avant tout, les conditions initiales du problème. Dans ce contexte, on suppose que la particule pénètre dans la zone où règne le champ magnétique $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$, en un point A_i , de coordonnées (x_i, y_i, z_i) , avec une vitesse $\mathbf{v}_i$ faisant un angle α_i avec $\mathbf{B}$. Il vient alors :

$$(v_x)_i = v_i \sin \alpha_i \quad (v_y)_i = 0 \quad \text{et} \quad (v_z)_i = v_i \cos \alpha_i$$

On prendra, par exemple, $v_i = 2c/3$ et $\alpha_i = 30^\circ$. Les coordonnées du point A_i seront choisies de sorte que la trajectoire de la particule s'enroule autour de l'axe Oz :

$$x_i = 0 \quad y_i = \rho_i \quad \text{et} \quad z_i = -2,5 \text{ m}$$

par exemple, ρ_i étant le rayon de courbure initial.

```
>> Vi = invbeta(2/3);
>> alphai = 30*pi/180;
>> Vxi = Vi*sin(alphai);
>> Vyi = 0;
>> Vzi = Vi*cos(alphai);
>> Zi = -2.5; Bi = B; Ri = (gamma(Vi)*m*Vi)/(q*Bi);
>> Yi = Ri;
>> Xi = 0;
```

À partir du point A_i , la particule se déplace sous l'action du champ magnétique $\mathbf{B}$; l'équation de sa trajectoire est solution de l'équation différentielle vectorielle décrite dans le fichier `odeB.m`. La résolution de cette équation s'effectue à l'aide de la fonction `ode45`, à laquelle on transmet le nom de ce fichier, les instants t pour lesquelles on veut les solutions x , y , z , v_x , v_y et v_z , ainsi que les conditions initiales x_i , y_i , z_i , $(v_x)_i$, $(v_y)_i$ et $(v_z)_i$ et un ensemble d'options relatives à la précision numérique des calculs avec lesquels l'intégration doit être effectuée :

```
>> options = odeset('Stats','on','RelTol',1E-12,'AbsTol',1E-12);
>> [t,f] = ode45('odeB',[0:0.01:9]/c, _____
_____ [Xi Yi Zi Vxi Vyi Vzi], options,B,q,m);
>> X = f(:,1); Vx = f(:,4);
>> Y = f(:,2); Vy = f(:,5);
>> Z = f(:,3); Vz = f(:,6);
```

Par commodité, on écrit, dans les vecteurs X , Y , Z , Vx , Vy et Vz , les valeurs des solutions x , y , z , v_x , v_y et v_z le long de la trajectoire de la particule, c'est-à-dire pour tous les instants du vecteur t . Les variations de ces solutions au cours du temps sont représentées sur la figure A3.16 :

```
>> figure(1); clf;
>> subplot(6,1,1); plot(c*t,X);
>> subplot(6,1,2); plot(c*t,Y);
>> subplot(6,1,3); plot(c*t,Z);
>> subplot(6,1,4); plot(c*t,Vx/c);
>> subplot(6,1,5); plot(c*t,Vy/c);
>> subplot(6,1,6); plot(c*t,Vz/c);
```

La trajectoire complète de la particule est représentée sur la figure A3.17 :

```
>> figure(2); clf; plot3(X,Y,Z);
```

C'est bien une hélice circulaire qui s'enroule dans le sens direct, de Ox vers Oy , le long de l'axe Oz (cf. chapitre 6). En outre, on vérifie que le long de cette trajectoire, la norme du vecteur vitesse $v = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2}$ demeure inchangée avec la valeur v_i :

```
>> V = sqrt(Vx.^2+Vy.^2+Vz.^2);
>> [min(V), max(V)]/c
ans = 0.6667 0.6667
```

Le long de l'axe Oz , le mouvement est uniforme, comme on peut le voir sur les variations de z et v_z au cours du temps. Pendant la durée $9/c$, pour laquelle les solutions ont été calculées, la co-

ordonnée z varie entre $-2,5$ m et $2,7$ m. En revanche, la distance totale parcourue par la particule est :

```
>> L=sum(sqrt(diff(X).^2+diff(Y).^2+diff(Z).^2))
L = 5.9993
```

soit approximativement 6 m, comme le prévoit la vitesse $v = 2c/3$.

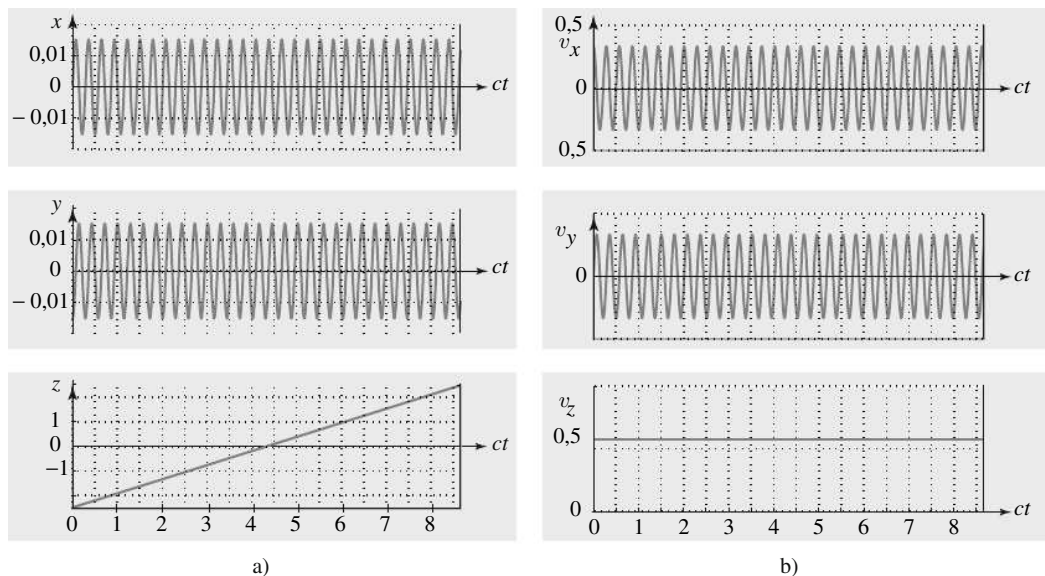


FIG. A3.16.

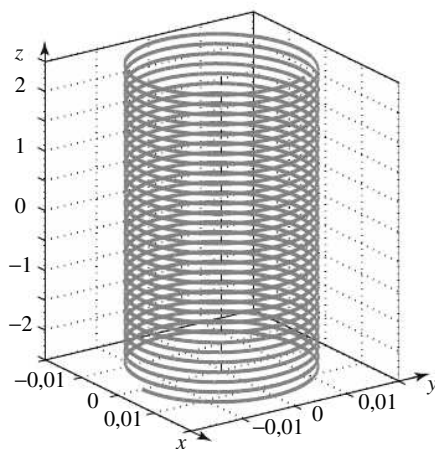


FIG. A3.17.

IV.2. — Focalisation dans un champ magnétique

Dans la suite, on se propose d'illustrer la focalisation radiale d'un faisceau d'électrons monocinétiques de vitesse $v = 2c/3$ dans un champ magnétique $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ avec $B = 0,05$ T. Par conséquent :

```
>> q = -1.6021892E-19;
>> m = 0.9109534E-30;
>> V = invbeta(2/3);
>> B = 0.05;
>> R = (gamma(V)*m*V) / (q*B)
R = -0.0305
```

Une fente source, située à l'origine O d'un repère Oxy , émet des électrons dont le vecteur vitesse initiale fait, avec la direction moyenne Oy , un petit angle ε , variant par exemple entre -10° et 10° . Les points d'intersection A des trajectoires circulaires, de rayon R , avec l'axe Ox , ont pour abscisses $x_A = 2R \cos \varepsilon$.

On désigne par A_i le point d'intersection correspondant à $\varepsilon = 0$. Le script suivant permet de représenter ces trajectoires globalement, mais aussi au voisinage des points O et A_i :

```
>> x = R*cos((0:360)*pi/180)+R;
>> y = R*sin((0:360)*pi/180);
>> figure(1); clf; hold('on');
>> for epsilon=-10:10
    xx = x*cos(epsilon*pi/180)+y*sin(epsilon*pi/180);
    yy = -x*sin(epsilon*pi/180)+y*cos(epsilon*pi/180);
    plot(xx/R,yy/R);
end
```

Ces trajectoires sont représentées sur la figure A3.18. On constate que plus la direction du vecteur vitesse initiale s'écarte de la direction moyenne Oy , plus la trajectoire coupe l'axe Ox en un point A' situé en amont de A_i .

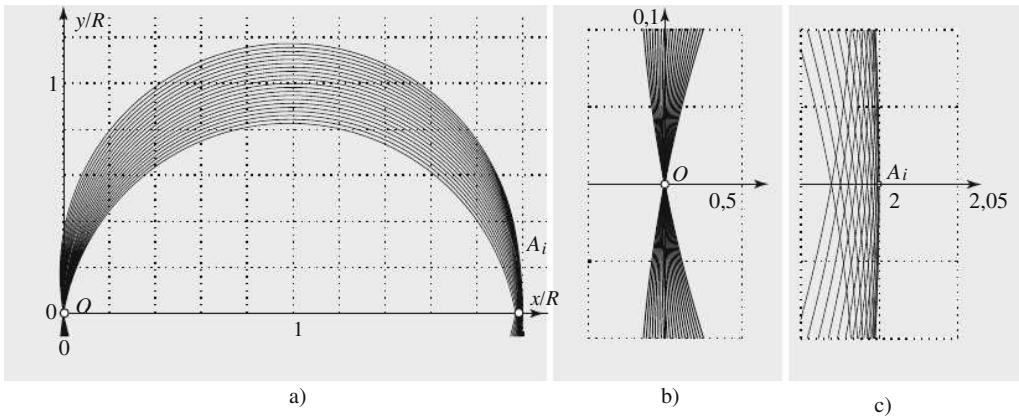


FIG. A3.18.

Le script suivant permet d'étudier les variations des abscisses x_i , en fonction de ε :

```
>> n = 1;
>> for epsilon=-10:10
    xx = x*cos(epsilon*pi/180)+y*sin(epsilon*pi/180);
    yy = -x*sin(epsilon*pi/180)+y*cos(epsilon*pi/180);
    k = find(xx > R & abs(yy) < 0.1*R);
    xI(n) = polyval(polyfit(yy(k),xx(k),2),0);
```

```

xIo(n) = 2*R-2*R*(epsilon*pi/180)^2;
n=n+1;
end
>> figure(1); clf; plot(-10:10,xI/R,'-',-10:10,xIo/R,':');

```

Ces variations sont représentées sur la figure A3.19. Tout d'abord, on note que les valeurs calculées par interpolation quadratique sont en parfait accord avec la relation $x_i = 2R \cos \varepsilon$. Ensuite, l'approximation $x_F \approx 2R - 2R\varepsilon^2$ n'est valable que pour les petits angles ε , et on a toujours $x_i \leq 2R$.

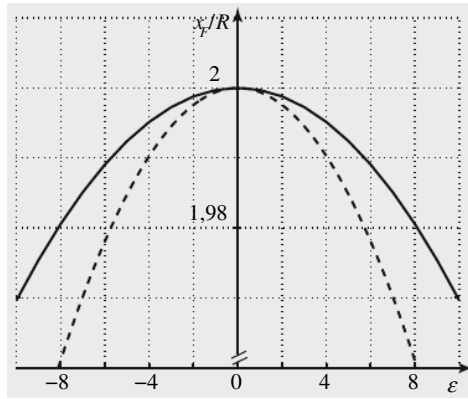


FIG. A3.19.

On peut donc dire que A_i est l'image de la source située en O , au sens de l'optique géométrique. Ce comportement est semblable à celui des rayons marginaux qui, en optique, convergent plus vite que les rayons paraxiaux de l'approximation de Gauss (cf. *Optique*).

IV.3. — Focalisation par un prisme magnétique

On simule ici les trajectoires des électrons qui pénètrent dans un espace en forme de prisme magnétique, d'angle Φ . Pour simplifier la programmation, on se place dans le cas simple où $\Phi = \pi/2$.

La source est une fente située en un point A_o , de coordonnées $x_o = 0$ et $y_o = -R$; elle émet des électrons, avec un vecteur vitesse initiale qui fait avec la direction moyenne Oy un petit angle ε ; on fait varier la valeur de ce dernier entre -10° et 10° .

Après une trajectoire rectiligne, ils pénètrent dans le prisme au voisinage du point d'entrée E (Fig. A3.20). À la sortie du prisme, leurs trajectoires redeviennent rectilignes et se coupent au voisinage d'un point A_i de coordonnées $x_i = 2R$ et $y_i = R$: on peut donc dire, ici aussi que A_i est l'image de la source A_o , au sens de l'optique géométrique. Le script suivant permet de représenter ces trajectoires globalement, mais aussi au voisinage des points A_o et A_i :

```

>> x = R*cos((0:185)*pi/180)+R;
>> y = R*sin((0:185)*pi/180);
>> figure(1); clf; hold('on');
>> for epsilon=-10:10
    xS = 0;                                yS = -R;
    xB = abs(yS)*tan(epsilon*pi/180); yB = 0;
    xx = x*cos(epsilon*pi/180)+y*sin(epsilon*pi/180)+xB;
    yy = -x*sin(epsilon*pi/180)+y*cos(epsilon*pi/180);
    k=min(find(xx < R))-1;

```

```

l=max(find(yy > 0))-1;
xC = R;   yC = polyval(polyfit(xx(k:k+1),yy(k:k+1),1),xC);
xD = 3*R; yD = polyval(polyfit(xx(k:k+1),yy(k:k+1),1),xD);
plot([xS xB xx(1:-1:k) xC xD]/R, [yS yB yy(1:-1:k) yC yD]/R);
end

```

Ces trajectoires sont représentées sur la figure A3.20. On constate que plus la direction du vecteur vitesse initiale s'écarte de la direction moyenne Oy , plus ces trajectoires se coupent tôt sur la droite joignant A_0 à A_i et passant par le sommet C du prisme.

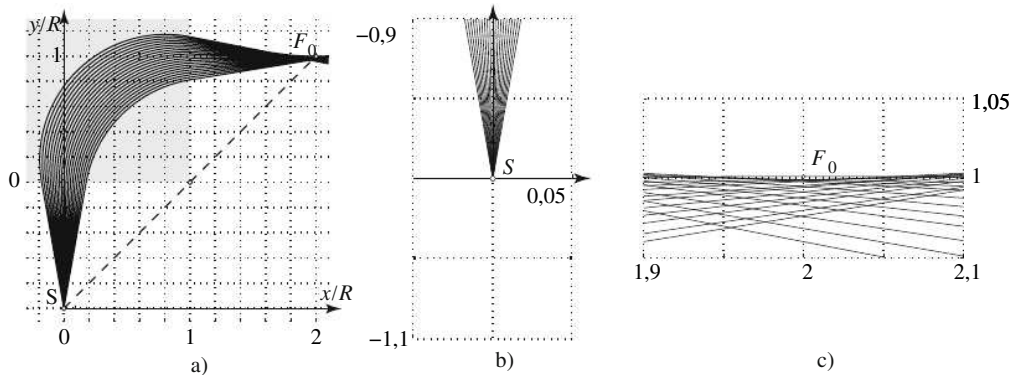


FIG. A3.20.

IV.4. — Particule dans un champ magnétique stationnaire non uniforme

On suppose ici à l'action d'un champ magnétique qui varie spatialement selon la loi :

$$B = B_0 \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right)$$

avec $B_0 = 0,05$ T et $z_0 = 1$ m, par exemple :

```
>> B0 = 0.05; Z0 = 1;
```

Il convient ici de modifier le fichier `odeB.m` afin de calculer la valeur B du champ magnétique à l'instant t où la particule se trouve en un point de côte z :

```

function df=odeB(t,f,B0,z0,q,m)
x = f(1); Vx = f(4);
y = f(2); Vy = f(5);
z = f(3); Vz = f(6);
V = sqrt(Vx.^2 + Vy.^2 + Vz.^2);
B = B0*(1+(z/z0).^2);
w = (q*B)/(gamma(V)*m);
dVxdt = w*Vy;
dVydt = -w*Vx;
dVzdt = 0;
df = [Vx; Vy; Vz; dVxdt; dVydt; dVzdt];

```


Les conditions initiales restent inchangées pour la vitesse v_i . Seule la coordonnée y_i change, puisque le champ magnétique au point A_i est plus grand et par conséquent le rayon de courbure local ρ_i plus faible :

```
>> Vi = invbeta(2/3);
>> alphas = 30*pi/180;
>> Vxi = Vi*sin(alphas);
>> Vyi = 0;
>> Vzi = Vi*cos(alphas);
>> Zi = -2.5; Bi = B0*(1+(Zi/Zo).^2); Ri = (gamma(Vi)*m*Vi)/(q*Bi);
>> Yi = Ri;
>> Xi = 0;
```

Enfin, lors de l'utilisation de la fonction ode45, il faudra transmettre tous les éléments nécessaires au calcul de la valeur du champ magnétique :

```
>> options = odeset('Stats','on','RelTol',1E-12,'AbsTol',1E-12);
>> [t,f] = ode45('odeB',[0:0.01:9]/c,[Xi Yi Zi Vxi Vyi Vzi],
options,B0,zo,q,m);
```

La trajectoire complète de la particule est représentée sur la figure A3.22 :

```
>> figure(2); clf; plot3(X,Y,Z);
```

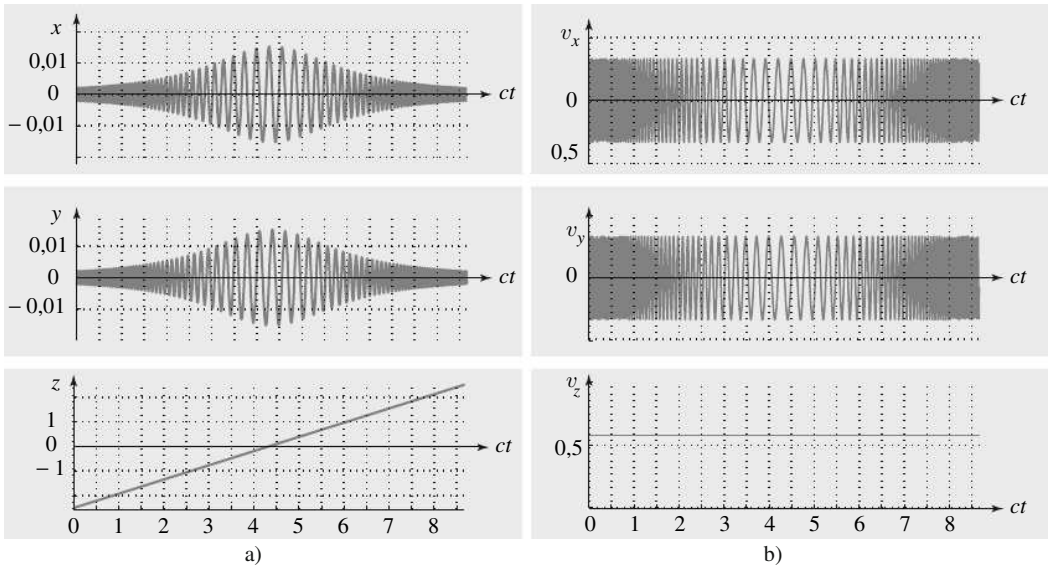


FIG. A3.21.

Contrairement au cas d'un champ uniforme, la trajectoire n'est pas celle d'une hélice circulaire ; on trouve quelques similitudes, puisqu'elle s'enroule toujours dans le sens direct (de Ox vers Oy) le long de l'axe Oz . En outre, on vérifie encore que, le long de cette trajectoire, la norme du vecteur vitesse $v = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2}$ demeure inchangée et reste égale à v_i :

```
>> V=sqrt(Vx.^2+Vy.^2+Vz.^2);
>> [min(V), max(V)]/c
ans = 0.6667 0.6667
```

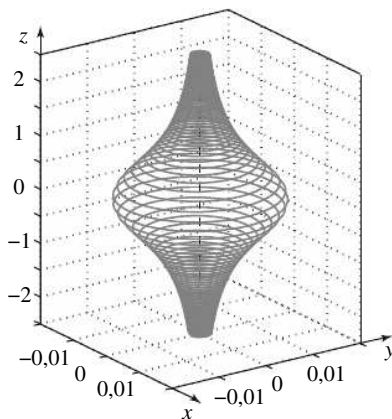



FIG. A3.22.

Évidemment la force magnétique ne travaille pas : le mouvement a lieu toujours à vitesse constante en norme, sa projection le long de l'axe Oz se déplaçant à vitesse uniforme.

Pendant la durée $9/c$, la coordonnée z varie encore entre $-2,5$ m et $2,7$ m. La distance totale parcourue par la particule est :

```
>> L=sum(sqrt(diff(X).^2+diff(Y).^2+diff(Z).^2))
L = 5.9991
```

soit encore environ 6 m, comme le prévoit la vitesse $v = 2c/3$. La particule a effectué beaucoup plus de tours autour de l'axe Oz pour parcourir la même distance, puisqu'ici le rayon de courbure local ρ est inférieur ou égal à celui de l'hélice circulaire obtenue dans le cas précédent.

V. — ACTION DE CHAMPS ÉLECTRIQUE ET MAGNÉTIQUE

L'équation différentielle vectorielle décrivant la trajectoire d'une particule, de masse m et de charge q , soumise à l'action simultanée d'un champ électrique $\mathbf{E}$ et d'un champ magnétique $\mathbf{B}$, est la suivante :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad \text{avec} \quad \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$$

L'équation différentielle vectorielle précédente s'écrit, en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= q(E_x + v_y B_z - v_z B_y) \\ \frac{dp_y}{dt} &= q(E_y + v_z B_x - v_x B_z) \\ \frac{dp_z}{dt} &= q(E_z + v_x B_y - v_y B_x) \end{aligned}$$

En raison de la présence du facteur relativiste γ qui n'est pas constant, la résolution de ce système d'équations différentielles est plus laborieuse que dans le cas newtonien. Il n'est plus possible d'obtenir un système d'équations différentielles du second ordre, dont les seules inconnues sont les coordonnées x , y , et z de la position de la particule, comme dans le paragraphe précédent. Aussi devons-nous

exprimer la vitesse $\mathbf{v}$ en fonction de $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}c^2}{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)c^2 + m^2c^4)^{1/2}}$$

Finalement, la résolution de l'équation différentielle initiale se ramène à celle d'un système de six équations différentielles du premier ordre couplées :

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{p_x c^2}{[(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)c^2 + m^2c^4]^{1/2}} & v_y &= \frac{p_y c^2}{[(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)c^2 + m^2c^4]^{1/2}} \\ v_z &= \frac{p_z c^2}{[(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)c^2 + m^2c^4]^{1/2}} \end{aligned}$$

et :

$$\frac{dp_x}{dt} = q(E_x + v_y B_z - v_z B_y) \quad \frac{dp_y}{dt} = q(E_y + v_z B_x - v_x B_z) \quad \frac{dp_z}{dt} = q(E_z + v_x B_y - v_y B_x)$$

Le fichier `odeEB.m` est utilisé comme précédemment : le vecteur $\mathbf{f}$ contient les valeurs de x , y , z , p_x , p_y et p_z , à un instant t , tandis que le vecteur $\mathbf{df}$ renvoie les valeurs de $dx/dt = v_x$, $dy/dt = v_y$, $dz/dt = v_z$, dp_x/dt , dp_y/dt et dp_z/dt .

```
function df=odeEB(t,f,E,B,q,m)
x = f(1); Px = f(4); Ex = E(1); Bx = B(1);
y = f(2); Py = f(5); Ey = E(2); By = B(2);
z = f(3); Pz = f(6); Ez = E(3); Bz = B(3);
c = invbeta(1);
Vx = Px*c^2/sqrt((Px.^2+Py.^2+Pz.^2)*c^2+m^2*c^4);
Vy = Py*c^2/sqrt((Px.^2+Py.^2+Pz.^2)*c^2+m^2*c^4);
Vz = Pz*c^2/sqrt((Px.^2+Py.^2+Pz.^2)*c^2+m^2*c^4);
dPxdt = q*(Ex + Vy*Bz - Vz*By);
dPydt = q*(Ey + Vz*Bx - Vx*Bz);
dPzdt = q*(Ez + Vx*By - Vy*Bx);
df = [Vx; Vy; Vz; dPxdt; dPydt; dPzdt];
```

Ce fichier permet de résoudre toutes sortes de problèmes, puisque les composantes cartésiennes des champs électrique $\mathbf{E}$ et magnétique $\mathbf{B}$ sont transmises dans les vecteurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$, ainsi que la masse m et la charge q de la particule dans les variables m et q . Cette approche s'avère donc plus générale que celle retenue lorsque la particule est dans un champ magnétique uniforme, ce dernier cas apparaissant alors comme un cas particulier.

V.1. — $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ colinéaires

Supposons que les champs électrique et magnétique soient orientés selon l'axe Oz et de valeurs déterminées :

$$\mathbf{E} = E\mathbf{e}_z \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = B\mathbf{e}_z \quad \text{avec} \quad E = 0,03 \times 10^8 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \quad \text{et} \quad B = 0,05 \text{ T}$$

En outre, la particule, de masse m et de charge q , est un électron :

```
>> c = invbeta(1);
>> q = -1.6021892E-19;
>> m = 0.9109534E-30;
>> E = [0 0 1]*0.03E+08;
>> B = [0 0 1]*0.05;
```

Enfin, on admet que l'électron pénètre dans la zone où règne le champ électromagnétique en un point A_i , de coordonnées (x_i, y_i, z_i) , avec une vitesse $\mathbf{v}_i = v_i \mathbf{e}_x$ perpendiculaire aux champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$. On a donc :

$$(p_x)_i = \gamma m v_i \quad \text{et} \quad (p_y)_i = (p_z)_i = 0$$

Si l'on adopte, par exemple, $v_i = 2c/3$, les coordonnées du point A_i seront choisies de telle sorte que la trajectoire de la particule s'enroule autour de l'axe Oz : $x_i = 0$, $y_i = \rho_i$ et $z_i = 0$, $\rho_i = \gamma m v_i / qB$ étant le rayon de courbure initial.

```
>> Vi = invbeta(2/3);
>> Pxi = gamma(Vi)*m*Vi;
>> Pyi = 0;
>> Pzi = 0;
>> Ri = Pxi/(q*B(3));
>> Xi = 0;
>> Yi = Ri;
>> Zi = 0;
```

À partir de A_i , la particule se déplace sous l'action du champ électromagnétique ; l'équation de sa trajectoire est la solution de l'équation différentielle vectorielle décrite dans le fichier `odeEB.m`. La résolution de cette équation se fait en invoquant la fonction `ode45`, à laquelle on transmet le nom de ce fichier, les instants t pour lesquels on veut les solutions x , y , z , p_x , p_y et p_z , ainsi que les conditions initiales x_i , y_i , z_i , $(p_x)_i$, $(p_y)_i$ et $(p_z)_i$, et un ensemble d'options relatives à la précision numérique des calculs avec lesquels l'intégration s'effectue :

```
>> options = odeset('Stats','on','RelTol',1E-12,'AbsTol',1E-12);
>> [t,f] = ode45('odeEB',[0:0.01:10]/c,[Xi Yi Zi Pxi Pyi Pzi],
option,E,B,q,m);
>> X = f(:,1); Px = f(:,4);
>> Y = f(:,2); Py = f(:,5);
>> Z = f(:,3); Pz = f(:,6);
>> Vx = Px*c^2./sqrt((Px.^2+Py.^2+Pz.^2)*c^2+m^2*c^4);
>> Vy = Py*c^2./sqrt((Px.^2+Py.^2+Pz.^2)*c^2+m^2*c^4);
>> Vz = Pz*c^2./sqrt((Px.^2+Py.^2+Pz.^2)*c^2+m^2*c^4);
```

Pour des raisons de commodité, on écrit dans les vecteurs X , Y , Z , Vx , Vy et Vz les valeurs des solutions x , y , z , ainsi que celles des composantes v_x , v_y et v_z du vecteur vitesse $\mathbf{v}$, calculées à partir des composantes p_x , p_y et p_z du vecteur quantité de mouvement $\mathbf{p}$ le long de la trajectoire. Les variations de ces solutions au cours du temps sont représentées sur la figure A3.23 :

```
>> figure(1); clf;
>> subplot(6,1,1); plot(c*t,X);
>> subplot(6,1,2); plot(c*t,Y);
>> subplot(6,1,3); plot(c*t,Z);
>> subplot(6,1,4); plot(c*t,Vx/c);
>> subplot(6,1,5); plot(c*t,Vy/c);
>> subplot(6,1,6); plot(c*t,Vz/c);
```

La trajectoire complète de la particule est représentée sur la figure A3.24 :

```
>> figure(2); clf; plot3(X,Y,Z);
```

La trajectoire est bien celle d'une hélice circulaire, de pas variable, qui s'enroule dans le sens direct (de Ox vers Oy), le long de l'axe Oz dans la direction opposée au champ électrique, puisque la charge de la particule est négative. Par ailleurs, on vérifie bien que le long de cette trajectoire, la norme du

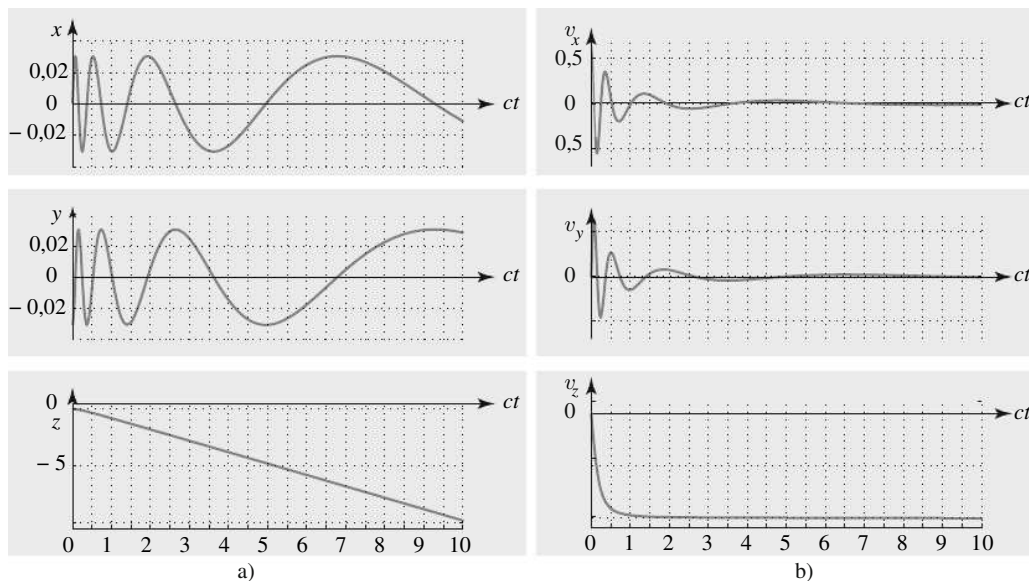


FIG. A3.23.

vecteur vitesse $v = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2}$ augmente, sous l'action du champ électrique, puisque la force magnétique ne travaille pas, et tend très rapidement vers la valeur limite c :

```
>> V=sqrt (Vx.^2+Vy.^2+Vz.^2) ;
>> [min(V) , max(V)] /c
ans = 0.6667 0.9999
```

Enfin, on vérifie aussi que le long de cette trajectoire, la quantité $p_x^2 + p_y^2$ demeure inchangée et reste égale à $(p_x)_i^2 + (p_y)_i^2$:

```
>> Pxy=sqrt (Px.^2+Py.^2) ;
>> [min(Pxy) , max(Pxy)] /sqrt (Pxi^2+Pyi^2)
ans = 1.0000 1.0000
```

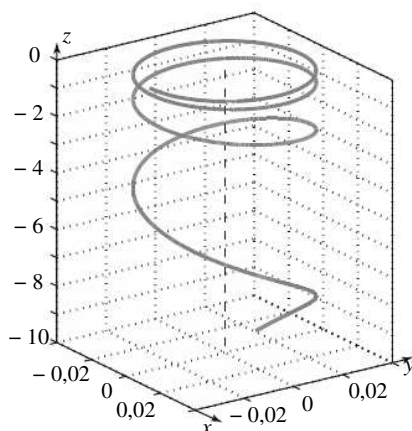


FIG. A3.24.

V.2. — **E** et **B** perpendiculaires

On s'intéresse maintenant à des champs électrique et magnétique orthogonaux et de valeurs constantes :

$$\mathbf{E} = E\mathbf{e}_x \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = B\mathbf{e}_y \quad \text{avec} \quad E = 0,03 \times 10^8 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \quad \text{et} \quad B = 0,02 \text{ T}$$

Par ailleurs, la particule est un électron :

```
>> c = invbeta(1);
>> q = -1.6021892E-19;
>> m = 0.9109534E-30;
>> E = [1 0 0]*0.03E+08;
>> B = [0 1 0]*0.02;
```

Enfin, on suppose que l'électron pénètre dans la zone où règne le champ électromagnétique en un point A_i , de coordonnées (x_i, y_i, z_i) , avec une vitesse $\mathbf{v}_i = v_i \mathbf{e}_z$ perpendiculaire aux champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$. On a donc : $(p_x)_i = (p_y)_i = 0$ et $(p_z)_i = \gamma m v_i$. On prend là aussi $v_i = 2c/3$ et $x_i = y_i = z_i = 0$.

```
>> Vi = invbeta(2/3);
>> Pxi = 0;
>> Pyi = 0;
>> Pzi = gamma(Vi)*m*Vi;
>> Xi = 0;
>> Yi = 0;
>> Zi = 0;
```

On a représenté sur les figures A3.25 et A3.26 les solutions obtenues, ainsi que la trajectoire complète. On constate que cette dernière est contenue dans le plan perpendiculaire au champ magnétique $\mathbf{B}$ et parallèle au plan formé par le champ électrique $\mathbf{E}$ et le vecteur vitesse $\mathbf{v}_i$.

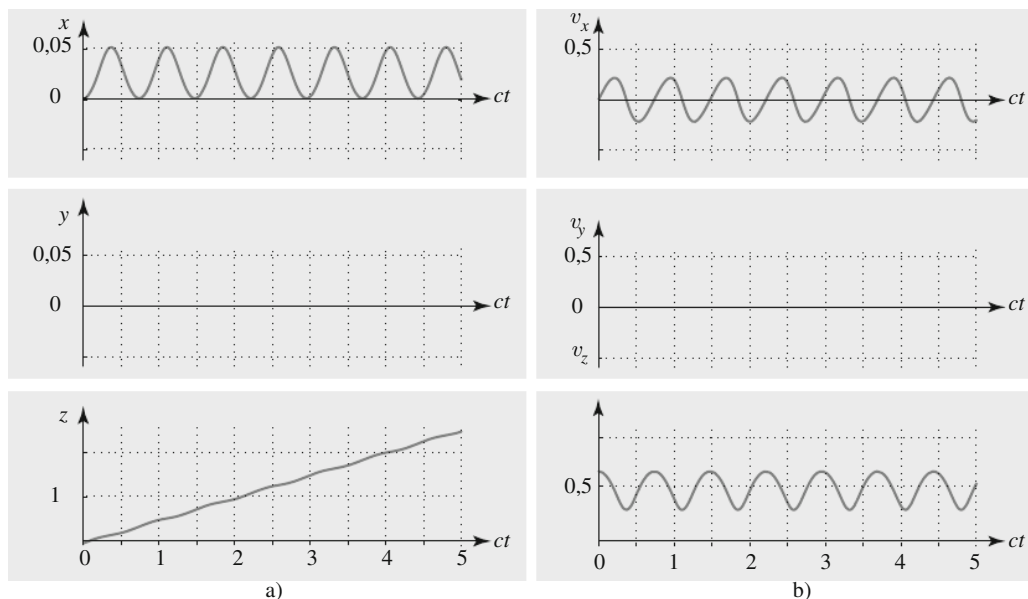


FIG. A3.25.

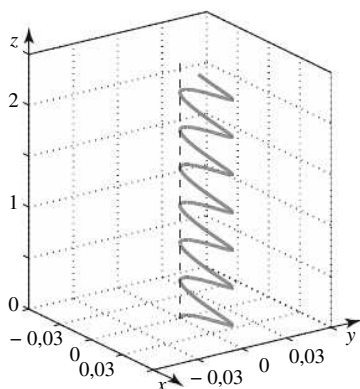


FIG. A3.26.

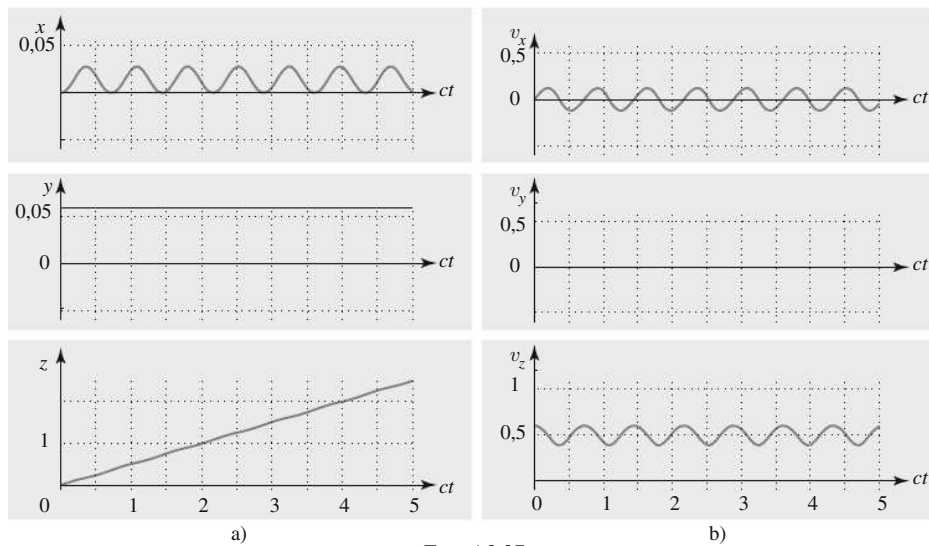


FIG. A3.27.

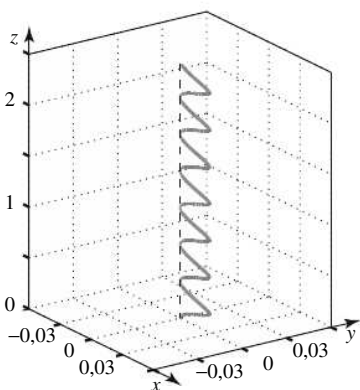


FIG. A3.28.

Plus précisément, c'est une sinusoïde dont l'amplitude et la période dépendent de v_i , de E et de B . En effet, seule la force magnétique peut rappeler périodiquement la particule puisque la force $q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ agit dans le plan Ozx , tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, en fonction de la direction de $\mathbf{v}$, alors que la force électrique $q \mathbf{E}$ agit dans ce même plan, mais toujours dans la même direction $-\mathbf{e}_x$, puisque $q < 0$.

Lorsque v_i se rapproche du rapport E/B , l'amplitude des oscillations diminue, comme on peut le constater sur les figures A3.27 et A3.28, où $v_i = 0,6c$ alors que $E/B = 0,5c$.

Enfin, lorsque $v_i = E/B$, les actions des forces électrique et magnétique se compensent exactement et la trajectoire est rectiligne, comme on peut le voir sur les figures A3.29 et A3.30 où $v_i = 0,5c$. On réalise ainsi un filtre de Wien, capable de sélectionner les particules qui ont une vitesse exactement égale au rapport des champs puisqu'elles sont les seules à ne pas être déviées.

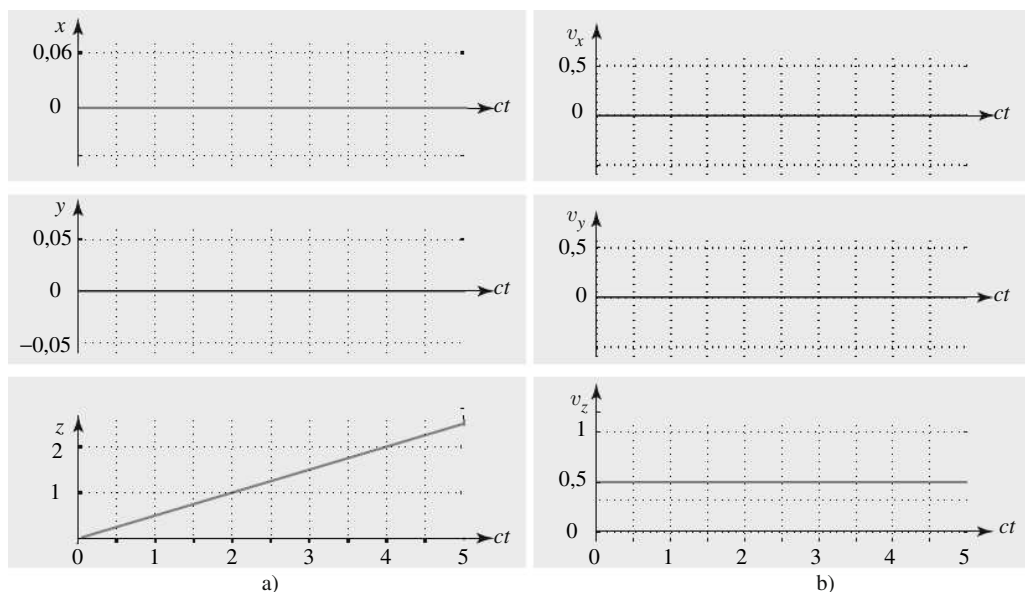


FIG. A3.29.

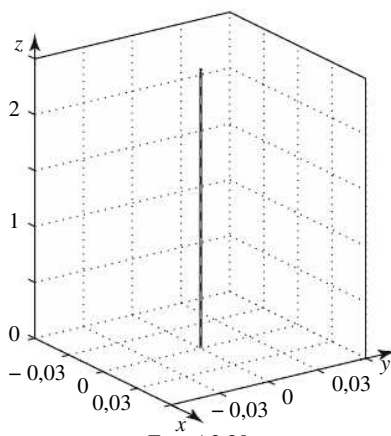


FIG. A3.30.

Réponses aux vingt questions

1. La relativité restreinte consiste d'abord à constater que certaines grandeurs, le temps d'un référentiel par exemple, ne sont pas universelles, puis à leur substituer des grandeurs universelles, le temps propre dans l'exemple considéré, qui sont des invariants (par changement de référentiel galiléen). Plus généralement, en relativité, on cherche des grandeurs (c , etc.) ou des formulations (loi fondamentale, équations de Maxwell, etc.) qui soient invariantes (cf. chapitre 1) ou covariantes (cf. chapitre 10).

2. En réalité, les équations de Maxwell structurelles (induction électromagnétique et conservation du flux du champ magnétique) sont invariantes par transformation de Galilée. En revanche, les équations de Maxwell non structurelles (théorème de Gauss et théorème d'Ampère) ne sont pas invariantes par transformation de Galilée (cf. chapitre 1).

3. Les ondes électromagnétiques se propagent d'autant plus vite que le milieu est dilué, contrairement aux ondes acoustiques qui se propagent plus vite dans les milieux condensés. Dans le vide, la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques est maximale (c), alors que celle des ondes acoustiques y est nulle (cf. chapitre 1).

4. En relativité galiléenne, l'intervalle temporel entre deux événements est un invariant. C'est l'hypothèse newtonienne de l'universalité du temps. En revanche, l'intervalle spatial correspondant n'est pas un invariant. Il y a souvent confusion entre cet intervalle spatial et l'universalité de la longueur d'une règle en relativité galiléenne (cf. chapitre 2).

5. Les deux façons d'écrire le carré de l'intervalle entre deux événements infiniment voisins sont :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 d\tau^2 - dl^2 \quad \text{et} \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = dl^2 - c^2 dt^2$$

La première correspond à la signature $++--$, la seconde à la signature $--++$. Du seul point de vue calculatoire, ces deux signatures sont aussi efficaces, mais dans la première les événements sont reliés par des relations de causalité et donc séparés par un intervalle réel (carré positif), alors que dans la seconde ces mêmes événements sont séparés par un intervalle imaginaire (carré négatif). Notons que, dans la première formulation, ds/c restitue l'invariance newtonienne $d\tau$, par approximation newtonienne en faisant $dl^2 \ll c^2 dt^2$, conformément à l'analyse einsteinienne (cf. chapitre 2).

6. Même si le temps et l'espace sont imbriqués en relativité restreinte, le temps s'écoule du passé vers le futur, selon le deuxième principe de la thermodynamique, lequel n'a pas d'équivalent spatial (cf. chapitre 2).

7. Il s'agit là d'une erreur grossière que l'on ne trouve pas uniquement dans de mauvais ouvrages de vulgarisation. Cette erreur cache, au-delà d'un goût particulier pour la pensée magique, une véritable incompréhension de la relativité. Rappelons que la contraction des longueurs concerne la comparaison de deux longueurs d'une même règle, la première mesurée par un observateur fixe par rapport à la règle, la seconde mesurée par un observateur en mouvement par rapport à la règle (cf. chapitre 3).

8. L'un des jumeaux, Gaspard, celui qui est sur la Terre, ne fait *rien*. L'autre, l'astronaute Arthur, saute au départ sur une première fusée, change de fusée à la fin de l'aller, quitte ensuite cette dernière pour retrouver son point de départ sur la Terre. Il a donc subi trois accélérations importantes, contrairement à Gaspard (cf. chapitre 3).

9. En 1729, James Bradley mesure la vitesse de la lumière dans le vide, avec une efficacité remarquable, en étudiant l'aberration de l'étoile γ du Dragon ; il utilise évidemment la formule newtonienne et non la formule einsteinienne qui en diffère par le seul facteur γ_e , lequel est dans ce cas très proche de 1, puisque $v_e \approx 3 \times 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (cf. chapitre 4). On a, en effet, si α_n est l'angle d'aberration newtonien et α l'angle d'aberration relativiste :

$$\alpha_n \approx \frac{v_e}{c} = \beta_e \quad \text{et} \quad \alpha \approx \gamma_e \beta_e \approx \beta_e \quad \text{puisque} \quad \gamma_e = \left(1 - \frac{v_e^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx 1$$

10. L'expérience interférentielle de Fizeau, avec le dispositif d'Young et de l'eau en mouvement traversée par la lumière, confirme la théorie d'Einstein qui prévoit, contrairement à la théorie de Newton, un facteur $1 - 1/n^2 \approx 0,437$. Comme cette expérience a été mise en œuvre en 1851, bien avant que la théorie d'Einstein ne soit connue, elle aurait pu valider la théorie d'Einstein, avant l'expérience de Michelson et Morley (cf. chapitres 1 et 4).

11. Le concept de masse variable jette un trouble inutile dans la définition de la masse d'un corps, car il suffit de dire que la loi fondamentale de la dynamique en relativité s'écrit comme en mécanique newtonienne, avec une relation seulement moins simple entre la quantité de mouvement et la vitesse :

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} \quad \text{où} \quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

L'inconvénient pédagogique de ce concept est certain : il peut laisser penser que toutes les expressions newtoniennes faisant apparaître la masse peuvent se généraliser en remplaçant m par γm , ce qui est évidemment faux (cf. chapitre 5).

12. Cette tentative d'interprétation prévoyait une avance du périhélie de Mercure de 7 secondes d'arc, alors que le résultat d'observation est proche de 43 secondes d'arc. La théorie d'Einstein sur l'espace-temps courbe prévoit, elle, cette dernière valeur avec une excellente précision (cf. chapitres 5 et 10).

13. La masse d'un système n'est pas, en relativité, la somme des masses des constituants : elle n'est pas additive, contrairement à la masse dans l'approximation newtonienne. Ainsi, dans le cas considéré, la somme des masses des deux photons est nulle, puisque chaque photon a une masse nulle, alors que la masse du système vaut (cf. chapitre 5) :

$$M = \frac{1}{c^2} (\mathcal{E}^2 - P^2 c^2)^{1/2} = \frac{2h\nu}{c^2}$$

car $\mathcal{E} = 2h\nu$ et $P = 0$.

14. Ce mouvement dans un champ magnétique seul est simple à étudier, car les résultats newtoniens se transposent au cas relativiste, si on remplace la masse m par le produit γm . Il est en outre important, car il est facile, avec un champ magnétique, d'amener une particule chargée dans une région déterminée de l'espace. C'est précisément ce qui est réalisé dans les accélérateurs de particules : on amène périodiquement des particules dans des régions (les cavités accélératrices) où règne un champ électrique, lequel augmente la norme de la vitesse des particules (cf. chapitre 6).

15. Le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$, défini comme le référentiel en translation par rapport au référentiel du laboratoire et tel que la quantité de mouvement totale du système est nul, présente l'avantage de simplifier l'analyse des collisions (cf. chapitre 7).

i) Pour traiter la diffusion, on se place d'abord dans $\mathcal{R}^*$, puis on applique les formules de transformation de 4- p .

ii) Dans $\mathcal{R}^*$, il suffit de considérer l'une des particules, le projectile par exemple, pour savoir si la collision subie est élastique ou non. Si cette particule conserve son énergie cinétique, la collision est élastique.

iii) Dans $\mathcal{R}^*$, il est facile de déterminer l'énergie-seuil d'une collision inélastique, car toutes les particules peuvent y être simultanément au repos.

16. Le seuil énergétique de réalisation d'une collision inélastique est plus faible dans $\mathcal{R}^*$ que dans le référentiel du laboratoire. C'est ce qui est réalisé dans les anneaux de stockage (cf. chapitre 7).

17. Le produit scalaire des champs électrique et magnétique est un invariant. Par conséquent, la condition nécessaire pour que cet ensemble se réduise à un seul champ électrique ou magnétique dans un référentiel est que le produit scalaire soit nul et donc que les champs soient orthogonaux dans un autre référentiel (cf. chapitre 8).

18. Un calcul simple montre que l'effondrement gravitationnel d'une étoile, par exemple le Soleil, devrait être perceptible s'il était à l'origine du rayonnement d'une étoile. Depuis les travaux de Bethe, on sait que ce sont des réactions de fusion d'éléments légers dans l'étoile qui fournissent l'énergie rayonnée (cf. chapitre 9).

19. L'expression de la force d'attraction gravitationnelle de Newton n'est qu'approximative : elle est nulle lorsque l'une des particules est un photon. En réalité, on sait, depuis la théorie d'Einstein que la gravitation doit être interprétée par la courbure de l'espace-temps. Dans ces conditions, un photon a sa trajectoire modifiée par la présence d'une masse ; c'est ce qui a été observé avec le Soleil et qui est constaté dans les mirages gravitationnels (cf. chapitre 10).

20. La constante cosmologique Λ a été introduite par Einstein pour décrire l'Univers comme un système statique infini, avec une masse volumique non nulle, ce qui conduit à une aporie qu'évite précisément cette constante. Actuellement, on considère que la constante cosmologique est indispensable pour décrire un Univers en expansion accélérée conforme aux observations (cf. chapitre 10). Dans ce contexte, on interprète souvent la constante cosmologique comme la manifestation d'une force répulsive opposée à la force de gravitation ou d'une énergie volumique singulière, l'énergie sombre volumique.

Solutions des exercices et problèmes

Chapitre 1

S1– 1. Principe de l'inertie en mécanique de Newton

Comme le référentiel du voilier a les mêmes propriétés que le référentiel terrestre, et que, dans ce dernier, tout corps abandonné en chute libre a une trajectoire verticale, le point de chute est évidemment le bas du mât.

S1– 2. Mesure de la vitesse de la lumière par Roemer et Huygens

Notant c_H la valeur de la vitesse obtenue par Huygens à partir du retard τ_R mesuré par Roemer, on a la relation suivante :

$$c_H = \frac{D}{\tau_R} \quad \text{avec} \quad D = c\tau$$

On en déduit : $c_H = c\tau/\tau_R = 3 \times 10^8 \times 16,5/22 = 2,25 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

S1– 3. Propagation du son

1. Comme un gaz parfait, en évolution isentropique, satisfait à l'équation de Laplace $pV^\gamma = \text{Cte}$, on a :

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \quad \text{d'où} \quad \kappa_s = \frac{1}{\gamma p} = \frac{V}{\gamma nRT} = \frac{V}{\gamma m r T} = \frac{1}{\gamma \rho r T} = \frac{M_m}{\gamma \rho r T}$$

On en déduit $c_s = (\rho \kappa_s)^{-1/2} = (\gamma RT/M_m)^{1/2}$, soit :

$$(c_s)_O = \left(\frac{1,4 \times 8,314 \times 300}{0,032} \right)^{1/2} = 330 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad (c_s)_O = \left(\frac{1,4 \times 8,314 \times 300}{0,028} \right)^{1/2} \approx 353 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2. Dans le benzène, $c_s = (\rho \kappa_s)^{-1/2} = 1248 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

3. Dans la roche, $c_s = (\rho \kappa_s)^{-1/2} = 20000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

S1– 4. Invariance de l'équation de Maxwell-Faraday dans la transformation de Galilée

L'équation structurelle de Maxwell-Faraday, qui traduit la loi de l'induction, est :

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad \text{ce qui donne} \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

en explicitant la première composante. En introduisant les composantes et coordonnées dans $\mathcal{R}'$ galiléen, de vitesse v_e par rapport à $\mathcal{R}$, on obtient :

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} + \frac{\partial B'_x}{\partial t} - v_e \left(\frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} + \frac{\partial B'_x}{\partial x'} \right) = 0$$

Or $\text{div}' \mathbf{B}' = 0$, d'où :

$$\frac{\partial B'_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} = 0 \quad \text{et par conséquent} \quad \frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} + \frac{\partial B'_x}{\partial t} = 0$$

Quant à la deuxième composante, elle s'explicitite selon :

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0$$

ce qui donne, en remplaçant :

$$\frac{\partial E'_x}{\partial z'} - \frac{\partial E'_z}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial t'} + v_e \frac{\partial B'_y}{\partial x'} - v_e \frac{\partial B'_y}{\partial x'} = 0$$

Pour la troisième composante, on trouve un résultat analogue. L'équation de Maxwell-Faraday reste donc invariante dans la transformation de Galilée.

S1– 5. Non-invariance de l'équation de Maxwell-Ampère dans la transformation de Galilée

L'équation non structurale de Maxwell-Ampère, qui traduit le théorème d'Ampère généralisé, est :

$$\text{rot } \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$$

en explicitant la première composante. En remplaçant par les coordonnées dans $\mathcal{R}'$, de vitesse v_e , on obtient :

$$\frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E'_x}{\partial t'} - \varepsilon_0 \mu_0 v_e \frac{\partial E'_x}{\partial x'} = 0$$

Or $\partial E'_x / \partial x' \neq 0$. Par conséquent :

$$\frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E'_x}{\partial t'} \neq 0$$

L'équation de Maxwell-Ampère n'est donc pas invariante dans la transformation de Galilée.

S1– 6. Non-invariance du dalembertien dans la transformation de Galilée

1. Relions les dérivées par rapport à x et t à celles par rapport à x' et t' , sachant que $x' = x - v_e t$ et $t' = t$. On trouve, pour les dérivées premières :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -v_e \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'}$$

d'où, pour les dérivées secondes :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t'} \left(-v_e \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'} \right)$$

soit :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -v_e \frac{\partial}{\partial x'} \left(-v_e \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'} \right) + \frac{\partial}{\partial t'} \left(-v_e \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'} \right) = v_e^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2v_e \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

Ainsi :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{v_e^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2 \frac{v_e}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \neq \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x'^2}$$

2. Vérifions que le dalembertien est au contraire invariant par changement de référentiel galiléen, pour le groupe de transformation de Lorentz-Poincaré. Comme :

$$x' = \gamma_e(x - v_e t) \quad \text{et} \quad t' = \gamma_e(t - v_e x/c^2)$$

il vient, pour les dérivées premières :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \gamma_e \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\gamma_e v_e}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\gamma_e v_e \frac{\partial}{\partial x'} + \gamma_e \frac{\partial}{\partial t'}$$

Quant aux dérivées secondes, elles se transforment selon :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \gamma_e^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2 \frac{v_e}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \frac{v_e^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \gamma_e^2 \left(v_e^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2 v_e \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right)$$

On en déduit, en substituant :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x'^2}$$

ce qui établit l'invariance du dalembertien par changement de référentiel galiléen.

S1- 7. Invariance du caractère conservatif de la charge dans la transformation de Galilée

Les dérivations par rapport au temps et l'espace donnent, en considérant la transformation de Galilée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -v_e \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} \end{aligned}$$

Il en résulte que l'opérateur divergence est invariant : $\text{div} = \text{div}'$.

En raison de l'invariance de la charge, $\delta q = \delta q'$, d'où :

$$\rho \, dx \, dy \, dz = \rho' \, dx' \, dy' \, dz' \quad \text{et} \quad \rho = \rho' \quad \text{puisque} \quad dx \, dy \, dz = dx' \, dy' \, dz'$$

dans une transformation de Galilée. En outre, les courants volumiques dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ s'écrivent respectivement :

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} \quad \text{et} \quad \mathbf{J}' = \rho' \mathbf{v}' \quad \text{d'où} \quad \mathbf{J} = \rho(\mathbf{v}' + \mathbf{v}_e) = \mathbf{J}' + \rho \mathbf{v}_e$$

On en déduit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \mathbf{J} = \frac{\partial \rho'}{\partial t} - v_e \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \text{div}' \mathbf{J}' + \text{div}(\rho \mathbf{v}_e)$$

Comme $\mathbf{v}_e = v_e \mathbf{e}_x$, avec v_e constant, il vient :

$$\text{div}(\rho \mathbf{v}_e) = \frac{\partial(\rho v_e)}{\partial x} = v_e \frac{\partial \rho}{\partial x} = v_e \frac{\partial \rho'}{\partial x'}$$

Il en résulte :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \mathbf{J} = \frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \text{div}' \mathbf{J}' = 0$$

ce qui établit l'invariance du caractère conservatif de la charge électrique.

S1- 8. Vitesse de propagation d'ondes électromagnétiques dans différents milieux matériels

La vitesse de propagation de la lumière dans un milieu d'indice n est $v_\varphi = c/n$. Par conséquent, on trouve respectivement :

$$v_{\varphi, \text{verre}} = \frac{3 \times 10^8}{1,5} = 2 \times 10^8 \, \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad v_{\varphi, \text{eau}} = \frac{3 \times 10^8}{1,33} = 2,25 \times 10^8 \, \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

S1– 9. Coordonnées d'événements en cinématique galiléenne

1. Les coordonnées de E_1 , E_2 et E_3 dans $\mathcal{R}'$ sont, respectivement :

$$E_1 \begin{cases} ct' = 0 \\ x' = 0 \\ y' = 0 \\ z' = 0 \end{cases} \quad E_2 \begin{cases} ct' = l \\ x' = 0 \\ y' = l \\ z' = 0 \end{cases} \quad E_3 \begin{cases} ct' = 2l \\ x' = 0 \\ y' = 0 \\ z' = 0 \end{cases}$$

Par conséquent, d'après la transformation de Galilée :

$$E_1 \begin{cases} ct = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad E_2 \begin{cases} ct = l = 0,5 \text{ m} \\ x = \beta_e l = 0,1 \text{ m} \\ y = l \\ z = 0 \end{cases} \quad E_3 \begin{cases} ct = 2l = 1 \text{ m} \\ x = 2\beta_e l = 0,2 \text{ m} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

2. La durée galiléenne entre les événements vaut l/c pour E_1 et E_2 et $2l/c$ pour E_1 et E_3 , à la fois dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, conformément à l'hypothèse du temps universel. Quant à la distance qui sépare deux événements, elle vaut pour les événements E_1 et E_2 , respectivement dans $\mathcal{R}'$ et dans $\mathcal{R}$:

$$d' = l = 0,5 \text{ m} \quad \text{et} \quad d = (l^2 + \beta_e^2 l^2)^{1/2} = l(1 + \beta_e^2)^{1/2} \approx 0,51 \text{ m}$$

Pour les événements E_1 et E_3 , respectivement dans $\mathcal{R}'$ et dans $\mathcal{R}$, on trouve :

$$d' = 0 \quad \text{et} \quad d = 2\beta_e l = 0,2 \text{ m}$$

S1– 10. Variante de l'expérience de Fizeau

1. La variation ΔL_1 de L pour le rayonnement se propageant dans le sens AB est telle que :

$$\frac{\Delta L_1}{c} = \tau_1 - \tau_0 = \frac{l}{c/n + u} - \frac{l}{c/n}$$

où τ_1 désigne la durée de propagation de la lumière dans l'eau en mouvement et τ_0 cette durée en l'absence de mouvement. De même, la variation ΔL_2 pour le rayonnement se propageant dans le sens opposé BA est donnée par :

$$\frac{\Delta L_2}{c} = \tau_2 - \tau_0 = \frac{l}{c/n - u} - \frac{l}{c/n}$$

2. La variation de chemin optique entre les deux faisceaux émis par le laser, dans des directions opposées, est donnée par :

$$\Delta L_2 - \Delta L_1 = c \left(\frac{l}{c/n - u} - \frac{l}{c/n + u} \right) = \frac{2luc}{c^2/n^2 - u^2} \approx \frac{2lun^2}{c}$$

On en déduit numériquement : $\Delta L = 237,0 \text{ nm}$ qu'il faut comparer à $\lambda_0 = 632,8 \text{ nm}$; $\Delta L/\lambda_0 = 0,374$.

S1– 11. Effet Doppler-Fizeau optique en cinématique galiléenne

1. Si on utilise la transformation de Galilée, la phase de l'onde sinusoïdale reçue par le récepteur s'écrit :

$$\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \omega t - k \cos \theta x - k \sin \theta y = (\omega - kv_e \cos \theta) t - k \cos \theta x' - k \sin \theta y'$$

En identifiant avec la phase dans le référentiel $\mathcal{R}'$, lié à la source, d'expression ($\omega' t - k' \cos \theta' x' - k' \sin \theta' y'$), on trouve, puisque $c = \omega/k$:

$$\omega' = \omega - kv_e \cos \theta = \omega \left(1 - \frac{v_e \cos \theta}{c} \right)$$

On a donc, avec des notations explicites :

$$\nu_r = \frac{\nu_s}{1 - \beta_e \cos \theta_r}$$

Si la source se rapproche ($\cos \theta_r > 0$), $\nu_r > \nu_s$; si la source s'éloigne ($\cos \theta_r < 0$), $\nu_r < \nu_s$.

2. Pour $\theta_r = \pi/2$, on voit que $\nu_r = \nu_s$. Il n'y a pas d'effet Doppler-Fizeau transversal.

3. Pour $\theta_r = 0$, la formule précédente se simplifie selon :

$$\nu_r = \frac{\nu_s}{1 - \beta_e}$$

Si la source se rapproche du récepteur, la fréquence reçue est plus élevée. En revanche, si la source s'éloigne, la fréquence reçue est moins élevée.

4. La variation relative de fréquence lorsque la source s'éloigne est :

$$\frac{\nu_r - \nu_s}{\nu_s} = -\beta_e \frac{\nu_r}{\nu_s} \approx -\beta_e \quad \text{d'où} \quad \frac{\delta \lambda_s}{\lambda_s} = -\frac{\delta \nu_s}{\nu_s} \approx \beta_e$$

A.N : À la vitesse considérée, on a :

$$\frac{\Delta \lambda_s}{\lambda_s} \approx \beta = \frac{2,9 \times 10^3}{3 \times 10^8} = 0,967 \times 10^{-5} \quad \text{d'où} \quad \Delta \lambda_s \approx \beta \lambda_s = 0,967 \times 10^{-5} \times 656,468 \approx 6,34 \text{ pm}$$

S1– 12. Variation du facteur relativiste

1. Les valeurs recherchées de $\gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2}$ sont les suivantes :

$$1,005 \quad 1,021 \quad 1,048 \quad 1,091 \quad 1,155 \quad 1,250 \quad 1,400 \quad 1,667 \quad 2,294$$

2. Pour $\gamma_e = 5$, $\beta_e = (1 - 1/\gamma_e^2)^{1/2} \approx 0,98$; pour $\gamma_e = 10$, $\beta_e = 0,995$.

3. En développant γ_e au voisinage de 1, on trouve :

$$\gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{\beta_e^2}{2} + \frac{3\beta_e^4}{8} + \dots$$

On en déduit : $3\beta_e^4/8 \leq 0,001$ et $\beta_e \leq 0,227$.

S1– 13. Transformation du champ électromagnétique produit par un fil chargé

1. Dans $\mathcal{R}'$ par rapport auquel les charges sont fixes, le champ $\mathbf{B}'$ est évidemment nul. En revanche, le champ électrique n'est pas nul et, en raison des symétries, il est radial. On obtient aisément son expression en appliquant le théorème de Gauss (cf. *Électromagnétisme*). Il vient, en considérant le cylindre d'axe Ox , de rayon de base r et de longueur L :

$$2\pi r L E'_r = \frac{\Lambda_0 L}{\epsilon_0} \quad \text{d'où} \quad E'_r = \frac{\Lambda_0}{2\pi \epsilon_0 r} = \frac{0,2 \times 10^{-9} \times 18 \times 10^9}{0,1} = 36 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

Par conséquent :

$$\mathbf{E}' = \frac{\Lambda_0}{2\pi \epsilon_0 r} \mathbf{e}_y \quad \text{et} \quad \mathbf{B}' = \mathbf{0}$$

2. En théorie newtonienne, les formules de transformation des champs donnent :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}' = \mathbf{E}' = \frac{\Lambda_0}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_y \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}' = \mathbf{0}$$

Cependant, dans $\mathcal{R}$, les charges en mouvement se comportent comme un courant. Le calcul direct du champ magnétique à partir du théorème d'Ampère, appliqué, compte tenu de la symétrie, sur un contour circulaire d'axe Ox et de rayon r , donne, en désignant par s la section du fil :

$$B \times 2\pi r = \mu_0 \frac{\Lambda}{s} v_e \times s = \mu_0 \Lambda v_e \quad \text{d'où} \quad B = \frac{\mu_0 \Lambda v_e}{2\pi r}$$

Ainsi :

$$B = \frac{\Lambda v_e}{2\pi\epsilon_0 c^2 r} = \frac{v_e \times E}{c} = \frac{\beta_e \times E}{c} = \frac{0,5 \times 36}{c} = 60 \text{ nT}$$

valeur très faible comparée au champ magnétique terrestre qui est de l'ordre de $30 \mu\text{T}$. Aussi, la formule newtonienne de transformation des champs néglige-t-elle ce champ magnétique.

3. Utilisons les formules de transformation des champs, en théorie d'Einstein, en faisant $\mathbf{B}' = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{//} &= \mathbf{E}'_{//} & \mathbf{B}_{//c} &= \mathbf{B}'_{//c} \\ \mathbf{E}_{\perp} &= \gamma_e (\mathbf{E}'_{\perp} - \boldsymbol{\beta}_e \times \mathbf{B}'_{\perp c}) & \mathbf{B}_{\perp c} &= \gamma_e (\mathbf{B}'_{\perp c} + \boldsymbol{\beta}_e \times \mathbf{E}'_{\perp}) \end{aligned} \quad \text{et}$$

On en déduit :

$$E = \gamma_e E' = \frac{\gamma_e \Lambda_0}{2\pi\epsilon_0 r} \approx 1,15 \times 36 = 41,6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \quad \text{et} \quad B = \frac{\gamma_e \beta_e E'}{c} = \gamma_e B' = 69 \text{ nT}$$

La théorie d'Einstein, contrairement à celle de Newton, restitue le champ magnétique dans $\mathcal{R}$. Elle ne fait que modifier la valeur de Λ_0 en la multipliant par le facteur relativiste (cf. chapitre 9). Comme précédemment, on peut retrouver cette valeur de B en appliquant le théorème d'Ampère et en choisissant une densité de courant égale à $\gamma_e \Lambda_0 v_e$.

Chapitre 2

S2– 1. Transformations des coordonnées d'un événement

1. Les coordonnées de cet événement dans $\mathcal{R}$, s'obtiennent aisément, en calculant préalablement :

$$\beta_e = 0,8 \quad \gamma_e = \frac{1}{0,6} = 1,67 \quad \text{et} \quad ct' = 3 \times 10^8 \times 2 \times 10^{-9} = 0,6 \text{ m}$$

On a alors :

$$ct = \frac{1}{0,6} (0,6 + 0,8 \times 0,8) = 2,06 \text{ m} \quad x = \frac{1}{0,6} (0,8 + 0,8 \times 0,6) = 2,13 \text{ m} \quad \text{et} \quad y = 0,1 \text{ m}$$

2. Le carré de l'intervalle entre cet événement et l'événement origine vaut :

$$s_{12}^2 = 0,36 - 0,64 - 0,01 = -0,29 \text{ m}^2 \quad \text{ou} \quad s_{12}^2 = 2,06^2 - 2,13^2 - 0,01 = -0,29 \text{ m}^2$$

L'intervalle est donc du genre espace.

S2– 2. Intervalle entre deux événements

1. Comme $\beta_e = 0,5$, $\gamma_e = 1,15$. Par conséquent, les coordonnées spatio-temporelles de E_1 dans $\mathcal{R}'$ sont :

$$ct' = 1,15(1,2 - 0,5 \times 0,1) = 1,322 \text{ m} \quad x' = 1,15(0,1 - 0,5 \times 1,2) = 0,575 \text{ m} \quad y' = 0,5 \text{ m} \quad z' = 0,2 \text{ m}$$

De même pour les coordonnées de E_2 dans $\mathcal{R}$:

$$ct = 1,15(0,9 + 0,5 \times 0,8) = 1,495 \text{ m} \quad x = 1,15(0,8 + 0,5 \times 0,9) = 1,437 \text{ m} \quad y = 0,1 \text{ m} \quad z = 0,1 \text{ m}$$

2. Le carré de l'intervalle vaut :

$$\begin{aligned} s_{12}^2 &= c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \\ &= (1,495 - 1,2)^2 - (1,437 - 0,1)^2 - (0,1 - 0,5)^2 - (0,1 - 0,2)^2 = -1,87 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

On peut le calculer aussi dans $\mathcal{R}'$:

$$\begin{aligned} s_{12}^2 &= c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 \\ &= (0,9 - 1,2)^2 - (0,8 - 0,575)^2 - (0,1 - 0,5)^2 - (0,1 - 0,2)^2 = -1,87 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

S2– 3. Événement rencontre de deux particules

1. Les équations horaires des mouvements des particules A_1 et A_2 sont respectivement :

$$x_1 = \frac{c}{2}t \quad y_1 = 0 \quad \text{et} \quad x_2 = vt \quad y_2 = v_y t + 1$$

Les coordonnées du point de rencontre C sont donc : $x_1 = x_2 = 2$ et $y_2 = 0$. On en déduit :

$$ct = 4 \quad \frac{v_x}{c} = \frac{1}{2} \quad \frac{v_y}{c} = -\frac{1}{ct} = -\frac{1}{4}$$

d'où $\mathbf{v}_2 = c/2 \mathbf{e}_x - c/4 \mathbf{e}_y$ et $v_2 = 0,56c$.

2. Comme $\beta_e = 0,5$, $\gamma_e \approx 1,15$, les coordonnées de C dans $\mathcal{R}'$ sont :

$$x' = \gamma_e(x - \beta_e ct) = 0 \quad ct' = \gamma_e(ct - \beta_e x) = 2\sqrt{3} = 3,464 \text{ m}$$

S2– 4. Train ultra-rapide d'Einstein

1. Les coordonnées spatio-temporelles des événements T et Q dans $\mathcal{R}'$ sont respectivement :

$$T \left|_{\mathcal{R}'} \begin{array}{l} ct'_T \\ L/2 \end{array} \quad Q \left|_{\mathcal{R}'} \begin{array}{l} ct'_Q \\ -L/2 \end{array} \right.$$

L'événement « réception en M » a pour coordonnées dans $\mathcal{R}'$: $(0, 0)$. Par conséquent :

$$t'_T + \frac{L}{2c} = 0 \quad \text{soit} \quad t'_T = -\frac{L}{2c} \quad \text{et} \quad t'_Q + \frac{L}{2c} = 0 \quad \text{soit} \quad t'_Q = -\frac{L}{2c}$$

D'après la transformation de Lorentz-Poincaré, il vient, pour les coordonnées de ces mêmes événements dans $\mathcal{R}$:

$$T \left|_{\mathcal{R}} \begin{array}{l} -\gamma_e(1 - \beta_e)L/2 \\ \gamma_e(1 - \beta_e)L/2 \end{array} \quad Q \left|_{\mathcal{R}} \begin{array}{l} -\gamma_e(1 + \beta_e)L/2 \\ -\gamma_e(1 + \beta_e)L/2 \end{array} \right.$$

2. Dans $\mathcal{R}'$, $c\Delta t' = 0$. En revanche, dans $\mathcal{R}$, on trouve :

$$c\Delta t = -\gamma_e \beta_e L = -1,25 \times 0,6 \times 100 = -75 \text{ m}$$

On calcule aisément le carré de l'intervalle selon :

$$s_{12}^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 = -L^2$$

Dans $\mathcal{R}$, on vérifie que l'on a bien le même résultat :

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = \gamma_e^2 \beta_e^2 L^2 - \gamma_e^2 L^2 = -\gamma_e^2 L^2 (1 - \beta_e^2) = -L^2$$

S2– 5. Rapidité d'entraînement d'un référentiel

Des coordonnées spatio-temporelles de l'événement dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, on déduit β_e :

$$1,5 = \gamma_e (1,7 - 3,3\beta_e) \quad \text{et} \quad 0,6 = \gamma_e (-0,99 + 1,7\beta_e)$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{\gamma_e} = \frac{1,7 - 3,3\beta_e}{1,5} = \frac{-0,99 + 1,7\beta_e}{0,6} \quad \text{d'où} \quad \beta_e = \frac{4,43}{7,86} = 0,563 \quad \text{et} \quad r_e = 0,637$$

S2– 6. Tiges glissant l'une sur l'autre

1. Les coordonnées de E_1 et E_2 dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont, respectivement :

$$\begin{array}{cc} E_1 \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right|_{\mathcal{R}} & E_1 \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right|_{\mathcal{R}'} & E_2 \left| \begin{array}{c} c\tau \\ l \end{array} \right|_{\mathcal{R}} & E_2 \left| \begin{array}{c} c\tau' = \gamma_e(c\tau - \beta_e l) \\ -l = \gamma_e(l - \beta_e c\tau) \end{array} \right|_{\mathcal{R}'} \end{array}$$

2. On en déduit :

$$c\tau = \frac{(\gamma_e + 1)}{\gamma_e \beta_e} l = \frac{\gamma_e + 1}{(\gamma_e^2 - 1)^{1/2}} l = \left(\frac{\gamma_e + 1}{\gamma_e - 1} \right)^{1/2} l$$

3. Pour vérifier l'invariance du carré de l'intervalle s_{12}^2 , calculons τ' :

$$c\tau' = \left(\frac{\gamma_e + 1}{\beta_e} - \gamma_e \beta_e \right) l = \frac{\gamma_e^2 + \gamma_e - \gamma_e^2 \beta_e^2}{\gamma_e \beta_e} l = \frac{\gamma_e + 1}{\gamma_e \beta_e} l = \left(\frac{\gamma_e + 1}{\gamma_e - 1} \right)^{1/2} l = c\tau$$

On a bien $s_{12}^2 = c^2 \tau^2 - l^2 = c^2 \tau'^2 - l^2$. Cet intervalle s_{12} est du genre temps, puisque :

$$s_{12}^2 = l^2 \left(\frac{\gamma_e + 1}{\gamma_e - 1} - 1 \right) = \frac{2l^2}{\gamma_e - 1} > 0$$

A.N : comme $\gamma_e \approx 1,67$ et $l = 1 \text{ m}$, alors $s_{12} = 1,732 \text{ m}$.

S2– 7. Événements non causaux

1. Le carré de l'intervalle entre les deux événements est :

$$s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = (1,5 - 3)^2 - (6 - 3)^2 = -6,75 \text{ m}^2$$

Comme $s^2 > 0$, ces deux événements n'ont pas de relation de causalité. Dans un référentiel $\mathcal{R}'$, ces deux événements sont simultanés si :

$$ct'_1 = ct'_2 \quad \text{avec} \quad ct'_1 = \gamma_e(ct_1 - \beta_e x_1) \quad \text{et} \quad ct'_2 = \gamma_e(ct_2 - \beta_e x_2)$$

soit :

$$\beta_e = \frac{c(t_2 - t_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-1,5}{3} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad v_e = -\frac{c}{2}$$

2. L'instant t' de $\mathcal{R}'$ pour lequel ces événements se produisent simultanément est tel que :

$$ct' = \gamma_e(ct_1 - \beta_e x_1) = 1,155 \left(3 + \frac{3}{2}\right) \approx 5,20 \text{ m} \quad \text{car} \quad \gamma_e = (1 - 0,25)^{-1/2} = 1,155$$

On en déduit $t' = 17,33 \text{ ns}$.

S2– 8. La transformation de Lorentz-Poincaré considérée comme une rotation complexe

1. L'opposé du carré de l'intervalle s'explique selon :

$$-s^2 = x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2 \quad \text{d'où} \quad x^2 + \sigma^2 = x'^2 + \sigma'^2$$

Cette dernière égalité rappelle la relation à laquelle satisfont les coordonnées d'un point dans un plan, lorsqu'on passe d'un système de coordonnées Oxy à un autre $Ox'y'$, après une rotation d'un certain angle (Fig. S2.1).

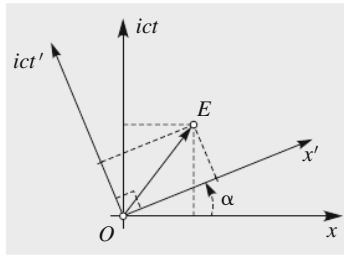


FIG. S2.1.

2. Explicitons l'affixe ζ du nombre complexe représentant le vecteur $\mathbf{OE}$ défini à partir des événements O et E :

$$\zeta = x \mathbf{e}_x + ict \mathbf{e}_t = x' \mathbf{e}_x + ict' \mathbf{e}_t = x' \mathbf{e}_{x'} + ict' \mathbf{e}_{t'} = x' (\cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_t) + ict' (-\cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_t)$$

soit :

$$\zeta = (x' \cos \alpha - ict' \sin \alpha) \mathbf{e}_x + (x' \sin \alpha + ict' \cos \alpha) \mathbf{e}_t$$

En identifiant, on obtient les relations suivantes :

$$x = x' \cos \alpha' - ict' \sin \alpha = \cos \alpha (x' - \tan \alpha \sigma') \quad \text{et} \quad \sigma = ict = x' \sin \alpha + ict' \cos \alpha = \cos \alpha (\sigma' + x' \tan \alpha)$$

3. En comparant à la transformation de Lorentz-Poincaré, on trouve : $\cos \alpha = \gamma_e$ et $\tan \alpha = i\beta_e$. Il en résulte que α doit être imaginaire, $\alpha = i\theta$. Si on explicite $\tan \alpha$, on trouve :

$$\frac{\exp(-\theta) - \exp \theta}{i[\exp(-\theta) + \exp \theta]} = i \frac{v_e}{c} \quad \text{d'où} \quad \tanh \theta = \frac{v_e}{c}$$

Pour $\beta_e = 0,4$, alors $\theta = 0,42$.

S2– 9. Groupe de transformation de Lorentz-Poincaré

1. En fonction des rapidités, les transformations de Lorentz-Poincaré successives s'écrivent :

$$ct = ct' \cosh r_{01} + x' \sinh r_{01} \quad \text{et} \quad x = x' \cosh r_{01} + ct' \sinh r_{01} \quad \text{avec} \quad \tanh r_{01} = \beta_{01}$$

et :

$$ct' = ct'' \cosh r_{12} + x'' \sinh r_{12} \quad \text{et} \quad x' = x'' \cosh r_{12} + ct'' \sinh r_{12} \quad \text{avec} \quad \tanh r_{12} = \beta_{12}$$

Il en résulte, en substituant :

$$ct = (ct'' \cosh r_{12} + x'' \sinh r_{12}) \cosh r_{01} + (x'' \cosh r_{12} + ct'' \sinh r_{12}) \sinh r_{01}$$

soit :

$$ct = ct''(\cosh r_{12} \cosh r_{01} + \sinh r_{12} \sinh r_{01}) + x''(\sinh r_{12} \cosh r_{01} + \cosh r_{12} \sinh r_{01})$$

Ainsi :

$$ct = ct'' \cosh(r_{12} + r_{01}) + x'' \sinh(r_{12} + r_{01})$$

De même :

$$x = (x'' \cosh r_{12} + ct'' \sinh r_{12}) \cosh r_{01} + (ct'' \cosh r_{12} + x'' \sinh r_{12}) \sinh r_{01}$$

soit :

$$x = x''(\cosh r_{12} \cosh r_{01} + \sinh r_{12} \sinh r_{01}) + ct''(\sinh r_{12} \cosh r_{01} + \cosh r_{12} \sinh r_{01})$$

Ainsi :

$$x = x'' \cosh(r_{12} + r_{01}) + ct'' \sinh(r_{12} + r_{01})$$

Le produit des deux transformations de Lorentz-Poincaré est donc la transformation de Lorentz-Poincaré de rapidité $r_{02} = r_{12} + r_{01}$.

2. Le produit de deux transformations de Lorentz-Poincaré se réduit à la transformation unité si $x = x''$ et $t = t''$, soit si $r_{12} = -r_{01}$ et par conséquent $v_{12} = -v_{01}$.

S2– 10. Approximation à l'ordre un de la transformation de Lorentz-Poincaré

1. Pour $\beta_e \ll 1$, on sait que $\gamma_e \approx 1 + \beta_e^2/2$. Par conséquent, on obtient, à l'ordre 2 en β_e :

$$ct = \left(1 + \frac{\beta_e^2}{2}\right)(ct' + \beta_e x') \approx \left(1 + \frac{\beta_e^2}{2}\right)ct' + \beta_e x'$$

et :

$$x = \left(1 + \frac{\beta_e^2}{2}\right)(x' + \beta_e ct') \approx \left(1 + \frac{\beta_e^2}{2}\right)x' + \beta_e ct'$$

Ainsi, on trouve, au deuxième ordre près :

$$t \approx t' + \frac{v_e x'}{c^2} \quad \text{et} \quad x \approx x' + v_e t'$$

La première équation ne restitue l'invariance galiléenne du temps que pour $v_e x'/c^2 \ll t$.

2. Si $\beta_e = 0, 1$, l'erreur relative sur la distance vaut :

$$\frac{x - (x' + \beta_e ct')}{x' + \beta_e ct'} \approx \frac{\beta_e^2}{2} = \frac{1}{200}$$

Pour que l'erreur relative sur la durée soit $1/100$, il faut que :

$$\frac{t - t'}{t'} = \frac{1}{100} \approx \frac{\beta_e^2}{2} + \frac{\beta_e x'}{ct'} \quad \text{soit} \quad \frac{x'}{ct'} = \frac{1}{200\beta_e} = \frac{1}{20}$$

S2– 11. Valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de Lorentz-Poincaré

1. Les formules de transformation, $ct = \gamma_e(ct' + \beta_e x')$ et $x = \gamma_e(x' + \beta_e ct')$, peuvent s'écrire matriciellement $\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = L_r \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$, soit en explicitant :

$$\begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_e & \gamma_e \beta_e \\ \gamma_e \beta_e & \gamma_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix}$$

Donc $a = \gamma_e$, $b = \gamma_e \beta_e$, $c' = \gamma_e \beta_e$, $d = \gamma_e$. On en déduit le déterminant de cette matrice :

$$\det L_r = ad - c'd = \gamma_e^2 - \gamma_e^2 \beta_e^2 = \gamma_e^2(1 - \beta_e^2) = 1$$

2. L'équation matricielle $L_r\{2 - x'\} = \lambda\{2 - x'\}$ s'écrit selon :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c' & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ ct' \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} x' \\ ct' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c' & d - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ ct' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le déterminant de la matrice contenant λ doit donc être nul :

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc' = 0 \quad \text{d'où} \quad \lambda^2 - \lambda(a + d) + ad - bc' = 0$$

Dans le cas considéré, cette équation donnant les valeurs propres s'écrit :

$$\lambda^2 - 2\gamma_e \lambda + 1 = 0 \quad \text{d'où} \quad \lambda = \gamma_e \pm (\gamma_e^2 - 1)^{1/2}$$

3. D'après l'équation matricielle aux valeurs propres, il vient :

$$(a - \lambda)x' + bct' = 0 \quad \text{et} \quad cx' + (d - \lambda)ct' = 0$$

On en déduit la pente α des vecteurs propres :

$$\alpha = \frac{ct'}{x'} = -\frac{a - \lambda}{b} = -\frac{c}{d - \lambda} \quad \text{d'où} \quad \alpha = -\frac{\gamma_e - [\gamma_e \pm (\gamma_e^2 - 1)^{1/2}]}{\gamma_e \beta_e} = \pm \frac{(\gamma_e^2 - 1)^{1/2}}{\gamma_e \beta_e} = \pm 1$$

Ces pentes correspondent aux vitesses c et $-c$, lesquelles sont évidemment invariantes.

S2- 12. Différents événements dans l'expérience de Michelson- Morley

1. Les coordonnées spatio-temporelles de ces événements s'écrivent, respectivement, dans $\mathcal{R}'$:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} E_0 \\ \mathcal{R}' \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} E_1 \\ \mathcal{R}' \end{array} \begin{array}{|c|} \hline ct'_1 = l \\ 0 \\ l \\ 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} E_2 \\ \mathcal{R}' \end{array} \begin{array}{|c|} \hline ct'_2 = l \\ l \\ 0 \\ 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} E_3 \\ \mathcal{R}' \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 2l \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} E_4 \\ \mathcal{R}' \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 2l \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

On obtient aisément les coordonnées dans $\mathcal{R}$, en effectuant une transformation de Lorentz-Poincaré :

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} E_0 \\ \mathcal{R} \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} E_1 \\ \mathcal{R} \end{array} \begin{array}{|c|} \hline ct_1 = \gamma_e l \\ \gamma_e \beta_e l \\ l \\ 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} E_2 \\ \mathcal{R} \end{array} \begin{array}{|c|} \hline ct_2 = \gamma_e l(1 + \beta_e) \\ \gamma_e l(1 + \beta_e) \\ 0 \\ 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} E_3 \\ \mathcal{R} \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 2\gamma_e l \\ 2\gamma_e \beta_e l \\ 0 \\ 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} E_4 \\ \mathcal{R} \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 2\gamma_e l \\ 2\gamma_e \beta_e l \\ 0 \\ 0 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

2. Pour calculer les carrés des intervalles entre E_0 et E_1 , entre E_0 et E_2 , entre E_1 et E_2 , entre E_3 et E_4 , il suffit de se placer dans le référentiel le plus commode, ici $\mathcal{R}'$, car l'intervalle est un invariant :

$$s_{01}^2 = l^2 - l^2 = 0 \quad s_{02}^2 = l^2 - l^2 = 0 \quad s_{12}^2 = 0 - l^2 - l^2 = -2l^2 \quad s_{34}^2 = 0$$

On trouve évidemment la même chose dans $\mathcal{R}$:

$s_{01}^2 = \gamma_e^2 l^2 - \gamma_e^2 \beta_e^2 l^2 - l^2 = 0 \quad s_{02}^2 = \gamma_e^2 l^2 (1 + \beta_e)^2 - \gamma_e^2 l^2 (1 + \beta_e)^2 = 0 \quad s_{12}^2 = \gamma_e^2 \beta_e^2 l^2 - \gamma_e^2 l^2 - l^2 = -l^2$
et $s_{34}^2 = 0$. Les intervalles s_{01} , s_{02} et s_{34} sont du genre lumière, alors que l'intervalle s_{12} est du genre espace (pas de causalité).

3. Les événements E_1 et E_2 sont simultanés dans $\mathcal{R}'$, mais pas dans $\mathcal{R}$:

$$c(t_2 - t_1) = \gamma_e \beta_e l \approx 0,8 \times 3 = 2,4 \text{ m}$$

Quant aux événements E_3 et E_4 , ils sont simultanés à la fois pour $\mathcal{R}'$ et pour $\mathcal{R}$. La simultanéité n'est universelle que si les événements sont localisés au même point, ici S .

3. La durée du voyage pour le passager de la fusée est un intervalle de temps propre. Par conséquent :

$$T_p = \frac{T}{\gamma_e} = \frac{1,6}{1,67} = 0,96 \text{ s}$$

S3– 5. Mouvement relatif de deux vaisseaux spatiaux

On désigne par $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ les référentiels galiléens liés respectivement aux deux vaisseaux (1) et (2) : le premier est le vaisseau lent. L'événement E_1 , coïncidence spatiale de la tête T_1 de (1) et la tête T_2 de (2), est pris comme origine commune à $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. L'événement E_2 est la coïncidence spatiale la tête T_1 de (1) et de la queue Q_2 de (2). Les coordonnées de cet événement dans $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont respectivement :

$$E_2 \left|_{\mathcal{R}_1} \begin{array}{l} cT \\ 0 \end{array} \quad E_2 \left|_{\mathcal{R}_2} \begin{array}{l} ct_2 = \gamma cT \\ -l = -\gamma VT \end{array}$$

On en déduit :

$$\gamma V = \frac{V}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}} = \frac{L}{T} \quad \text{d'où} \quad V = \frac{l}{T(1 + l^2/T^2 c^2)^{1/2}} \approx 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

avec la précision relative suivante :

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{cT} \right)^2 = 1,25 \times 10^{-15}$$

L'analyse newtonienne est donc totalement justifiée dans ce cas.

S3– 6. Application de l'effet Doppler-Fizeau à la détermination de la vitesse d'un objet stellaire

1. La formule relativiste de l'effet Doppler-Fizeau longitudinal s'écrit, en fonction des longueurs d'onde :

$$\lambda_r = \lambda_s \left(\frac{1 + u/c}{1 - u/c} \right)^{1/2} \quad \text{d'où} \quad \frac{1 + \beta}{1 - \beta} = \alpha^2 \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\lambda_r}{\lambda_s} = 2,14$$

On en déduit :

$$\beta = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1} = 0,64 \quad \text{et} \quad u = 1,92 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Comme $\lambda_r > \lambda_s$, l'objet s'éloigne de la Terre. Certaines galaxies se déplacent à de telles vitesses.

2. En théorie newtonienne, on devrait écrire :

$$\lambda_r = \lambda_s \left(1 + \frac{u}{c} \right) \quad \text{d'où} \quad 1 + \beta = \alpha = 2,14 \quad \text{et} \quad \frac{u}{c} = 1,14$$

ce qui est absurde, c étant une vitesse indépassable pour un objet doté de masse.

S3– 7. Approche cinématique de l'effet Doppler-Fizeau

1. Écrivons les coordonnées des événements correspondants à l'émission de deux tops consécutifs, dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$:

$$E_1 \left|_{\mathcal{R}'} \begin{array}{l} ct'_1 \\ x'_1 = 0 \end{array} \quad E_2 \left|_{\mathcal{R}'} \begin{array}{l} ct'_2 + cT_s \\ x'_2 = 0 \end{array} \quad E_1 \left|_{\mathcal{R}} \begin{array}{l} ct_1 = \gamma_e ct'_1 \\ x_1 = \gamma_e \beta_e ct'_1 \end{array} \quad E_2 \left|_{\mathcal{R}} \begin{array}{l} ct_2 = \gamma_e ct'_2 = \gamma_e (ct'_1 + cT) \\ x_2 = \gamma_e \beta_e ct'_2 = \gamma_e \beta_e (ct'_1 + cT) \end{array}$$

Écrivons les coordonnées des événements correspondants reçus dans $\mathcal{R}$, lors de la phase d'éloignement :

$$E_3 \left|_{\mathcal{R}} \begin{array}{l} ct_3 = ct_1 + x_1 \\ x_3 = 0 \end{array} \quad E_4 \left|_{\mathcal{R}} \begin{array}{l} ct_4 = ct_2 + x_2 \\ x_4 = 0 \end{array}$$

On en déduit :

$$cT_r = ct_4 - ct_3 = ct_2 - ct_1 + x_2 - x_1 = \gamma_e cT_s + \gamma_e \beta_e cT_s = cT_s \gamma_e (1 + \beta_e).$$

D'où :

$$T_r = T_s \gamma_e (1 + \beta_e) \quad \text{et} \quad \nu_r = \nu_s \frac{1}{\gamma_e (1 + \beta_e)}$$

Pour obtenir les résultats relatifs au retour, il suffit de changer β_e en $-\beta_e$:

$$T_r = T_s \gamma_e (1 - \beta_e) \quad \text{et} \quad \nu_r = \nu_s \frac{1}{\gamma_e (1 - \beta_e)}$$

2. Au second ordre près en β_e , les expressions précédentes donnent respectivement, pour l'éloignement :

$$T_r \approx T_s (1 + \beta_e) \left(1 + \frac{\beta_e^2}{2} \right) \quad \text{soit} \quad \frac{T_r - T_s}{T_s} \approx \beta_e + \frac{\beta_e^2}{2}$$

et pour le rapprochement :

$$T_r \approx T_s (1 - \beta_e) \left(1 + \frac{\beta_e^2}{2} \right) \quad \text{soit} \quad \frac{T_r - T_s}{T_s} \approx -\beta_e + \frac{\beta_e^2}{2}$$

En théorie newtonnienne, on a, pour l'éloignement :

$$T_r = T_s (1 + \beta_e) \quad \text{soit} \quad \frac{T_r - T_s}{T_s} \approx \beta_e$$

et, pour le rapprochement :

$$T_r \approx T_s (1 - \beta_e) \quad \text{soit} \quad \frac{T_r - T_s}{T_s} \approx -\beta_e$$

On ne trouve donc pas de termes quadratiques en β^2 à l'origine d'une dissymétrie.

S3- 8. Durée d'un voyage intersidéral

1. Comme la durée T_f est une durée propre, on a :

$$T_f = \frac{T_i}{\gamma_e} \quad \text{avec} \quad T_i = \frac{D}{v_e} \quad \text{d'où} \quad T_f = \frac{D}{\gamma_e \beta_e c} = \frac{D}{(\gamma_e^2 - 1)^{1/2} c}$$

On en déduit :

$$\gamma_e \beta_e = (\gamma_e^2 - 1)^{1/2} = \frac{D}{c T_f} = 4 \quad \text{d'où} \quad \gamma_e = 4,123 \quad \text{et} \quad v_e = 0,97 c$$

2. Pour un observateur terrestre, la durée du voyage est $T_i = \gamma_e T_f = 4,123$ an .

S3- 9. Mesure de longueurs

1. a) On a, d'après la transformation de Lorentz-Poincaré :

$$ct = \gamma_e (ct' + \beta_e x') \quad \text{et} \quad x = \gamma_e (x' + \beta_e ct') \quad \text{avec} \quad \gamma_e = (1 - \beta^2)^{-1/2} = 1,15$$

b) La longueur propre de la règle est celle mesurée dans le référentiel où elle est au repos. La longueur de la règle mesurée par un observateur de $\mathcal{R}$ est donc impropre, d'où la relation :

$$L = \frac{L_0}{\gamma_e} = \frac{1}{1,15} = 0,866 \text{ m}$$

c) La longueur OP mesurée par un observateur de $\mathcal{R}'$ est elle-aussi une longueur impropre. Par conséquent : $L' = L_0 / \gamma_e = 0,866 \text{ m}$.

2. Les coordonnées spatio-temporelles, dans $\mathcal{R}'$ et dans $\mathcal{R}$, de l'extrémité B , à $t = 0$ pour $\mathcal{R}$ s'écrivent :

$$E_B \Big|_{\mathcal{R}'} \begin{matrix} ct' \\ x'_B = L_0 \end{matrix} \qquad E_B \Big|_{\mathcal{R}} \begin{matrix} ct = 0 \\ x_B \end{matrix}$$

Comme $ct = 0 = \gamma_e(ct' + \beta_e x'_B)$, il vient : $ct' = -\beta_e x'_B = -\beta_e L_0 = -0,5 \text{ m}$. On en déduit :

$$x_B = \gamma_e(x'_B + \beta_e ct') = \gamma_e(L_0 - \beta_e^2 L_0) = \gamma_e L_0 (1 - \beta_e^2) = \frac{L_0}{\gamma_e} = 0,866 \text{ m}$$

3. L'extrémité B de la tige coïncide avec P à un instant τ pour $\mathcal{R}$.

Écrivons les coordonnées spatio-temporelles de l'événement « B coïncide avec P » dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$:

$$E_{BP} \Big|_{\mathcal{R}} \begin{matrix} c\tau \\ x_B = L_0 \end{matrix} \qquad E_{BP} \Big|_{\mathcal{R}'} \begin{matrix} c\tau' \\ x'_B = L_0 \end{matrix}$$

avec $c\tau' = \gamma_e(c\tau - \beta_e x_B) = \gamma_e(c\tau - \beta_e L_0)$ et $x'_B = L_0 = \gamma_e(x_B - \beta_e c\tau) = \gamma_e(L_0 - \beta_e c\tau)$.

b) Exprimons $c\tau$ et $c\tau'$ en fonction de L_0 et γ_e :

$$c\tau = \frac{L_0}{\beta_e} \left(1 - \frac{1}{\gamma_e}\right) = L_0 \left(\frac{\gamma_e - 1}{\gamma_e \beta_e}\right) = L_0 \left(\frac{\gamma_e - 1}{(\gamma_e^2 - 1)^{1/2}}\right) = L_0 \left(\frac{\gamma_e - 1}{\gamma_e + 1}\right)^{1/2} = 0,267 \text{ m}$$

et :

$$c\tau' = \gamma_e L_0 \left[\left(\frac{\gamma_e - 1}{\gamma_e \beta_e}\right)^{1/2} - \beta_e \right] = L_0 \left[\left(\gamma_e \frac{\gamma_e - 1}{(\gamma_e^2 - 1)^{1/2}}\right) - (\gamma_e^2 - 1)^{1/2} \right]$$

soit :

$$c\tau' = -L_0 \left(\frac{\gamma_e - 1}{\gamma_e + 1}\right)^{1/2} = -0,268 \text{ m}$$

c) La coordonnée spatiale x_A de l'extrémité A dans $\mathcal{R}$, à l'instant τ de $\mathcal{R}$, est telle que :

$$x'_A = 0 = \gamma_e(x_A - \beta_e c\tau) \quad \text{d'où} \quad x_A = \beta_e c\tau = \beta_e L_0 \left(\frac{\gamma_e - 1}{\gamma_e \beta_e}\right) = L_0 \left(1 - \frac{1}{\gamma_e}\right) = 0,13 \text{ m}$$

S3– 10. Train dans un tunnel

1. Comme la longueur recherchée est une longueur impropre pour $\mathcal{R}$, elle vaut :

$$L = \frac{l}{\gamma_e} = 80 \text{ m} \quad \text{car} \quad \gamma_e = (1 - 0,36)^{-1/2} = 1,25$$

2. Pour $\mathcal{R}'$, la longueur du tunnel est impropre. Par conséquent, elle vaut :

$$L_{\mathcal{R}'} = \frac{L}{\gamma_e} = \frac{l}{\gamma_e^2}$$

Elle ne coïncide donc pas avec la longueur du train dans $\mathcal{R}'$.

3. Si l'événement 1 est pris comme origine, les coordonnées de l'événement 2 sont :

$$E_2 \Big|_{\mathcal{R}'} \begin{matrix} ct'_2 \\ x'_2 = -l \end{matrix} \qquad E_2 \Big|_{\mathcal{R}} \begin{matrix} ct_2 \\ x_2 = -l/\gamma_e \end{matrix}$$

Comme $x'_2 = \gamma_e(x_2 - \beta_e ct_2)$ donne $-l = \gamma_e(-l/\gamma_e - \beta_e ct_2)$, on en déduit :

$$ct_2 = 0 \quad \text{et} \quad ct'_2 = \gamma_e(ct_2 - \beta_e x_2) = -\gamma_e \beta_e x_2 = \beta l$$

Ainsi, les coordonnées de E_2 sont :

$$E_2 \left|_{\mathcal{R}'} \begin{array}{l} ct'_2 = \beta l \\ x'_2 = -l \end{array} \right. \quad E_2 \left|_{\mathcal{R}} \begin{array}{l} ct_2 = 0 \\ x_2 = -l/\gamma_e \end{array} \right.$$

4. Pour $\mathcal{R}$, les événements 1 et 2 sont simultanés et la longueur du train est l/γ_e ; le train est donc contenu dans le tunnel. Notons que, dans $\mathcal{R}'$, les événements 1 et 2 ne sont pas simultanés $ct'_2 > 0$: la tête du train sort du tunnel avant que la queue n'y entre.

S3– 11. Liaison radio entre un vaisseau spatial et une station au sol

1. L'instant t'_r donné par les horloges du vaisseau est $t'_r = L'/c = 400$ ns, car $L' = L_0 = 120$ m est la longueur propre du vaisseau.

2. L'instant t_r pour les horloges de la station est tel que la distance parcourue par l'onde électromagnétique est la somme de la longueur du vaisseau mesurée par la station et de la distance parcourue par B pendant cette durée :

$$ct_r = L + \beta_e ct_r \quad \text{avec} \quad \beta_e = \frac{v}{c} = 0,7$$

Par conséquent, L étant une longueur impropre :

$$t_r = \frac{L}{c-v} = \frac{L}{c(1-\beta_e)} = \frac{L_0}{c\gamma(1-\beta)} = \frac{L_0}{c} \left(\frac{1+\beta_e}{1-\beta_e} \right)^{1/2} = 400 \times 2,38 = 952,2 \text{ ns}$$

Entre t_r et t'_r , le facteur n'est pas γ_e , car aucune de ces durées ne concerne des événements qui se produisent en un même lieu.

3. La distance parcourue par l'avant B du vaisseau à la réception du signal est : $vt_r = 199,96$ m.

S3– 12. Paradoxe des jumeaux de Langevin

1. On sait que les durées à l'aller et au retour pour les horloges de N (nomade, astronaute) et de S (sédentaire, terrien) sont reliées par des relations entre durée propre pour N et durée impropre pour S :

$$T_n = T_{n,a} + T_{n,r} = \frac{T_{s,a}}{\gamma_a} + \frac{T_{s,r}}{\gamma_r} \quad \text{avec} \quad T_{s,a} = \frac{D}{v_a} \quad \text{et} \quad T_{s,r} = \frac{D}{v_r}$$

Comme $T_s = T_{s,a} + T_{s,r}$, il vient :

$$T_s = D \left(\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_r} \right) \quad \text{et} \quad T_n = \frac{D}{v_a \gamma_a} + \frac{D}{v_r \gamma_r} = T_s \left[\frac{v_r}{(v_a + v_r) \gamma_a} + \frac{v_a}{(v_a + v_r) \gamma_r} \right]$$

Ainsi :

$$\frac{T_n}{T_s} = \frac{1-k}{2} \left[\frac{1-(1+k)^2}{4} \right]^{1/2} + \frac{1+k}{2} \left[\frac{1-(1-k)^2}{4} \right]^{1/2}$$

2. Pour $k = 0$, c'est-à-dire $v_a = v_r = 0,5c$, on trouve le résultat connu :

$$\frac{T_n}{T_s} = \left(1 - \frac{1}{4} \right)^{1/2} = \frac{1}{\gamma} = 0,866$$

Pour $k = 0,9$, ce rapport vaut 0,96. La courbe donnant T_n/T_s en fonction de k montre que ce rapport est minimal pour $k = 0$ (Fig. S3.1).

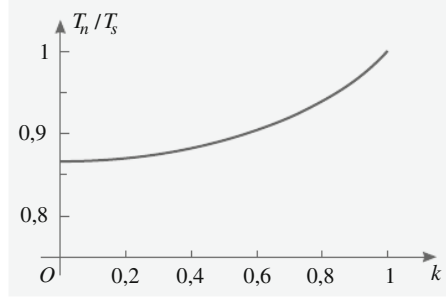


FIG. S3.1.

S3– 13. Changement de chronologie de deux événements

1. Dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$ respectivement, les coordonnées spatio-temporelles de E_2 , pour lequel O et A coïncident, s'écrivent, si celles de E_1 sont prises comme origines (Fig. S3.2) :

$$E_2 \left| \begin{array}{l} ct_2 = L/(\gamma_e \beta_e) \\ x_2 = 0 \end{array} \right|_{\mathcal{R}} \quad E_2 \left| \begin{array}{l} ct'_2 = \gamma_e(ct_2 - \beta_e \times 0) = L/\beta_e \\ x'_2 = -L = \gamma_e(0 - \beta_e ct_2) \end{array} \right|_{\mathcal{R}'}$$

On en déduit :

$$ct_2 = \frac{L}{\gamma_e \beta_e} \quad \text{et} \quad ct'_2 = \frac{L}{\beta_e}$$

Comme $\beta_e = 0,8$ et $\gamma_e = 1,67$, il vient, numériquement :

$$E_2 \left| \begin{array}{l} ct_2 = 0,75 \text{ m} \\ x_2 = 0 \end{array} \right|_{\mathcal{R}} \quad E_2 \left| \begin{array}{l} ct'_2 = 1,25 \text{ m} \\ x'_2 = -1 \text{ m} \end{array} \right|_{\mathcal{R}'}$$

On en déduit le carré de l'intervalle entre E_1 et E_2 :

$$s_{12}^2 = 0,75^2 - 0 = 1,25^2 - 1^2 = 0,75^2 \text{ m}^2$$

L'intervalle est du genre temps.

2. De même, les coordonnées spatio-temporelles de E_3 , pour lequel E et B coïncident, sont, dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ respectivement (Fig. S3.2c) :

$$E_3 \left| \begin{array}{l} ct_3 = L \\ x_3 = L \end{array} \right|_{\mathcal{R}} \quad E_3 \left| \begin{array}{l} ct'_3 = \gamma_e(ct_3 - \beta_e L) \\ x'_3 = 0 = \gamma_e(L - \beta_e ct_3) \end{array} \right|_{\mathcal{R}'}$$

On en déduit :

$$ct_3 = \frac{L}{\beta_e} = 1,25 \text{ m} \quad ct'_3 = \gamma_e \left(\frac{L}{\beta_e} - \beta_e L \right) = \gamma_e \frac{L}{\beta_e} (1 - \beta_e^2) = \frac{L}{\gamma_e \beta_e} = 0,75 \text{ m}$$

Ainsi :

$$E_2 \left| \begin{array}{l} ct_3 = 1,25 \text{ m} \\ x_3 = L = 1 \text{ m} \end{array} \right|_{\mathcal{R}} \quad E_2 \left| \begin{array}{l} ct'_3 = 0,75 \text{ m} \\ x'_3 = 0 \text{ m} \end{array} \right|_{\mathcal{R}'}$$

Le carré de l'intervalle entre E_1 et E_3 est donc :

$$s_{13}^2 = 1,25^2 - 1^2 = 0,75^2 = 0,56 \text{ m}^2$$

Dans ce cas aussi, l'intervalle est du genre temps.

3. On constate que les chronologies des événements E_2 et E_3 ne sont pas les mêmes dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$. Dans $\mathcal{R}$, on a $ct_2 < ct_3$, alors que, dans $\mathcal{R}'$, $ct'_3 < ct'_2$. Les chronologies des événements E_2 et E_3 dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$ sont donc inversées; vérifions que l'intervalle entre ces deux événements est du genre espace :

$$s_{23}^2 = (1,25 - 0,75)^2 - (1 - 0)^2 = (0,75 - 1,25)^2 - (0 + 1)^2 = -0,75 \text{ m}^2$$

Entre E_2 et E_3 , il n'y a pas de relation de causalité. Sur la figure S3.2, on a résumé l'ensemble des résultats.

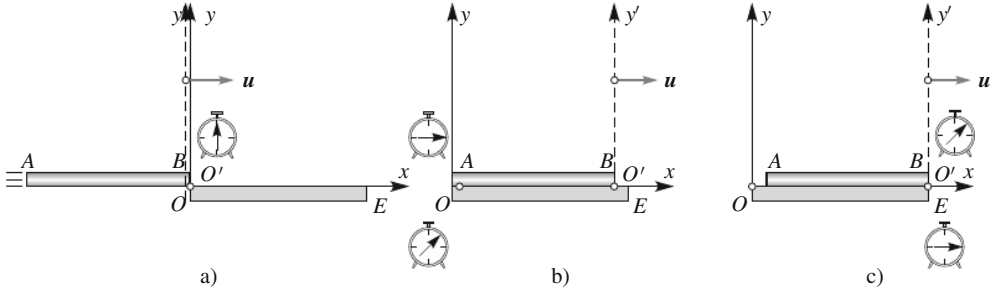


FIG. S3.2.

S3- 14. Ombre portée sur un film photographique d'une règle inclinée en mouvement

1. Adoptons, comme événement origine $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, l'événement 1 suivant « interception de l'onde en B ». L'événement 2, « interception de l'onde en A » a pour coordonnées dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$:

$$\begin{array}{l} E_2 \\ \mathcal{R} \end{array} \left| \begin{array}{l} ct'_2 \\ x'_2 = -l \cos \theta' \\ y'_2 = -l \sin \theta' \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} E_2 \\ \mathcal{R} \end{array} \left| \begin{array}{l} ct_2 = l \sin \theta' \\ x_2 \\ y_2 = y'_2 \end{array} \right.$$

La longueur du film non impressionné en raison de la règle qui fait obstacle est donnée par la coordonnée x_2 telle que : Comme $x'_2 = \gamma_e(x_2 - \beta_e ct_2)$, on trouve :

$$x_2 = \frac{x'_2}{\gamma_e} + \beta_e ct_2 = -\frac{l}{\gamma_e} \cos \theta' + l \beta_e \sin \theta' = l \left(-\frac{\cos \theta'}{\gamma_e} + \beta_e \sin \theta' \right)$$

Cette longueur est donc :

$$L = l \left| -\frac{\cos \theta'}{\gamma_e} + \beta_e \sin \theta' \right|$$

2. Cas particuliers

i) $\theta' = 0$: la règle est parallèle à la direction Ox . Cette expérience permet alors une mesure photographique de la longueur impropre de la règle dans le laboratoire : $L = l/\gamma_e$.

ii) $\theta' = \pi/2$: la règle est normale à la direction de son déplacement ; la longueur de film non impressionné n'est pas nulle mais égale à $L = \beta_e l$. L'abscisse x_2 est positive, la règle apparaît inclinée d'un angle supérieur à $\pi/2$ à un observateur du laboratoire.

3. D'après l'expression de L , la condition pour que $L = 0$ est :

$$\frac{\cos \theta'}{\gamma_e} = \beta_e \sin \theta' \quad \text{soit} \quad \tan \theta' = \frac{1}{\gamma_e \beta_e} = \left(\frac{1}{\beta_e^2} - 1 \right)^{1/2}$$

On pourrait montrer que cette direction correspond à celle de la vitesse des photons dans $\mathcal{R}'$. Il suffit pour cela d'utiliser les formules de transformation des vitesses (cf. chapitre 4) :

$$\mathbf{v} \left| \begin{array}{l} 0 \\ -c \\ 0 \end{array} \right|_{\mathcal{R}} \quad \mathbf{v}' \left| \begin{array}{l} -u \\ -c/\gamma_e \\ 0 \end{array} \right|_{\mathcal{R}'}$$

D'où la tangente de l'angle $\alpha' = (Ox', \mathbf{v}')$: $\tan \alpha' = v'_y/v'_x = (\gamma_e \beta_e)^{-1} = \tan \theta'$.

S3– 15. Effet Doppler-Fizeau après réflexion par un miroir

1. La fréquence de l'onde lumineuse reçue par le miroir est donnée par la formule de l'effet Doppler longitudinal (cf. chapitre 3) :

$$\nu_d = \nu_s \left(\frac{1 - \beta_e}{1 + \beta_e} \right)^{1/2} \quad \text{avec} \quad \beta_e = \frac{u}{c}$$

u étant la vitesse d'éloignement du récepteur par rapport à la source.

2. De même, la fréquence ν'_s de l'onde reçue par la source après réflexion par le miroir est reliée à la fréquence ν_d de l'onde reçue et réfléchi par le miroir par une relation analogue à la précédente :

$$\nu'_s = \nu_d \left(\frac{1 - \beta_e}{1 + \beta_e} \right)^{1/2}$$

u étant la vitesse d'éloignement de la source par rapport au récepteur. Il en résulte que :

$$\nu'_s = \nu_s \frac{1 - \beta_e}{1 + \beta_e} \quad \text{d'où} \quad \frac{1 - \beta_e}{1 + \beta_e} = \frac{\lambda_s}{\lambda'_s} = r \quad \text{et} \quad \beta_e = \frac{u}{c} = \frac{1 - r}{1 + r} \approx 0,5$$

Chapitre 4

S4– 1. Vitesse relative de deux galaxies

D'après les formules de transformation des vitesses :

$$v_{2/3} = \frac{v_{2/1} - v_{3/1}}{1 - v_{2/1} v_{3/1}/c^2} = \frac{0,8c - (-0,8c)}{1 - 0,8 \times (-0,8)} = c \frac{1,6}{1,64} = 0,976c$$

S4– 2. Émission d'un électron par un noyau radioactif

1. D'après la composition des vitesses, on a, puisque seule la direction Ox est concernée :

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2} = \frac{0,9}{1,08}c = 0,833c \quad v_y = 0 \quad v_z = 0$$

2. Il en est de même dans ce cas :

$$v_x = \frac{-0,8 + 0,1}{0,92}c = -0,76c \quad v_y = 0 \quad v_z = 0$$

3. Dans ce troisième cas, $\mathbf{v}'$ est dirigé selon l'axe Oy' :

$$v_x = v'_x = 0,1c \quad v_y = \frac{0,8}{\gamma_e}c = \frac{0,8}{1 + 0,005}c \approx 0,796c \quad \text{puisque} \quad \gamma_e = (1 - 0,1^2)^{-1/2} = 1,005$$

S4– 3. Vitesse relative de deux particules en mouvement sur un même axe

Appelons $\mathcal{R}'$ le référentiel galiléen d'origine A_1 et calculons la vitesse de A_2 par rapport à $\mathcal{R}'$. Il vient, puisque $\mathbf{v}_1 = 0,75c \mathbf{e}_x$ et $\mathbf{v}_2 = -0,75c \mathbf{e}_x$:

$$v'_2 = \frac{v_2 - v_{1x}}{1 - v_{1x} v_{2x}/c^2} = \frac{-1,5c}{1 + 0,56} = -0,96c$$

S4- 4. Vitesse relative d'un photon par rapport à un électron

1. D'après les formules de transformation des vitesses, on a, puisque $\beta_e = 0,8$ et $\gamma_e = 1,67$:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} = -0,8c \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma_e(1 - uv_x/c^2)} = 0,6c$$

Donc, la direction de la vitesse du photon par rapport à $\mathcal{R}'$ fait l'angle $\theta' = \arctan(-0,6/0,8) = -37^\circ$, avec l'axe Ox .

2. On vérifie évidemment que la norme de la vitesse est $c : c(0,8^2 + 0,6^2)^{1/2} = c$

S4- 5. Norme de la vitesse relative de deux particules

1. Adoptons comme axe Ox de $\mathcal{R}$ celui défini par $\mathbf{v}_2$ et associons $\mathcal{R}'$ à A_2 . Il vient :

$$v'_{1x} = \frac{v_{1x} - v_2}{1 - v_2 v_{1x}/c^2} \quad v'_{1y} = \frac{v_{1y}}{\gamma_e(1 - v_2 v_{1x}/c^2)} \quad v'_{1z} = \frac{v_{1z}}{\gamma_e(1 - v_2 v_{1x}/c^2)}$$

avec $\beta_e = v_2/c$ et $\gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2}$. On en déduit la norme :

$$v_{12} = v'_1 = \frac{1}{1 - v_2 v_{1x}/c^2} \left[(v_{1x} - v_2)^2 + \frac{v_{1y}^2 + v_{1z}^2}{\gamma_e^2} \right]^{1/2} = \frac{1}{1 - v_2 v_{1x}/c^2} \left[(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - \beta_e^2 (v_{1y}^2 + v_{1z}^2) \right]^{1/2}$$

cette norme s'écrit, puisque $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)^2 = v_2^2 (v_{1y}^2 + v_{1z}^2)$:

$$v_{12} = \frac{[(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)^2/c^2]^{1/2}}{1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2/c^2}$$

2. i) Si $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, on trouve évidemment $v_{12} = v_1$.

ii) De même, si $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, on obtient $v_{12} = v_2$.

iii) Si $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$, alors $v_{12} = 0$, ce qui était prévisible.

iv) Si $\mathbf{v}_1 = 0,3c \mathbf{e}_x$ et $\mathbf{v}_2 = 0,1c \mathbf{e}_x$, on trouve :

$$v_{12} = \frac{v_1 - v_2}{1 - v_1 v_2/c^2} = \frac{0,2}{1 - 0,03} c = 0,206c$$

v) Pour $\mathbf{v}_1 = 0,3c \mathbf{e}_x$ et $\mathbf{v}_2 = 0,1c \mathbf{e}_y$, il vient :

$$v_{12} = \left(v_1^2 + v_2^2 - \frac{v_1^2 v_2^2}{c^2} \right)^{1/2} = \left(0,09 + 0,01 - 9 \times 10^{-4} \right)^{1/2} c = 0,315c$$

S4- 6. Poursuite de deux vaisseaux spatiaux

1. Relativement à $\mathcal{R}$, on a :

$$u_1 \tau = u_2 (\tau - T) \quad \text{d'où} \quad \tau = T \frac{u_2}{u_2 - u_1} = \frac{0,15}{0,15 - 0,1} = 3 \text{ jours}$$

2. Considérons les trois événements E_1 « départ de (1) », E_2 « départ de (2) », E_3 « (2) rattrape (1) ». Leurs coordonnées dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}_1$, lié à (1), sont :

$$\begin{array}{ccccc} E_1 \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right. & E_1 \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right. & E_2 \left| \begin{array}{c} cT \\ 0 \end{array} \right. & E_2 \left| \begin{array}{c} ct_2^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{array} \right. & E_3 \left| \begin{array}{c} c\tau \\ u_1 \tau \end{array} \right. & E_3 \left| \begin{array}{c} ct_3^{(1)} \\ 0 \end{array} \right. \\ \mathcal{R} & \mathcal{R}_1 & \mathcal{R} & \mathcal{R}_1 & \mathcal{R} & \mathcal{R}_1 \end{array}$$

où $t_2^{(1)} = \gamma_{e,1} T$ avec $\gamma_{e,1} = (1 - u_1^2/c^2)^{-1/2} = 1,005$, car la durée T est une durée propre pour $\mathcal{R}$. Ainsi : $t_2^{(1)} = \gamma_{e,1} T = 1,005 \text{ jour}$.

3. La durée τ étant une durée propre pour $\mathcal{R}_1$, il vient :

$$t_3^{(1)} = \frac{\tau}{\gamma_{e,1}} = \frac{T}{\gamma_{e,1}} \frac{u_2}{u_2 - u_1} = \frac{3}{1,005} = 2,985 \text{ jours}$$

4. Lorsque le vaisseau (2) démarre, la distance parcourue par (1) et mesurée dans ce référentiel vaut, puisque c'est une longueur propre pour (1) :

$$x_2^{(1)} = \gamma_{e,1} u_1 T = \gamma_{e,1} \beta_{e,1} c T = (\gamma_{e,1}^2 - 1)^{1/2} c T \quad \text{soit} \quad x_2^{(1)} = 0,1 c T \approx 2,595 \times 10^{12} \text{ m}$$

c'est-à-dire 7,7857 milliards de km.

5. La vitesse de (2) par rapport à $\mathcal{R}_1$ vaut :

$$v_{21} = \frac{u_2 - u_1}{1 - u_1 u_2 / c^2} = \frac{0,05}{1 - 0,015} c = 0,05076 c$$

On peut retrouver ce résultat en utilisant les réponses précédentes. En effet :

$$v_{21} = \frac{x_2^{(1)}}{t_3^{(1)} - t_2^{(1)}} = \frac{(\gamma_{e,1}^2 - 1)^{1/2} c T}{\tau / \gamma_{e,1} - \gamma_{e,1} T} = \frac{(u_2 - u_1)(\gamma_{e,1}^2 - 1)^{1/2} c}{\gamma_{e,1} [u_2(1 - \beta_{e,1}^2) - (u_2 - u_1)]}$$

soit, en simplifiant :

$$v_{21} = \beta_{e,1} c \frac{u_2 - u_1}{u_1 - u_2 \beta_{e,1}^2} = \frac{u_2 - u_1}{1 - u_2 u_1 / c^2}$$

S4- 7. Anisotropie de l'émission lumineuse d'une source

1. À partir des formules de transformations des vitesses, on trouve aisément :

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta^* + u/c}{1 + u \cos \theta^* / c}$$

2. Le graphe donnant $\cos \theta$ en fonction de θ^* , lorsque que $u/c = 0,5$, est représenté sur la figure S4.1a. Cette courbe passe par 0 pour $\theta^* = 2\pi/3$.

Lorsque $u/c \ll 1$, la courbe passe par 0 pour $\theta^* = \pi/2$.

Lorsque $u/c \approx 1$, la courbe se réduit à la droite $\cos \theta = 1$. Le rayonnement se produit uniquement vers l'avant à $\theta = 0$.

3. On a :

$$\frac{dN}{d\Omega} = \frac{dN}{d\Omega^*} \frac{d\Omega^*}{d\Omega} = \frac{N \sin \theta^* d\theta^*}{4\pi \sin \theta d\theta}$$

car :

$$\frac{dN}{d\Omega^*} = \frac{N}{4\pi} \quad \text{et} \quad d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta \quad \text{puisque} \quad \Omega = 2\pi(1 - \cos \theta)$$

En différenciant la formule de la question 1, on trouve :

$$\frac{\sin \theta^* d\theta^*}{\sin \theta d\theta} = \frac{1 - u^2/c^2}{(1 - u \cos \theta/c)^2} \quad \text{et} \quad dN = \frac{N}{4\pi} \frac{d\Omega}{\gamma^2(1 - u \cos \theta/c)^2}$$

4. Comme $\gamma = 2,294$, la fonction $f(\theta)$ s'écrit de façon précise :

$$f(\theta) = \frac{1}{5,263(1 - 0,9 \cos \theta)^2}$$

Le rayonnement est donc très directionnel : vue de l'avant, la source paraît très intense alors que, vue de l'arrière, elle semble peu intense (Fig. S4.1b).

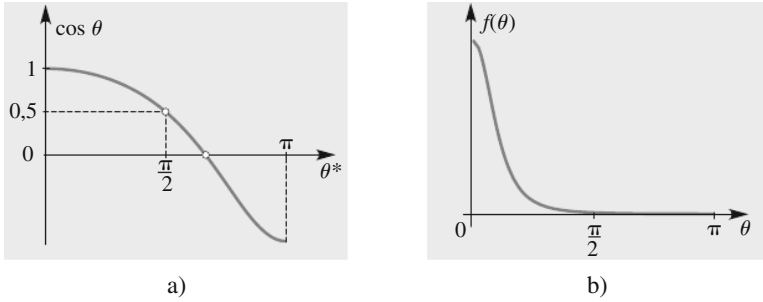


FIG. S4.1.

S4– 8. Approximation newtonienne de l'aberration des étoiles

1. En théorie d'Einstein, on montre que le diamètre apparent 2α de la trajectoire circulaire apparente de l'étoile est tel que (cf. chapitre 4) :

$$2 \tan \alpha = 2\gamma_e \beta_e \quad \text{avec} \quad \beta_e = \frac{v_e}{c}$$

En faisant $\gamma_e \approx 1$, on trouve la valeur newtonienne $2 \tan \alpha = 2\beta_e = 2v_e/c$ soit $\alpha = v_e/c$ puisque l'angle α est de l'ordre de 10^{-4} .

2. La correction relativiste est donc :

$$\frac{2\gamma_e \beta_e - 2\beta_e}{2\beta_e} = \gamma_e - 1 \approx \frac{\beta_e^2}{2} = 0,5 \times 10^{-8}$$

Comparons cette erreur à celle qui provient de l'assimilation de $\tan \alpha$ à α . Comme $\tan \alpha \approx \alpha + \alpha^3/3$, on voit que cette précision est de :

$$\frac{\alpha^2}{3} \approx \frac{\beta_e^2}{3} = 0,33 \times 10^{-8}$$

Cette erreur est donc du même ordre de grandeur que la correction relativiste.

S4– 9. Mouvements d'une particule par rapport à deux référentiels galiléens

1. Comme $\beta_e = 0,9$, $\gamma_e = 2,29$, d'où, en composant les vitesses :

$$v = \frac{v' + v_e}{1 + v'v_e/c^2} = \frac{-0,5c + 0,9c}{1 - 0,5 \times 0,9} = \frac{0,4}{0,55}c = 0,727c$$

2. La longueur parcourue par la particule dans $\mathcal{R}'$ est :

$$L' = |x'_2 - x'_1| \quad \text{avec} \quad x'_2 = x'_1 - \frac{c}{2}(t'_2 - t'_1) = 5 - \frac{0,3}{2}(400 - 100) = -40 \text{ m} \quad \text{d'où} \quad L' = 45 \text{ m}$$

Quant à la longueur parcourue dans $\mathcal{R}$, elle vaut $L = |x_2 - x_1|$ avec :

$$x_1 = \gamma_e(x'_1 + \beta_e ct'_1) = 2,29(5 + 0,9 \times 30) = 73,28 \text{ m}$$

et :

$$x_2 = \gamma_e(x'_2 + \beta_e ct'_2) = 2,29(-40 + 0,9 \times 120) = 155,72 \text{ m}$$

On en déduit : $L = 155,72 - 73,28 = 82,44 \text{ m}$.

3. Le rapport L/L' vaut 1,832 alors que $1/\gamma_e = 0,437$, ce qui prouve que la relation entre ces deux longueurs n'est pas de type longueur impropre sur longueur propre. Ce résultat n'est pas surprenant, car ni L ni L' ne sont des longueurs propres.

S4– 10. Vaisseau spatial

1. On sait que (cf. chapitre 4) :

$$\frac{\beta}{(1-\beta^2)^{1/2}} = \frac{t}{t_1} \quad \text{avec} \quad t_1 = \frac{c}{a_p} = 0,5 \times 10^8 \text{ s} \quad \text{soit} \quad t_1 = 1,58 \text{ an}$$

puisque $1 \text{ an} = 24 \times 3600 \times 365,25 = 0,3156 \times 10^8 \text{ s}$. Par conséquent :

$$t = t_1 \frac{\beta}{(1-\beta^2)^{1/2}} = 1,58 \frac{0,9}{(1-0,81)^{1/2}} = 2,06 \times 1,58 = 3,26 \text{ an}$$

La distance parcourue est :

$$L = ct_1 \left[\left(1 + \frac{t^2}{t_1^2} \right)^{1/2} - 1 \right] = 1,29 ct_1 = 1,29 \times 3 \times 10^8 \times 1,58 \times 0,3156 \times 10^8 = 19,3 \times 10^{15} \text{ m}$$

2. La durée donnée par les horloges du vaisseau est une durée propre. Donc :

$$t' = \int \frac{dt}{\gamma} = \int dt(1-\beta^2)^{1/2} = \int \frac{dt}{[1+(t/t_1)^2]^{1/2}} \quad \text{puisque} \quad \beta^2 = \frac{(t/t_1)^2}{1+(t/t_1)^2}$$

On trouve, en posant $X = t/t_1$:

$$t' = t_1 \int_0^{2,06} \frac{dX}{(1+X^2)^{1/2}} = [\operatorname{argsinh} X]_0^{2,06} = 1,58 \times 1,89 = 2,32 \text{ an}$$

Quant à la distance parcourue, mesurée par les instruments du vaisseau, on l'obtient en effectuant la somme des longueurs propres :

$$L' = \int dx' = \int \gamma dx = \int \frac{v dt}{(1-\beta^2)^{1/2}} = c \int \frac{\beta dt}{(1-\beta^2)^{1/2}} = ct_1 \int \left(\frac{t}{t_1} \right) \frac{dt}{t_1} = ct_1 \int_0^X X dX = ct_1 \left(\frac{X^2}{2} \right)_0^{2,06}$$

Par conséquent, $L' = 2,12 ct_1 = 2,12 \times 3 \times 10^8 \times 1,58 \times 0,3156 \times 10^8 = 31,7 \times 10^{15} \text{ m}$

S4– 11. Coordonnées d'événements dans le mouvement de vaisseaux spatiaux

1. La composition einsteinienne des vitesses entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ permet d'écrire :

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \beta_e v'_x/c} = \frac{0,5 - 0,8}{1 - 0,8 \times 0,5} c = -0,5 c$$

Il en résulte, puisque $\beta_e = -0,5$:

$$\gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2} = \frac{2}{3^{1/2}} = 1,1547 \quad \text{et} \quad \gamma_e \approx \frac{L_2}{L_1}$$

2. Les coordonnées spatio-temporelles de E_1 dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ s'écrivent respectivement :

$$E_1 = \left| \begin{array}{c} ct_1 \\ x_1 = L_1 \end{array} \right|_{\mathcal{R}} \quad E_1 = \left| \begin{array}{c} ct'_1 \\ x'_1 = L_2 \end{array} \right|_{\mathcal{R}'}$$

On en déduit, à l'aide des formules de transformation :

$$L_2 = \gamma_e(L_1 - \beta_e ct_1) \quad \text{d'où} \quad L_2 - \gamma_e L_1 = -\gamma_e \beta_e ct_1 = 0$$

Dans $\mathcal{R}$, E_1 et E_0 sont simultanés. En revanche, ils ne le sont pas dans $\mathcal{R}'$, puisque :

$$ct'_1 = \gamma_e(ct_1 - \beta_e L_1) = -\gamma_e \beta_e L_1 = 1,1547 \times 0,5 \times 100 = 57,7 \text{ m} \quad \text{d'où} \quad t'_1 = \frac{57,7}{0,3 \times 10^9} \approx 192,3 \text{ ns}$$

b) Calculons le carré de l'intervalle entre E_0 et E_1 :

$$\Delta_{01}^2 = c^2 t_1^2 - L^2 = -L^2 = -10^4 \text{ m}^2$$

L'intervalle est donc du genre espace.

3. a) Écrivons les coordonnées spatio-temporelles de E_2 dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$:

$$E_2 \Big|_{\mathcal{R}} \begin{matrix} ct_2 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \quad E_2 \Big|_{\mathcal{R}'} \begin{matrix} ct'_2 \\ x'_2 = L_2 \end{matrix}$$

On en déduit, à l'aide des formules de transformation :

$$x'_2 = L_2 = \gamma_e(0 - \beta_e ct_2) \quad \text{d'où} \quad ct_2 = -\frac{L_2}{\gamma_e \beta_e} = 2L_1 = 200 \text{ m} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{2L_1}{c} = 667 \text{ ns}$$

De la même façon :

$$ct'_2 = \gamma_e(ct_2 - \beta_e x_2) = \gamma_e ct_2 = \gamma_e 2L_1 = 2L_2 = 230,94 \text{ m} \quad \text{et} \quad t'_2 = \frac{2L_2}{c} = 770 \text{ ns}$$

b) Calculons l'intervalle entre E_0 et E_2 :

$$s_{02}^2 = c^2 t_2^2 - x_2^2 = c^2 t_2^2 = 4 \times 10^4 \text{ m}^2$$

Il est du genre temps.

4. Quant à l'intervalle entre E_1 et E_2 , il vaut :

$$s_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = c^2 t_2^2 - L^2 = L^2 \left(\frac{1}{\beta_e^2} - 1 \right) = 3 \times 10^4 \text{ m}^2$$

Il est donc du genre temps.

S4- 12. Composition des accélérations

Comme l'accélération est transversale dans $\mathcal{R}$ et la vitesse initiale nulle, il vient $\mathbf{v} = -g t \mathbf{e}_y$. On a donc (cf. chapitre 4) :

$$\mathbf{a}'_{\perp} = \frac{\mathbf{a}_{\perp} + \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{a})}{\gamma_e^2 (1 - \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v} / c^2)^3} = \frac{\mathbf{a}_{\perp}}{\gamma_e^2}$$

puisque $\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v} = 0$. Ainsi, dans $\mathcal{R}'$, l'accélération est aussi transversale et uniforme de valeur :

$$a'_{\perp} = \frac{a_{\perp}}{\gamma_e^2} = a_{\perp} \left(1 - \frac{v_e^2}{c^2} \right) = -9,81 \times 0,75 = -7,36 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

S4- 13. Facteur d'entraînement de Fresnel

1. Comme $\beta_e = 0,5$, $\gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2} = 1,15$.

2. Les coordonnées spatiotemporelles de E_2 dans $\mathcal{R}'$ et dans $\mathcal{R}$ s'écrivent :

$$E_2 \Big|_{\mathcal{R}'} \begin{matrix} c\tau' = ce/v = ne \\ e \end{matrix} \quad E_2 \Big|_{\mathcal{R}} \begin{matrix} c\tau = \gamma_e(c\tau' + \beta_e e) \\ \gamma_e(e + \beta_e c\tau') \end{matrix}$$

d'où :

$$c\tau = \gamma_e(ne + \beta_e e) = \gamma_e e(n + \beta_e) \quad \text{et} \quad \gamma_e(e + \beta_e c\tau') = \gamma_e(e + \beta_e ne) = \gamma_e e(1 + \beta_e n)$$

3. Les durées de traversée de la lame, dans $\mathcal{R}'$ et dans $\mathcal{R}$, sont respectivement :

$$\tau' = \frac{ne}{c} = 50 \text{ ps} \quad \text{et} \quad \tau = \gamma_e \frac{ne}{c} \left(1 + \frac{\beta_e}{n} \right) = 1,15 \times 50 \times (1 + 1/3) \approx 77 \text{ ps}$$

La distance qui sépare, dans $\mathcal{R}$, les événements E_1 et E_2 est :

$$x = \gamma_e e(1 + \beta_e ne) = 1,15 \times (1 + 0,5 \times 1,5) = 2,02 \text{ cm}$$

4. On trouve aisément le carré de l'intervalle entre E_1 et E_2 :

$$s^2 = c^2 \tau'^2 - e^2 = n^2 e^2 - e^2 = e^2(n^2 - 1) \quad \text{d'où} \quad s = 1,12 \text{ cm}$$

5. D'après la composition des vitesses, on a :

$$v = \frac{v' + v_e}{1 + v_e v' / c^2} = \frac{c/n + v_e}{1 + \beta_e/n} = c \frac{1 + \beta_e n}{n + \beta_e} = \frac{7}{8} c = 0,875 c$$

On peut retrouver cette dernière valeur à l'aide des questions précédentes :

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta \tau} = \frac{x}{\tau} = \frac{\gamma_e e (1 + \beta_e n)}{\gamma_e e (n + \beta_e)} = c \frac{1 + \beta_e n}{n + \beta_e}$$

6. Dans l'approximation newtonienne, $\beta_e \ll 1$, d'où $v \approx c/n + v_e$.

Écrivons v sous la forme $v = c/n + u_f$:

$$u_f = c \frac{1 + \beta_e n}{n + \beta_e} - \frac{c}{n} = \frac{n^2 c \beta_e - c \beta_e}{n(n + \beta_e)} = u \frac{n^2 - 1}{n^2(1 + \beta_e/n)} = u \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \frac{1}{1 + \beta_e/n}$$

Ainsi :

$$f = \frac{F}{1 + \beta_e/n} \approx F \quad \text{puisque} \quad \frac{\beta_e}{n} \ll 1$$

dans le cas de l'expérience historique de Fizeau, dans laquelle la lame de verre est remplacée par une lame d'eau, d'indice $n = 1,33$ et de vitesse $u = 7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Chapitre 5

S5– 1. Expression de la loi fondamentale de la dynamique einsteinienne

1. Avec les notations de la figure S5.1, nous avons, $s = \widehat{A_0 A}$ étant la coordonnée curviligne du point A comptée à partir de sa position initiale A_0 :

$$\mathbf{e}_t = \frac{d\mathbf{OA}}{ds} \quad \mathbf{e}_n = R \frac{d\mathbf{e}_t}{ds} \quad \mathbf{v} = v \mathbf{e}_t \quad \text{et} \quad \mathbf{p} = \gamma m v \mathbf{e}_t \quad \text{avec} \quad \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$$

$\mathbf{e}_t$ étant le vecteur unitaire porté par la tangente à la trajectoire, $\mathbf{e}_n$ le vecteur unitaire porté par la normale, R le rayon de courbure en A de la trajectoire, $\mathbf{v}$ la vitesse du point matériel dans $\mathcal{R}$, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ le facteur relativiste.

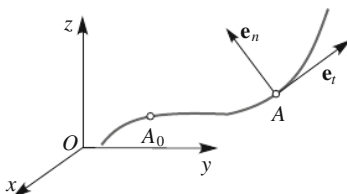


FIG. S5.1.

Il vient, en explicitant $d\mathbf{p}/dt$:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(\gamma m v \mathbf{e}_t)}{dt} = \gamma m v \frac{d\mathbf{e}_t}{dt} + mc \frac{d(\gamma\beta)}{dt} \mathbf{e}_t$$

avec :

$$\frac{d(\gamma\beta)}{dt} = \beta \frac{d\gamma}{dt} + \gamma \frac{d\beta}{dt} = (\beta \frac{d\gamma}{d\beta} + \gamma) \frac{d\beta}{dt} = \gamma(\beta^2 \gamma^2 + 1) \frac{d\beta}{dt} = \gamma^3 \frac{d\beta}{dt}$$

puisque $d\gamma/d\beta = \beta\gamma^3$. Finalement :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \gamma^3 m \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t + \frac{\gamma m v^2}{R} \mathbf{e}_n$$

2. La loi fondamentale de la dynamique einsteinienne s'explique selon :

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m \mathbf{v}) = \gamma m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \frac{d}{dt}(\gamma m) = \gamma m \mathbf{a} + \mathbf{v} \left(\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right) \quad \text{car} \quad \frac{d(\gamma m c^2)}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

S5- 2. Durée de traversée d'une galaxie par un proton

Pour l'observateur terrestre :

$$\gamma = \frac{\mathcal{E}}{m_p c^2} = \frac{10^{10}}{0,938} = 1,066 \times 10^{10} \quad \text{d'où} \quad \beta \approx 1 \quad \text{et} \quad T \approx 10^5 \text{ an}$$

Pour le proton, la durée de la traversée est une durée propre. Par conséquent :

$$\tau = \frac{T}{\gamma} \approx 0,938 \times 10^{-5} \text{ an} = 4,93 \text{ min}$$

S5- 3. Énergie cinétique d'une particule rapide. Approximation newtonnienne

1. Comme :

$$\mathcal{E}_k = (\gamma - 1)mc^2 = \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} - 1 \right] mc^2 \approx \frac{1}{2}mv^2 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right)$$

alors :

$$\frac{3}{4} \frac{v^2}{c^2} \geq \varepsilon \quad \text{si} \quad v > v_c \quad \text{avec} \quad v_c = 1,15 \varepsilon^{1/2} c$$

Si $\varepsilon = 10^{-2}$, $v_c = 0,115 c$, alors que si $\varepsilon = 10^{-3}$, $v_c = 0,036 c$.

2. Pour $\varepsilon = 0,01$, les énergies cinétiques d'un électron et d'un proton sont, respectivement :

$$\mathcal{E}_k^e \approx \frac{1}{2} m_e c^2 \beta^2 = 338 \varepsilon \text{ keV} = 3,38 \text{ keV} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_k^p \approx \frac{1}{2} m_p c^2 \beta^2 = 620 \varepsilon \text{ MeV} = 6,20 \text{ MeV}$$

S5- 4. Différentes expressions de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique

1. Pour $\beta = 0,99$, on a :

$$\gamma = 7,088 \quad \mathcal{E}_k = (\gamma - 1)m_e c^2 = 3,111 \text{ MeV} \quad \text{et} \quad p = \gamma \beta m_e c = 3,586 \text{ MeV} \cdot c^{-1}$$

2. Comme $\mathcal{E}^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$, il vient :

$$p^2 c^2 = \mathcal{E}^2 - m^2 c^4 = (\mathcal{E} - mc^2)(\mathcal{E} + mc^2) = \mathcal{E}_k(\mathcal{E}_k + 2mc^2) \quad \text{d'où} \quad pc = [\mathcal{E}_k(\mathcal{E}_k + 2mc^2)]^{1/2}$$

ce qui donne pour le proton :

$$pc = [\mathcal{E}_k(\mathcal{E}_k + 2m_p c^2)]^{1/2} = 6,87 \text{ GeV} \quad \text{soit} \quad p = 6,87 \text{ GeV} \cdot c^{-1}$$

et pour le photon (masse nulle) :

$$pc = \mathcal{E}_k = \mathcal{E} = 2 \text{ keV} \quad \text{et} \quad p = 2 \text{ keV} \cdot c^{-1}$$

S5– 5. Énergie cinétique et énergie de masse

La vitesse d'une particule dont l'énergie cinétique est le quart de son énergie de masse s'obtient aisément :

$$\frac{\mathcal{E}_k}{mc^2} = 0,25 = \gamma - 1 \quad \text{d'où} \quad \gamma = 1,25 \quad \text{et} \quad v = 0,6c$$

Le rapport entre sa quantité de mouvement et mc est :

$$\frac{p}{mc} = \gamma\beta = (\gamma^2 - 1)^{1/2} = 0,75$$

S5– 6. Relation entre les variations de vitesse, de quantité de mouvement et d'énergie

1. Exprimons l'énergie d'une particule libre en fonction de sa vitesse :

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{(1 - \beta^2)^{1/2}} \quad \text{donne} \quad 1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}}\right)^2 \quad \text{soit aussi} \quad \frac{v^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}}\right)^2$$

En différenciant, on trouve :

$$\frac{2v}{c^2} \frac{dv}{v} = 2 \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}}\right)^2 \frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E}} \quad \text{d'où} \quad \frac{dv}{v} = \frac{1}{\gamma^2 \beta^2} \frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E}} = \frac{1}{\gamma^2 - 1} \frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E}}$$

Si on différencie de la même façon la relation $\mathcal{E}^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$, il vient :

$$2\mathcal{E} \, d\mathcal{E} = 2pc^2 \, dp \quad \text{soit} \quad \frac{dp}{p} = \frac{\mathcal{E}}{p^2 c^2} d\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}^2}{\mathcal{E}^2 - m^2 c^4} \frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E}} = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E}}$$

2. Pour $\mathcal{E} \gg mc^2$, soit $\gamma \gg 1$, les relations précédentes deviennent :

$$\frac{dv}{v} \approx \frac{1}{\gamma^2} \frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E}} \quad \text{et} \quad \frac{dp}{p} \approx \frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E}}$$

3. Différentions l'expression reliant l'énergie cinétique et la quantité de mouvement :

$$(\mathcal{E}_k + mc^2)^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 \quad \text{donne} \quad 2(\mathcal{E}_k + mc^2) \, d\mathcal{E}_k = 2pc^2 \, dp$$

Par conséquent :

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{\mathcal{E}_k} = \frac{pc^2 \, dp}{\mathcal{E}_k(\mathcal{E}_k + mc^2)} = \frac{p^2 c^2}{\mathcal{E}_k(\mathcal{E}_k + mc^2)} \frac{dp}{p} = \alpha \frac{dp}{p}$$

avec :

$$\alpha = \frac{p^2 c^2}{\mathcal{E}_k(\mathcal{E}_k + mc^2)} = \frac{\gamma^2 \beta^2 m^2 c^4}{\gamma(\gamma - 1)m^2 c^4} = \frac{\beta^2}{1 - (1 - \beta^2)^{1/2}}$$

Sur la figure S5.2, on a tracé la graphe donnant α en fonction de β . On voit que, dans le cas newtonien ($\beta \approx 0$), $\alpha \approx 2$, puisque $(1 - \beta^2)^{1/2} - 1 \approx \beta^2/2$. Dans le cas ultra einsteinien ($\beta \approx 1$), $\alpha \approx 1$. Calculons la dérivée $d\alpha/d\beta$:

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = 2\beta \frac{d\alpha}{d(\beta^2)} = \beta \frac{2 - 2(1 - \beta^2)^{1/2} - \beta^2(1 - \beta^2)^{-1/2}}{[1 - (1 - \beta^2)^{1/2}]^2}$$

La pente de la courbe $\alpha(\beta)$ est nulle pour $\beta = 0$ et vaut $-\infty$ pour $\beta = 1$.

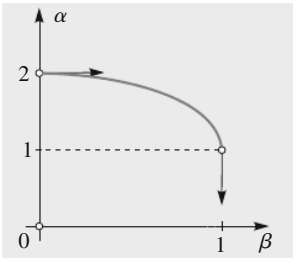


FIG. S5.2.

S5– 7. Calcul de β et γ pour des électrons et des protons

1. Les relations donnant γ et β , en fonction de l'énergie cinétique des particules, sont :

$$\gamma = 1 + \frac{\mathcal{E}_k}{mc^2} \quad \text{et} \quad \beta = \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)^{1/2}$$

En faisant $mc^2 = 0,511 \text{ MeV}$, on traite le cas des électrons (cf. Tab. S5.1).

$\mathcal{E}_k \text{ (MeV)}$	Électrons			Protons		
	γ	β	$\lambda_{DB} \text{ (pm)}$	γ	β	$\lambda_{DB} \text{ (fm)}$
0,01	1,019 6	0,155 1	12,19			
0,05	1,097 8	0,412 6	5,356			
0,1	1,195 7	0,548 2	3,70			
0,3	1,587 1	0,776 5	1,968 0			
0,5	1,978 5	0,862 9	1,421 0			
1	2,956 9	0,941 1	0,871 80	1,001 1	0,046 0	28,690
2	4,913 9	0,979 1	0,504 20	1,002 1	0,065 9	20,235
3	6,870 8	0,989 3	0,356 88	1,003 2	0,079 7	16,530
5	10,784	0,995 7	0,225 92	1,005 3	0,102 8	12,780
10	20,569	0,998 8	0,118 08	1,010 7	0,144 8	9,026 0
30	59,708	0,999 8	$4,063\,6\,10^{-2}$	1,032 0	0,247 0	5,184 0
50	98,847	0,999 95	$2,454\,4\,10^{-2}$	1,653	0,314 0	3,994 0
100	196,69	0,999 98	$1,232\,2\,10^{-2}$	1,106 6	0,428 2	2,788 7
1 000	1 957,9	0,999 99	$1,239\,0\,10^{-3}$	2,065 8	0,875 0	0,732 5
10 000				11,658	0,996 3	0,114 0
20 000				22,316	0,999 0	0,059 4
50 000				54,290	0,999 8	0,024 9
100 000				107,58	0,999 95	0,012 3
1 000 000				1 066,8	0,999 99	0,001 2

TAB. S5.1.

2. Même réponse que précédemment, mais $mc^2 = 938,27 \text{ MeV}$ (cf. Tab. S5.1).

3. Exprimons λ_{DB} en fonction de γ :

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{mc\gamma\beta} = \frac{\lambda_C}{(\gamma^2 - 1)^{1/2}} \quad \text{où} \quad \lambda_C = \frac{h}{mc}$$

est la longueur d'onde Compton.

Pour des électrons ($mc^2 = 0,511 \text{ MeV}$), $\lambda_C = 2,426 \text{ pm}$ (cf. Tab. S5.1).

Pour des protons ($mc^2 = 938,27 \text{ MeV}$) $\lambda_C = 1,3211 \text{ fm}$ (cf. Tab. S5.1).

S5– 8. Énergie d'un système de deux neutrons

1. Dans $\mathcal{R}$, l'énergie totale de la particule A_2 est $\mathcal{E}_2 = \gamma_2 m_2 c^2$. On obtient l'énergie de cette particule dans $\mathcal{R}'$ selon :

$$\mathcal{E}'_2 = \gamma_e (\mathcal{E}_2 - \beta_e p_{2,x} c) \quad \text{avec} \quad \beta_e = \beta_1 \quad p_{2,x} = -\beta_2 \gamma_2 m_2 c \quad \gamma_2 = (1 - \beta_2^2)^{-1/2} \quad \text{et} \quad \gamma_e = (1 - \beta_1^2)^{-1/2} = \gamma_1$$

Par conséquent :

$$\mathcal{E}'_2 = \gamma_1 (\gamma_2 m_2 c^2 + \beta_1 \beta_2 \gamma_2 m_2 c^2) = \gamma_1 \gamma_2 m_2 c^2 (1 + \beta_1 \beta_2)$$

2. Dans $\mathcal{R}$, l'énergie de l'ensemble est :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \gamma_1 m_1 c^2 + \gamma_2 m_2 c^2 \quad \text{avec} \quad \gamma_1 = (1 - \beta_1^2)^{-1/2} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = (1 - \beta_2^2)^{-1/2}$$

Pour avoir l'énergie dans $\mathcal{R}'$, on procède comme précédemment :

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2 = m_1 c^2 + \gamma_1 \gamma_2 m_2 c^2 (1 + \beta_1 \beta_2)$$

3. Dans le cas considéré, $m = m_n$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_e = \beta = 0,6$ et $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_e = \gamma = 1,25$. Par conséquent :

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \gamma m_n c^2 = 1\,174,5 \text{ MeV} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}'_2 = \gamma \mathcal{E}_2 (1 + \beta^2) = 1\,996,5 \text{ MeV}$$

On en déduit :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = 2\gamma m_n c^2 = 2\,348,9 \text{ MeV} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}' = \mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2 = 939,57 + 1\,996,48 \text{ MeV} = 2\,936 \text{ MeV}$$

Le rapport $\mathcal{E}'/\mathcal{E}$ vaut sensiblement 1,25 soit γ , ce qui n'est pas surprenant, car, $\mathcal{R}$ étant dans ce cas référentiel du centre de masse, on a la relation suivante :

$$\mathcal{E}' = \gamma(\mathcal{E} - \beta P_x c) = \gamma \mathcal{E} \quad \text{puisque} \quad P_x = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}' = \gamma(\mathcal{E} - \beta P_x c) = 1,4 \mathcal{E} = 3\,683 \text{ MeV}$$

puisque $P_x = \gamma\beta c - \gamma\beta c = 0$.

S5– 9. Force d'interaction entre deux particules chargées animées d'une même vitesse constante

Dans $\mathcal{R}'$, référentiel propre des électrons, la force d'interaction est d'origine électrostatique :

$$\mathbf{F}' = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \frac{\mathbf{e}_y}{d^2}$$

Dans $\mathcal{R}$, la force s'obtient à partir de la transformation des forces :

$$\gamma F_y = \gamma' F'_y \quad \text{et} \quad \gamma F_x = \gamma_e (\gamma' F'_x + \beta_e \gamma' \mathbf{F}' \cdot \mathbf{v}' / c)$$

Comme $\mathbf{v}' = \mathbf{0}$, $F'_x = 0$, $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, il vient : $\gamma_e F_y = F'_y$ et $F_x = 0$.

i) Pour $\mathcal{E}_k = 1 \text{ keV}$, $\gamma \approx 1,002$: l'électron n'est pas einsteinien, d'où : $F_y \approx F'_y = 23 \times 10^{-23} \text{ N}$.

ii) Pour $\mathcal{E}_k = 1 \text{ MeV}$, $\gamma = 2,957$ d'où $F_y = 7,8 \times 10^{-23} \text{ N}$.

S5– 10. Lois de la réflexion sur un miroir en mouvement

1. La relation entre l'angle d'incidence i' et l'angle de réflexion r' est bien connue : $i' = r'$. Les composantes de la vitesse de la lumière sont donc :

$$v'_x = c \cos i' \quad \text{et} \quad v'_y = c \sin i' \quad \text{pour le rayon incident}$$

et :

$$v'_x = -c \cos r' = -v'_x \quad \text{et} \quad v'_y = c \sin r' = v'_y \quad \text{pour le rayon émergent}$$

2. En appliquant les formules de transformation de vitesse, on obtient, pour le rayon incident :

$$v_x = c \cos i = \frac{v'_x + u}{1 + v'_x u / c^2} = c \frac{\cos i' + \beta_e}{1 + \beta_e \cos i'} \quad \text{et} \quad v_y = c \sin i = \frac{v'_y}{\gamma_e (1 + v'_x u / c^2)} = c \frac{\sin i'}{\gamma_e (1 + \beta_e \cos i')}$$

Pour le rayon réfléchi :

$$v_x = -c \cos r = c \frac{-\cos r' + \beta_e}{1 - \beta_e \cos r'} \quad v_y = c \sin r = c \frac{\sin r'}{\gamma_e (1 + \beta_e \cos r')}$$

On trouve donc :

$$\cos i = \frac{\cos i' + \beta_e}{1 + \beta_e \cos i'} \quad \sin i = \frac{\sin i'}{\gamma_e (1 + \beta_e \cos i')}$$

et

$$\cos r = \frac{\cos i' - \beta_e}{1 - \beta_e \cos i'} \quad \sin r = \frac{\sin i'}{\gamma_e (1 - \beta_e \cos i')}$$

On en déduit le rapport :

$$\frac{\sin r}{\sin i} = \frac{1 - \beta_e \cos i'}{1 + \beta_e \cos i'}$$

On voit que ce rapport est différent de 1, sauf évidemment pour $\beta_e = 0$. Dans $\mathcal{R}$, les angles incident et réfléchi ne sont pas égaux en valeur absolue.

3. Exprimons $\cos i'$ en fonction de $\cos i$ et β_e , ou en fonction de $\cos r$ et β_e :

$$\cos i' = \frac{-\beta_e + \cos i}{1 - \beta_e \cos i} \quad \cos i' = \frac{\beta_e + \cos r}{1 + \beta_e \cos r}$$

Par conséquent :

$$\frac{\sin r}{\sin i} = \frac{1 - \beta_e \cos i'}{1 + \beta_e \cos i'} = \frac{\cos i - \beta_e}{\cos r + \beta_e} \quad \text{d'où l'on déduit} \quad \beta_e = \frac{\sin i \cos i - \sin r \cos r}{\sin i + \sin r}$$

Pour $i = \pi/6$ et $r = \pi/4$, on trouve : $\beta_e = 0,21$.

4. La composante du quadrivecteur quantité de mouvement-énergie du photon selon l'axe Oy' de $\mathcal{R}'$ est invariante. Par conséquent dans $\mathcal{R}$, pour le faisceau incident de fréquence ν_1 et le faisceau réfléchi de fréquence ν_2 , on a, respectivement :

$$\frac{h\nu_1}{c} \sin i = \frac{h\nu'}{c} \sin i' \quad \text{et} \quad \frac{h\nu_2}{c} \sin r = \frac{h\nu'}{c} \sin r'$$

On obtient λ_1 et λ_2 en calculant $\sin i'$:

$$\cos i' = \frac{-\beta_e + \cos i}{1 - \beta_e \cos i} = 0,8 \quad \text{d'où} \quad \sin i' = 0,6 \quad \lambda_1 = \lambda' \frac{\sin i}{\sin i'} = 527,3 \text{ nm} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \lambda' \frac{\sin r}{\sin r'} = 745,65 \text{ nm}$$

S5– 11. Masse d'un système de deux électrons

1. Dans $\mathcal{R}$, l'énergie $\mathcal{E}$ du système est la somme des énergies des particules :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \gamma_1 m_e c^2 + \gamma_2 m_e c^2 \quad \text{avec} \quad \gamma_1 = (1 - 0,75^2)^{-1/2} = 1,512 \quad \text{et} \quad \gamma_2 = (1 - 0,25^2)^{-1/2} = 1,033$$

Par conséquent, $\mathcal{E} = 1,3 \text{ MeV}$. Quant à la quantité de mouvement, on l'obtient selon :

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \gamma_1 \beta_1 m_e c \mathbf{e}_x - \gamma_2 \beta_2 m_e c \mathbf{e}_x = [(\gamma_1^2 - 1)^{1/2} - (\gamma_2^2 - 1)^{1/2}] m_e c \mathbf{e}_x = 1,493 m_e c \mathbf{e}_x = 0,447 \mathbf{e}_x \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-1}$$

2. La vitesse de la particule A_2 par rapport au référentiel $\mathcal{R}'$, dans lequel A_1 est immobile, est obtenue en composant les vitesses :

$$v'_x = \frac{-0,25c - 0,75c}{1 - (-0,25) \times 0,75} = \frac{-16}{19}c = -0,842c \quad v'_y = 0 \quad v'_z = 0$$

Donc, $\mathbf{v}'_2 = -0,842c \mathbf{e}_x$. La vitesse de A_1 dans le référentiel $\mathcal{R}''$, dans lequel A_2 est immobile, est évidemment l'opposée $0,8125c \mathbf{e}_x$.

3. Pour obtenir l'énergie et la quantité de mouvement du système dans $\mathcal{R}'$, il suffit de transformer $4-P$:

$$P'_x = \gamma_1 (P_x - \beta_1 \mathcal{E}/c) = 1,512(0,447 - 0,75 \times 1,3) = -0,8 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-1}$$

et

$$\mathcal{E}' = \gamma_1 (\mathcal{E} - \beta_1 P c) = 1,512(1,3 - 0,75 \times 0,447) = 1,46 \text{ MeV}$$

On peut retrouver ces résultats directement :

$$P'_x = -\gamma'_2 \beta'_2 m_e c = -(\gamma'^2_2 - 1)^{1/2} m_e c = -1,56 \times 0,511 = -0,8 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-1}$$

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2 = m_e c^2 + \gamma'_2 m_e c^2 = m_e c^2 (1 + \gamma'_2) = 1,46 \text{ MeV} \quad \text{puisque} \quad \gamma'_2 = (1 - 0,842^2)^{-1/2} = 1,854$$

4. Alors que $2m_e c^2 = 1,022 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2}$, la masse de ce système vaut :

$$M = \frac{1}{c^2} (\mathcal{E}^2 - P^2 c^2)^{1/2} = (1,3^2 - 0,763^2)^{1/2} = 1,0525 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2}$$

S5- 12. Masse d'un système de deux photons

L'énergie, la quantité de mouvement et la masse du système des deux photons valent respectivement :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = 70 \text{ MeV} \quad \mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \frac{\mathcal{E}_1}{c} \mathbf{e}_x - \frac{\mathcal{E}_2}{c} \mathbf{e}_x = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{c} \mathbf{e}_x = 30 \mathbf{e}_x \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-1}$$

et $M = (70^2 - 30^2)^{1/2} = 63,2 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2}$, alors que la somme des masses des photons est nulle.

S5- 13. Oscillateur en dynamique d'Einstein

1. En dynamique newtonienne, l'équation différentielle du mouvement s'obtient aisément à partir de l'énergie, puisque la seule force dérive de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p = Kx^2/2$:

$$\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p = \text{Cte} \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_k = \frac{mv^2}{2} \quad \text{d'où} \quad \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{Kx^2}{2} = \text{Cte}$$

En dérivant par rapport au temps, on trouve :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \left(\frac{K}{m}\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

La solution est :

$$x = C \cos(\omega_0 t + \phi) \quad \text{soit} \quad x = A \cos(\omega_0 t)$$

compte tenu des conditions particulières : $\dot{x} = 0 = -\omega_0 C \sin \phi$, c'est-à-dire $\phi = 0$ et $x_M = C = A$. La somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de l'oscillateur est donc :

$$\frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \sin^2(\omega_0 t) + \frac{KA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t) = \frac{KA^2}{2}$$

2. En dynamique d'Einstein, le théorème de l'énergie donne :

$$(\gamma - 1)mc^2 + mc^2 + \frac{Kx^2}{2} = 0 + mc^2 + \frac{KA^2}{2} \quad \text{d'où} \quad \gamma = 1 + \frac{K(A^2 - x^2)}{2mc^2}$$

On en déduit v :

$$v = c \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right)^{1/2} = c \left\{ 1 - \frac{1}{[1 + K(A^2 - x^2)/(2mc^2)]^2} \right\}^{1/2}$$

3. Si l'on introduit θ , on trouve :

$$v = c \left\{ 1 - \frac{1}{[1 + KA^2 \sin^2 \theta / (2mc^2)]^2} \right\}^{1/2} = c \frac{[KA^2 \sin^2 \theta / (mc^2)][1 + KA^2 \sin^2 \theta / (4mc^2)]^{1/2}}{1 + KA^2 \sin^2 \theta / (2mc^2)}$$

Or :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -A \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

On a donc, en tenant compte du signe des variations de $\dot{x}$ et $\dot{\theta}$:

$$A \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = c \frac{K^{1/2} A \sin \theta / (mc^2)^{1/2} [1 + KA^2 \sin^2 \theta / (4mc^2)]^{1/2}}{1 + KA^2 \sin^2 \theta / (2mc^2)}$$

On en déduit :

$$dt = \frac{1}{\omega_0} \frac{1 + KA^2 \sin^2 \theta / (2mc^2)}{[1 + KA^2 \sin^2 \theta / (4mc^2)]} d\theta \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \left(\frac{K}{m} \right)^{1/2}$$

En intégrant entre 0 et $\pi/2$, on trouve la période :

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} \frac{1 + KA^2 \sin^2 \theta / (2mc^2)}{[1 + KA^2 \sin^2 \theta / (4mc^2)]} d\theta$$

Par conséquent, le facteur α vaut :

$$\alpha = \frac{KA^2}{4mc^2} = 0,5 \quad \text{puisque} \quad \frac{KA^2}{2} = mc^2$$

Notons qu'en faisant c infini, $\alpha = 0$, d'où la période $T_0 = 2\pi/\omega_0$ de l'oscillateur harmonique newtonien.

Chapitre 6

S6- 1. Accélération d'une particule dans un champ électromagnétique

1. La loi fondamentale de la dynamique einsteinienne, appliquée à une particule chargée (masse m , charge q) dans un champ électromagnétique, donne :

$$\frac{d(\gamma m \mathbf{v})}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \text{avec} \quad \frac{d(\gamma m \mathbf{v})}{dt} = m\gamma \mathbf{a} + \mathbf{v} \frac{d(\gamma m)}{dt} = m\gamma \mathbf{a} + \frac{\mathbf{v}}{c^2} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = m\gamma \mathbf{a} + \frac{\mathbf{v}}{c^2} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})$$

Par conséquent :

$$\mathbf{a} = \frac{q}{\gamma m} \left[(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{\mathbf{v}}{c^2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) \right] \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{q}{m}$$

2. i) Pour $\mathbf{E} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{a} = \frac{q}{\gamma m} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

C'est le résultat bien connu de l'accélération d'une particule plongée dans un champ magnétique.

ii) Pour $\mathbf{B} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{a} = \frac{q}{\gamma m} \left[\mathbf{E} - \frac{\mathbf{v}}{c^2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) \right]$$

Si, en outre, $\mathbf{E}$ et $\mathbf{v}$ sont parallèles, on retrouve :

$$\mathbf{a} = \frac{q}{\gamma m} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \mathbf{E} = \frac{q}{\gamma^3 m} \mathbf{E}$$

iii) Si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, alors :

$$\mathbf{a} = \frac{q}{\gamma m} \mathbf{E}$$

iv) Si $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, alors :

$$\mathbf{a} = \frac{q}{\gamma m} \left(\frac{-\mathbf{v}}{c^2} \right) (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

puisque $\mathbf{v}$ est perpendiculaire à $\mathbf{E}$.

S6– 2. Indice en optique électronique

1. On a $p = \gamma \beta mc$ avec $\gamma = 1 + eV_a/(mc^2)$ et $\beta = (1 - 1/\gamma^2)^{1/2}$. Par conséquent :

$$v = c \left\{ 1 - \frac{1}{[1 + eV_a/(mc^2)]^2} \right\}^{1/2} = c \frac{\left\{ [1 + eV_a/(mc^2)]^2 - 1 \right\}^{1/2}}{1 + 2\varepsilon V_a} = \left(\frac{2eV_a}{m} \right)^{1/2} \frac{(1 + \varepsilon V_a)^{1/2}}{1 + 2\varepsilon V_a}$$

2. Exprimons la quantité de mouvement p qui peut jouer le rôle d'indice en optique corpusculaire :

$$p = (\gamma^2 - 1)^{1/2} mc = \left[\frac{2eV_a}{mc^2} + \left(\frac{eV_a}{mc^2} \right)^2 \right]^{1/2} mc = (2meV_a)^{1/2} \left(1 + \frac{eV_a}{2mc^2} \right)^{1/2} = (2meV_a)^{1/2} (1 + \varepsilon V_a)^{1/2}$$

Dans l'approximation newtonienne $eV_a \ll mc^2$. Donc, p est proportionnel à $V_a^{1/2}$. Plus généralement p est proportionnel à $V_a^{*1/2}$ avec $V_a^* = V_a(1 + \varepsilon V_a)$.

V_a (MV)	0,1	1	3
V_a^* (MV)	0,11	1,98	11,8

S6– 3. Particule dans un champ électrique constant

1. L'équation $d\mathbf{p}/dt = q\mathbf{E}$, avec $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$, donne :

$$\dot{p}_x = 0 \quad \text{et} \quad \dot{p}_y = qE \quad \text{d'où} \quad p_x = \text{Cte} = p_{i,x} \quad \text{et} \quad p_y = qEt + p_{i,y} = qEt$$

Pour obtenir $\mathbf{v}$, il faut utiliser la relation :

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}c^2}{\mathcal{E}} = \frac{\mathbf{p}c^2}{(m^2c^4 + p^2c^2)^{1/2}} = \frac{\mathbf{p}c^2}{(\gamma_i^2 m^2 c^4 + q^2 E^2 c^2 t^2)^{1/2}}$$

Il vient, en explicitant et en posant $\tau = \gamma_i mc/(qE)$:

$$\dot{x} = \frac{\gamma_i m v_i c^2}{(\gamma_i^2 m^2 c^4 + q^2 E^2 c^2 t^2)^{1/2}} = \frac{v_0}{(1 + t^2/\tau^2)^{1/2}} \quad \text{et} \quad \dot{y} = \frac{qEt c^2}{(\gamma_i^2 m^2 c^4 + q^2 E^2 c^2 t^2)^{1/2}} = \frac{ct}{\tau(1 + t^2/\tau^2)^{1/2}}$$

L'intégration donne :

$$x = v_i \tau \arg \sinh \left(\frac{t}{\tau} \right) \quad y = c\tau \left[\left(1 + \frac{t^2}{\tau^2} \right)^{1/2} - 1 \right]$$

En éliminant t , on obtient l'équation de la trajectoire qui est celle d'une chaînette :

$$y = c\tau \left[\cosh \left(\frac{x}{v_i \tau} \right) - 1 \right]$$

2. Si $v_i = 0$, alors $\gamma_i = 1$ et $\tau = mc/(qE)$. Alors $x = 0$ et $y(t) = c\tau \left[(1 + t^2/\tau^2)^{1/2} - 1 \right]$.

3. D'après la conservation de l'énergie, on a $\mathcal{E}_k = (\gamma - 1)mc^2 = -qV$, d'où $qV < 0$:

$$V > 0 \quad \text{si} \quad q < 0 \quad \text{et} \quad V < 0 \quad \text{si} \quad q > 0$$

Il en résulte, puisque $\mathcal{E}_k = 4 \text{ MeV}$, $\gamma = 1 + \mathcal{E}_k/(mc^2)$ et $v = c(1 - 1/\gamma^2)^{1/2}$:

$$\gamma_{e-} = 8,83 \quad \gamma_{p+} = 1,004 \quad v_{e-} = 0,994 c \quad \text{et} \quad v_{p+} = 0,089 c$$

Comme $y = c\tau \left[(1 + t^2/\tau^2)^{1/2} - 1 \right]$, on a, entre d et θ la relation :

$$\frac{d}{c\tau} = \left(1 + \frac{\theta^2}{\tau^2} \right)^{1/2} - 1 \quad \text{d'où} \quad \theta = \tau \left[\left(1 + \frac{d}{c\tau} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}$$

Comme $\tau = mc/(qE)$, on trouve :

$$\tau_{e-} = 0,17 \text{ ns} \quad \tau_{p+} = 313 \text{ ns} \quad \theta_{e-} = 1,49 \text{ ns} \quad \text{et} \quad \theta_{p+} = 28,9 \text{ ns}$$

L'électron est einsteinien alors que le proton est newtonien.

S6- 4. Électron freiné par un champ électrique

1. L'équation vectorielle du mouvement donne en projetant :

$$\begin{cases} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y = -e \begin{vmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \\ \dot{p}_z \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \dot{p}_x = -eE \\ \dot{p}_y = 0 \\ \dot{p}_z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} p_x = -eEt + p_i \\ p_y = \text{Cte} = 0 \\ p_z = \text{Cte} = 0 \end{cases}$$

Ainsi la trajectoire est rectiligne et l'équation différentielle du mouvement est, puisque $\mathbf{v} = \mathbf{p}/(\gamma mc^2)$:

$$\dot{x} = c^2 \frac{-eEt + p_i}{[m^2 c^4 + (-eEt + p_i)^2 c^2]^{1/2}} = \frac{(-eEt + p_i)/m}{[1 + (-eEt + p_i)^2/(mc)^2]^{1/2}} c$$

L'électron rebrousse chemin au bout de la durée t_1 telle que $\dot{x} = -eEt_1 + p_i = 0$, soit :

$$t_1 = \frac{p_i}{eE} = \frac{10^6/c}{10^4} = 0,33 \mu\text{s}$$

2. On trouve $x(t)$ en intégrant, une fois posé :

$$w = 1 + \frac{(-eEt + p_i)^2}{m^2 c^2} \quad \text{et donc} \quad dw = -2 \frac{(-eEt + p_i)eE}{m^2 c^2} dt$$

Il vient, en substituant :

$$x = -\frac{mc^2}{2eE} \int \frac{dw}{2w^{1/2}} = -\frac{mc^2}{eE} w^{1/2} + \text{Cte} = -\frac{mc^2}{eE} \left[1 + \frac{(-eEt + p_i)^2}{m^2 c^2} \right]^{1/2} + \text{Cte}$$

En tenant compte des conditions initiales ($x = 0$ à $t = 0$), on trouve :

$$x(t) = \frac{mc^2}{eE} \left\{ \left(1 + \frac{p_i^2}{m^2 c^2} \right)^{1/2} - \left[1 + \frac{(-eEt + p_i)^2}{m^2 c^2} \right]^{1/2} \right\}$$

On en déduit :

$$x_1(t) = \frac{mc^2}{eE} \left(1 + \frac{p_i^2}{m^2 c^2} \right)^{1/2} = \frac{0,511 \times 10^6}{10^4} \left(1 + \frac{1}{0,511^2} \right)^{1/2} = 247 \text{ m}$$

3. L'énergie γmc^2 de l'électron est :

$$\mathcal{E}(t) = [(p_i - eEt)^2 + m^2 c^4]^{1/2}$$

À l'instant initial et à l'instant t_1 , les énergies valent respectivement :

$$\mathcal{E}(0) = \mathcal{E}_i = [p_i^2 + m^2 c^4]^{1/2} = 1,123 \text{ MeV} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}(t_1) = mc^2 = 0,511 \text{ MeV}$$

S6– 5. Proton dans un champ électrique faisant l'angle α_i avec sa vitesse initiale

1. Les équations différentielles en p du mouvement de la particule s'obtiennent en projetant la relation vectorielle :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} \quad \text{s'écrit selon} \quad \begin{cases} \dot{p}_x = eE \\ \dot{p}_y = 0 \\ \dot{p}_z = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \dot{p}_x = eE \\ \dot{p}_y = 0 \\ \dot{p}_z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} p_x = eEt + p_{i,x} \\ p_y = \text{Cte} = p_{i,y} \\ p_z = \text{Cte} = p_{i,z} = 0 \end{cases}$$

La trajectoire est donc contenue dans le plan formé par $\mathbf{E}$ et $\mathbf{v}_i$. Comme $\mathbf{v} = \mathbf{p}/(\gamma m_p) = \mathbf{p}c^2/(m_p^2 c^4 + p^2 c^2)^{1/2}$, il vient :

$$v_x = \frac{(eEt + p_{i,x})c^2}{[m_p^2 c^4 + c^2 (eEt + p_{i,x})^2 + c^2 p_{i,y}^2]^{1/2}} \quad \text{et} \quad v_y = \frac{p_{i,y} c^2}{[m_p^2 c^4 + c^2 (eEt + p_{i,x})^2 + c^2 p_{i,y}^2]^{1/2}}$$

2. Afin d'intégrer les équations précédentes, posons $\mu = c(eEt + p_{i,x})$. Il vient :

$$x = \int \frac{eEt + p_{i,x} c^2}{[m_p^2 c^4 + (eEt + p_{i,x})^2 c^2 + p_{i,y}^2 c^2]^{1/2}} dt = \frac{1}{eE} \int \frac{\mu}{(m_p^2 c^4 + p_{i,y}^2 c^2 + \mu^2)^{1/2}} d\mu$$

soit :

$$x = \frac{1}{eE} \left(m_p^2 c^4 + p_{i,y}^2 c^2 + \mu^2 \right)^{1/2} + \text{Cte}$$

Comme $x = 0$ à $t = 0$:

$$x = \frac{1}{eE} \left\{ \left[m_p^2 c^4 + p_{i,y}^2 c^2 + (eEt + p_{i,x})^2 c^2 \right]^{1/2} - \left(m_p^2 c^4 + p_{i,y}^2 c^2 \right)^{1/2} \right\}$$

De façon analogue, on a pour y :

$$y = \int \frac{p_{i,y} c^2}{[m_p^2 c^4 + (eEt + p_{i,x})^2 c^2 + p_{i,y}^2 c^2]^{1/2}} dt = \int \frac{p_{i,y} c}{(m_p^2 c^4 + p_{i,y}^2 c^2 + \mu^2)^{1/2}} d\mu$$

ce qui donne :

$$y = \frac{p_{i,y} c}{eE} \arg \sinh \left(\frac{\mu}{m_p^2 c^4 + p_{i,y}^2 c^2} \right)^{1/2} + \text{Cte}$$

Comme $y = 0$ à $t = 0$:

$$y = \frac{p_{i,y} c}{eE} \left\{ \arg \sinh \left[\frac{(eEt + p_{i,x})c}{m_p^2 c^4 + p_{i,y}^2 c^2} \right]^{1/2} - \arg \sinh \left(\frac{p_{i,y} c}{m_p^2 c^4 + p_{i,y}^2 c^2} \right)^{1/2} \right\}$$

3. Dans l'approximation newtonienne, les équations horaires deviennent, puisque $m\mu^2$ est très grand devant tous les autres termes énergétiques :

$$x = \frac{m_p c^2}{E} \left\{ \left[1 + \frac{p_{i,y}^2 c^2 + (eEt + p_{i,x})^2 c^2}{2m_p^2 c^4} \right]^{1/2} - \left(1 + \frac{p_i^2 c^2}{2m_p^2 c^4} \right)^{1/2} \right\} \approx \frac{m_p c^2}{eE} \left[\frac{p_{i,y}^2 + (eEt + p_{i,x})^2}{2m_p^2 c^2} - \frac{p_i^2}{2m_p^2 c^2} \right]$$

soit :

$$x = \frac{(eEt)^2 + 2(eEt)p_{i,x}}{2m_p eE} = \frac{eE}{2m_p} t^2 + \frac{p_{i,x}}{m_p} t$$

Quant à y , il se réduit selon :

$$y \approx \frac{p_{i,y} c}{eE} \left[\frac{(eEt + p_{i,x})c}{m_p c^2} - \frac{p_{i,x} c}{m_p c^2} \right] = \frac{p_{i,y}}{m_p eE} eEt = \frac{p_{i,y}}{m_p} t$$

S6- 6. Rigidité magnétique dans le cas d'électrons rapides

1. Le produit BR a pour expression, dans le cas d'électrons :

$$BR = \frac{p}{e} = \frac{\gamma \beta m_e c}{e} = (\gamma^2 - 1)^{1/2} \frac{0,511 \times 10^6}{3 \times 10^8} = 1,705 \times 10^{-3} (\gamma^2 - 1)^{1/2} \text{ T} \cdot \text{m}$$

soit, en introduisant le millitesla (mT) :

$$BR = 1,705 (\gamma^2 - 1)^{1/2} \text{ mT} \cdot \text{m}$$

2. Comme $\gamma = 1 + V_a / (m_e c^2)$, il vient, respectivement :

$$BR = 0,6555 \times 1,705 = 1,118 \quad BR = 2,783 \times 1,705 = 4,745 \quad BR = 6,8 \times 1,705 = 11,59$$

Pour $V_a = 200 \text{ kV}$ et $R = 8 \text{ cm}$, on a :

$$B = 1,705 \frac{(\gamma^2 - 1)^{1/2}}{0,08} \approx 12,4 \text{ mT}$$

S6- 7. Rayon de la trajectoire d'un deuton dans un champ magnétique

Le rayon R de la trajectoire circulaire décrit par le deuton est :

$$R = \frac{\gamma \beta m_d c}{eB} = \frac{1,34 \times 0,667 \times 1875,56 \times 10^6}{3 \times 10^8 \times 1,65} = 3,39 \text{ m} \quad \text{car} \quad \beta = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = 1,34$$

On en déduit :

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi \times 3,39}{2 \times 10^8} = 0,1 \mu\text{s}$$

S6- 8. Filtrage magnétique des mésons K

1. On sait que B et R sont reliés par l'équation :

$$R = \frac{p}{eB} = \frac{\gamma \beta m_K c}{eB} = (\gamma^2 - 1)^{1/2} \frac{m_K c}{eB} \quad \text{d'où} \quad \gamma^2 = 1 + \left(\frac{eBRc}{m_K c^2} \right)^2 \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{eRc} (\varepsilon^2 - m_K^2 c^4)^{1/2}$$

On en déduit le facteur relativiste γ et l'énergie cinétique :

$$\gamma = 3,19 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_k = (\gamma - 1)m_K c^2 = 1084 \text{ MeV}$$

Le champ magnétique est dirigé vers l'arrière de la figure 6.16.

2. a) Comme $t = \gamma t_p$, il vient, en remplaçant :

$$N(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\gamma \tau_p}\right) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{avec} \quad \tau = \gamma \tau_p = 3,19 \times 12,3 = 39,2 \text{ ns}$$

b) La durée du parcours des mésons de la sortie du filtre au détecteur est :

$$t_K = \frac{d}{v} = \frac{2,5}{c\beta} = 8,77 \text{ ns} \quad \text{car} \quad \beta = \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)^{1/2} = 0,95$$

Par conséquent :

$$\frac{N(D)}{N(S)} = \frac{A \exp[-(t_S + t_K)/\tau]}{A \exp(-t_S/\tau)} = \exp\left(-\frac{t_K}{\tau}\right) \approx 0,8$$

S6-9. Action simultanée d'un champ électrique et d'un champ magnétique

1. La loi fondamentale du mouvement einsteinien de l'électron, $d\mathbf{p}/dt = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, s'explique selon :

$$\begin{vmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{vmatrix} = -e \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{vmatrix} - e \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{vmatrix} \quad \text{soit} \quad \begin{matrix} \dot{p}_x = -eB\dot{y} & (1) \\ \dot{p}_y = eB\dot{x} & (2) \\ \dot{p}_z = -eE & (3) \end{matrix}$$

De la troisième équation, on déduit : $p_z = -eEt + \text{Cte} = -eEt$, compte tenu des conditions initiales.

2. Comme $\mathbf{v} = \mathbf{p}c^2/\mathcal{E}$ où $\mathcal{E} = \gamma m_e c^2$, les deux premières équations différentielles se mettent sous la forme :

$$\dot{p}_x = -\frac{eBc^2}{\mathcal{E}} p_y \quad \text{et} \quad \dot{p}_y = \frac{eBc^2}{\mathcal{E}} p_x$$

On en déduit :

$$p_x \dot{p}_x + p_y \dot{p}_y = 0 \quad \text{ce qui donne en intégrant} \quad p_x^2 + p_y^2 = \text{Cte} = p_0^2$$

3. Tenant compte de $\mathcal{E}^2 = p^2 c^2 + m_e^2 c^4$, il vient :

$$\mathcal{E}^2 = p_0^2 c^2 + e^2 E^2 t^2 c^2 + m_e^2 c^4 = \mathcal{E}^2(0) + e^2 E^2 c^2 t^2$$

d'où :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(0) \left[1 + \left(\frac{eEc}{\mathcal{E}_0} \right)^2 t^2 \right]^{1/2} = \mathcal{E}(0) \left[1 + \sinh^2 \left(\frac{E\theta}{Bc} \right) \right]^{1/2} = \mathcal{E}(0) \cosh \left(\frac{E\theta}{Bc} \right)$$

Application numérique : à l'instant considéré $t = \mathcal{E}(0)/e c E$, on a :

$$t = \frac{\mathcal{E}(0)}{e c E} = 0,17 \text{ ns} \quad \text{d'où} \quad \sinh(2\theta) = 1 \quad \text{et} \quad \theta = 0,44$$

4. En différenciant l'équation de définition de θ , on obtient :

$$\left(\frac{E}{Bc} \right) \cosh \left(\frac{E\theta}{Bc} \right) d\theta = \frac{eEc}{\mathcal{E}_0} dt \quad \text{d'où} \quad \frac{dt}{d\theta} = \frac{\mathcal{E}_0}{eBc^2} \cosh \left(\frac{E\theta}{Bc} \right)$$

Par conséquent :

$$\frac{dp_x}{d\theta} = \frac{dp_x}{dt} \frac{dt}{d\theta} = -\frac{eBc^2}{\mathcal{E}} p_y \frac{\mathcal{E}_0}{eBc^2} \cosh \left(\frac{E\theta}{Bc} \right) = -p_y$$

De même :

$$\frac{dp_y}{d\theta} = \frac{dp_y}{dt} \frac{dt}{d\theta} = p_x$$

Il en résulte, en dérivant ces deux équations par rapport à θ :

$$\frac{d^2 p_x}{d\theta^2} = -\frac{dp_y}{d\theta} = -p_x \quad \text{d'où} \quad p_x = A \cos(\theta + \phi)$$

Or, lorsque $\theta = 0$, $p_x = p_0$ et $dp_x/d\theta = 0$. Par conséquent, $p_0 = A \cos \phi$ et $0 = -A \sin \phi$. On en déduit $\phi = 0$, ce qui donne en intégrant et en tenant compte des conditions initiales sur p_y :

$$p_x = p_0 \cos \theta \quad \text{et} \quad p_y = -p_0 \sin \theta$$

5. On trouve la vitesse en fonction de θ , à l'aide de la relation $\mathbf{v} = \mathbf{p}c^2/\mathcal{E}$:

$$\dot{x} = \frac{p_x c^2}{\mathcal{E}} = \frac{p_0 c^2 \cos \theta}{\mathcal{E}_0 \cosh[E\theta/(Bc)]} \quad \text{d'où} \quad \frac{dx}{d\theta} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \frac{p_0 \cos \theta}{eB}$$

En intégrant, on obtient $x(\theta)$:

$$x = \int \frac{p_0 \cos \theta}{eB} d\theta = \frac{p_0 \sin \theta}{eB}$$

compte tenu des conditions initiales. De même :

$$\dot{y} = \frac{p_y c^2}{\mathcal{E}} = -\frac{p_0 c^2 \sin \theta}{\mathcal{E}_0 \cosh[E\theta/(Bc)]} \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{d\theta} = -\frac{p_0 \sin \theta}{eB}$$

ce qui donne, en intégrant, compte tenu des conditions initiales :

$$y = -\int \frac{p_0 \sin \theta}{eB} d\theta = \frac{p_0 \cos \theta}{eB}$$

6. Appliquons le théorème de l'énergie :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = -eE\dot{z} \quad \text{soit aussi} \quad \frac{d\mathcal{E}}{d\theta} = -eE \frac{dz}{d\theta}$$

Il vient en intégrant :

$$z = -\frac{\mathcal{E}}{eE} + \text{Cte} \quad \text{soit} \quad z = -\frac{\mathcal{E}_0}{eE} \cosh\left(\frac{E\theta}{Bc}\right) + \text{Cte} = -\frac{\mathcal{E}_0}{eE} \left[\cosh\left(\frac{E\theta}{Bc}\right) - 1 \right]$$

en tenant compte des conditions initiales. Ainsi la trajectoire est une hélice, comme en mécanique newtonienne ; seul le pas est différent.

S6– 10. Synchrotron à protons Saturne de Saclay

1. Pour un proton en mouvement dans un champ magnétique, on a :

$$\frac{\gamma m_p v^2}{R} = evB \quad \text{soit} \quad BR = \frac{\gamma m_p v}{e} = \frac{\gamma \beta m_p c}{e} = (\gamma^2 - 1)^{1/2} \frac{m_p c}{e}$$

Comme $\mathcal{E}_k = (\gamma - 1)m_p c^2$, il vient :

$$BR = \frac{m_p c}{e} \left[\left(\frac{\mathcal{E}_k}{m_p c^2} + 1 \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \quad \text{soit} \quad BR = \frac{m_p c}{e} \left[\left(\frac{\mathcal{E}_k}{m_p c^2} \right)^2 + \frac{2\mathcal{E}_k}{m_p c^2} \right]^{1/2}$$

2. La fréquence f du champ électrique est telle que :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi R} = \frac{\beta c}{2\pi R} = \frac{c}{2\pi R \gamma} (\gamma^2 - 1)^{1/2} = \frac{c}{2\pi R} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right)^{1/2}$$

Lorsque γ augmente, f tend vers $f_0 = c/(2\pi R) = 5,67 \text{ MHz}$; B et f doivent varier de telle sorte que :

$$\frac{c(\gamma^2 - 1)^{1/2}}{R} = \gamma 2\pi f = \gamma \omega \quad \text{soit} \quad f = \frac{eB}{2\pi \gamma m_p}$$

3. La relation entre B et γ est :

$$B = (\gamma^2 - 1)^{1/2} \frac{m_p c}{eR} = 0,371(\gamma^2 - 1)^{1/2} \text{ T}$$

Par conséquent :

i) Pour $\mathcal{E}_{k,1} = 3,6 \text{ MeV}$, $\gamma_1 = 1,00384$ et $B_1 = 0,0326 \text{ T}$ soit $32,6 \text{ mT}$.

ii) Pour $\mathcal{E}_{k,2} = 2,9 \text{ GeV}$, $\gamma_2 = 4,09167$ et $B_2 = 1,47 \text{ T}$.

4. Établissons la relation entre f , f_0 et B :

$$f = f_0 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)^{1/2} \quad \text{o} \quad \gamma^2 = 1 + \left(\frac{eBR}{mc}\right)^2 = 1 + \left(\frac{B}{B_0}\right)^2 \quad \text{avec} \quad B_0 = \frac{mc}{eR}$$

Donc :

$$f = f_0 \left(1 - \frac{1}{1 + B^2/B_0^2}\right)^{1/2} = f_0 \left(\frac{B^2/B_0^2}{1 + B^2/B_0^2}\right)^{1/2} = f_0 \frac{1}{(1 + B_0^2/B^2)^{1/2}}$$

S6– 11. Supersynchrotron à protons du CERN

1. On sait que la quantité de mouvement des protons est reliée au champ magnétique B par l'équation :

$$B = \frac{p}{eR} = \frac{\gamma\beta m_p c}{eR} = \frac{(\gamma^2 - 1)^{1/2} m_p c}{eR} = \frac{x^{1/2}(x+2)^{1/2} m_p c}{eR} \quad \text{puisque} \quad \gamma = 1 + \frac{\mathcal{E}_k}{m_p c^2} = 1 + x$$

Quant à la pulsation cyclotron et à la fréquence correspondante, elles s'écrivent respectivement :

$$\omega_c = \frac{eB}{\gamma m_p} = \frac{\beta c}{R} = \frac{c}{R} \frac{x^{1/2}(2+x)^{1/2}}{1+x} \quad \text{et} \quad f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{c}{2\pi R} \frac{x^{1/2}(2+x)^{1/2}}{1+x}$$

puisque :

$$\beta = \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)^{1/2} = \left[1 - \frac{1}{(1+x)^2}\right]^{1/2} = \frac{x^{1/2}(2+x)^{1/2}}{1+x}$$

2. Initialement, $\mathcal{E}_{k,i} = 28 \text{ GeV}$. Par conséquent :

$$\gamma_i = 30,84 \quad x_i = 29,84 \quad B_i = \frac{x_i^{1/2}(x_i+2)^{1/2} m_p c}{eR} = 86 \text{ mT} \quad \text{et} \quad f_{c,i} = 43,38 \text{ kHz}$$

Pour $B = B_f = 1,36 \text{ T}$, on a :

$$\frac{B_f eR}{m_p c} = x_f^{1/2} (x_f + 2)^{1/2} \quad \text{d'où} \quad x_f^2 + 2x_f - 478^2 = 0 \quad \text{et} \quad x_f \approx 478$$

Il en résulte que :

$$\mathcal{E}_{k,f} = x_f m_p c^2 = 450 \text{ GeV} \quad \text{et} \quad f_{c,f} = 43,32 \text{ kHz}$$

3. Lorsque la particule acquiert une énergie supplémentaire $\Delta\mathcal{E}$, faible devant son énergie, la variation correspondante de B s'obtient en différenciant l'expression de B par rapport à x :

$$dB = \frac{m_p c}{eR} \frac{1}{2} \left\{ \frac{2+x+x}{[x(2+x)]^{1/2}} \right\} dx = \frac{m_p c}{eR} \frac{1+x}{[x(2+x)]^{1/2}} dx$$

Comme $d\mathcal{E} = m_p c^2 dx$, il vient :

$$\Delta B = \frac{\Delta\mathcal{E}}{eRc} \frac{1+x}{[x(2+x)]^{1/2}}$$

Applications :

$$\Delta B_{30} = \frac{5 \times 10^4}{1100 \times 3 \times 10^8} \frac{1+30}{[30(2+30)]^{1/2}} = 152 \text{ nT} \quad \text{et} \quad \Delta B_{500} = \frac{5 \times 10^4}{1100 \times 3 \times 10^8} \frac{1+500}{[500(2+500)]^{1/2}} = 151,5 \text{ nT}$$

S6– 12. Effet de charge d'espace dans le référentiel propre des particules

1. En appliquant le théorème de Gauss dans $\mathcal{R}'$, à travers un cylindre coaxial de rayon $r < R$ et de longueur l , on trouve :

$$2\pi r l E' = \frac{\rho_0 \pi r^2 l}{\varepsilon_0} \quad \text{d'où} \quad \mathbf{E}' = \rho_0 \frac{\mathbf{r}}{2\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \mathbf{F}' = q\mathbf{E}' = \frac{q\rho_0}{2\varepsilon_0} \mathbf{R}$$

2. D'après la loi fondamentale de la mécanique dans $\mathcal{R}'$, on a, dans l'approximation newtonienne, qui est valable dans $\mathcal{R}'$:

$$m\ddot{R} = \frac{q\rho_0}{2\varepsilon_0} R \quad \text{soit} \quad \ddot{R} - \alpha^2 R = 0 \quad \text{avec} \quad \alpha^2 = \frac{q\rho_0}{2\varepsilon_0 m} > 0$$

La solution est, compte tenu des conditions initiales, à $t' = 0$, $R = R_0$ et $dR/dt = 0$:

$$R = R_0 \cosh(\alpha t') \quad \text{d'où} \quad \frac{\Delta R}{R_0} = \cosh(\alpha t') - 1 \approx \frac{\alpha^2 t'^2}{2} = \frac{q\rho_0}{4\varepsilon_0 m} t'^2$$

3. Dans $\mathcal{R}$, $t = \gamma_e t'$ puisque $\mathcal{R}'$ est référentiel propre. Donc :

$$\frac{\Delta R}{R_0} = \frac{q\rho_0}{4\varepsilon_0 m} \frac{t^2}{\gamma_e^2} = \frac{q\rho_0 x^2}{4\varepsilon_0 m c^2 \gamma_e^2 \beta_e^2} = \frac{q\rho_0 x^2}{4\varepsilon_0 m c^2 (\gamma_e^2 - 1)}$$

puisque $x = ut = \beta_e ct$.

S6– 13. Effet de charge d'espace dans le référentiel du laboratoire

1. Pour des raisons d'invariance et de symétrie (cf. *Électromagnétisme*), on a :

$$\mathbf{E} = E(r) \mathbf{e}_r \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = B(r) \mathbf{e}_\varphi$$

Calculons $\mathbf{E}$ pour $r \leq R$, à l'aide du théorème de Gauss :

$$2\pi r l E = \frac{\rho \pi r^2 l}{\varepsilon_0} \quad \text{d'où} \quad \mathbf{E}(r) = \frac{\rho \mathbf{r}}{2\varepsilon_0}$$

On obtient le champ magnétique à l'aide du théorème d'Ampère pour $r \leq R$. Le contour d'intégration est un cercle de rayon r centré sur l'axe du faisceau situé dans un plan perpendiculaire à l'axe. Par conséquent :

$$2\pi r B = \mu_0 I \quad \text{avec} \quad I = \rho u \pi r^2 \quad \text{d'où} \quad \mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 \rho u r}{2} \mathbf{e}_\varphi$$

2. Une des particules du faisceau située à sa périphérie subit de la part des autres, dans $\mathcal{R}$, la force électromagnétique $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$. Par conséquent :

$$\mathbf{F} = q \left(\frac{\rho}{2\varepsilon_0} - \frac{\mu_0 \rho u^2}{2} \right) \mathbf{R} = \frac{q\rho R}{2\varepsilon_0} (1 - \beta_e^2) \mathbf{e}_r = \frac{q\rho R}{2\varepsilon_0 \gamma_e^2} \mathbf{e}_r$$

Comme on a la relation suivante entre les forces dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$: $\gamma F_\perp = \gamma' F'_\perp$, il vient $\gamma_e F = F'$, soit :

$$\frac{q\rho R}{2\varepsilon_0 \gamma_e} = \frac{q\rho_0 R}{2\varepsilon_0} \quad \text{d'où} \quad \rho = \gamma_e \rho_0$$

3. La loi fondamentale de la dynamique einsteinienne, appliquée au mouvement de la particule, par rapport à $\mathcal{R}$, donne :

$$\frac{d(\gamma m \mathbf{v})}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \text{soit} \quad \gamma m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + m \mathbf{v} \frac{d\gamma}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

avec :

$$\mathbf{E} = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} \mathbf{e}_r \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 \rho v r}{2} \mathbf{e}_\varphi$$

Projetons la loi fondamentale suivant $\mathbf{e}_r$:

$$\gamma m a_r = q \left(\frac{\rho r}{2\varepsilon_0} - \frac{\mu_0 \rho r v^2}{2} \right) = \frac{q \rho r}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \quad \text{d'où} \quad a_r = \frac{q \rho r}{2m\varepsilon_0 \gamma^3}$$

Il en résulte que, pour une particule située initialement à la périphérie du faisceau, on a :

$$\frac{d^2 R}{dt^2} - \alpha^2 R = 0 \quad \text{avec} \quad \alpha^2 = \frac{q \rho}{2m\varepsilon_0 \gamma^3}$$

La solution de cette équation est $R = R_0 \cosh(\alpha t)$. Par conséquent, en développant au voisinage de R_0 , on obtient :

$$R \approx R_0 \left(1 + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right) \quad \text{d'où} \quad \frac{\Delta R}{R_0} = \frac{q \rho t^2}{4m\varepsilon_0 \gamma_e^3} = \frac{q \rho x^2}{4m\varepsilon_0 c^2 \gamma_e^3 \beta_e^2}$$

Comme $\mathcal{E}_k = (\gamma_e - 1)mc^2 = eV$ avec $\gamma_e = 1 + eV/(mc^2)$ et $I = \rho u \pi R_0^2$, on trouve :

$$\frac{\Delta R}{R_0} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{I}{mc^3} \left(\frac{L}{R_0} \right)^2 \frac{1}{(\gamma_e^2 - 1)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ec}{mc^2} \left(\frac{L}{R_0} \right)^2 \frac{1}{(\gamma_e^2 - 1)^{3/2}}$$

A.N. Si $V = 0,1 \text{ MV}$, $(\gamma_e^2 - 1)^{3/2} = 0,282$ et $\Delta R/R_0 = 0,52$.

Si $V = 1 \text{ MV}$, $(\gamma_e^2 - 1)^{3/2} = 21,55$ et $\Delta R/R_0 = 0,0068$.

4. $\Delta R/R_0$ a même valeur dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, car les distances transversales ne sont pas affectées par la contraction des longueurs. Précisons :

$$\frac{\Delta R}{R_0} = \frac{q \rho x^2}{4m\varepsilon_0 c^2 \gamma_e^3 \beta_e^2} = \frac{q \rho_0 x^2}{4m\varepsilon_0 c^2 (\gamma_e^2 - 1)} \quad \text{puisque} \quad \rho = \gamma_e \rho_0 \quad \text{et} \quad \gamma_e^2 \beta_e^2 = \gamma_e^2 - 1$$

S6– 14. Rayonnement d'une particule chargée accélérée par un champ électrique

1. Le mouvement étant rectiligne suivant le champ électrique ($\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$), l'expression donnée de la puissance rayonnée se réduit à :

$$\mathcal{P}_r = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \gamma^6 a^2$$

En outre, on sait que dans un tel cas de mouvement rectiligne la loi fondamentale de la dynamique einsteinienne se réduit à (cf. chapitre 5) : $\gamma^3 m \mathbf{a} = q \mathbf{E}$. Il en résulte :

$$\mathcal{P}_r = \frac{q^4 E^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m^2}$$

2. La puissance fournie par le champ $\mathbf{E}$ est $\mathcal{P}_f = q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = q E v$. Par conséquent :

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_r}{\mathcal{P}_f} = \frac{q^3}{6\pi\varepsilon_0 m^2 c^4} \frac{E}{\beta} \approx 4 \times 10^{-16} \frac{E}{\beta} \ll 1 \quad \text{même pour} \quad \beta \approx 1$$

3. Dans un champ magnétique $\mathbf{B}$, la norme v de la vitesse et donc γ sont des constantes. L'accélération étant centripète, comme en dynamique newtonienne, on a : $d\mathbf{v}/dt = (v^2/R) \mathbf{e}_n$, d'où :

$$\mathcal{P}_r = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \gamma^6 \left[\frac{v^4}{R^2} - \left(\frac{v^3}{cR} \right)^2 \right] = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \gamma^6 \frac{v^4}{R^2} (1 - \beta^2) = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \gamma^4 \frac{v^4}{R^2}$$

L'énergie rayonnée pendant la durée d'une révolution est donc :

$$\mathcal{E}_r = \mathcal{P}_r T = \mathcal{P}_r \frac{2\pi R}{v} = \frac{q^2}{3\varepsilon_0 c^3} \gamma^4 \frac{v^3}{R}$$

Dans le cas ultra-einsteinien, $\beta \approx 1$, d'où :

$$\mathcal{E}_r \approx \frac{q^2}{3\varepsilon_0} \frac{\gamma^4}{R}$$

S6– 15. Accélérateur linéaire (Wideröe, Sloan et Lawrence)

1. a) La loi fondamentale de la dynamique newtonienne, appliquée dans une cavité accélératrice, dans la phase accélératrice n , donne l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} = \frac{eE_0}{m} \sin(\omega t) \quad \text{pour} \quad (n-1)T < t < \left(n - \frac{1}{2}\right)T$$

L'intégration donne :

$$\dot{x}_n = -\frac{eE_0}{m\omega} \cos(\omega t) + \text{Cte}$$

Comme $\dot{x}_n = v_{n-1}$ lorsque $t = (n-1)T$, on détermine aisément la constante :

$$\dot{x}_n = \frac{eE_0}{m\omega} [1 - \cos(\omega t)] + v_{n-1}$$

On en déduit $\dot{x}_n$ pour $t = (n-1/2)T$:

$$\dot{x}_n = \frac{2eE_0}{m\omega} + v_{n-1} = v_n$$

Dans la phase « cylindre n », l'équation différentielle est :

$$\ddot{x} = 0 \quad \text{d'où} \quad \dot{x} = \text{Cte} = (\dot{x}_n)_s = v_n$$

Par conséquent :

$$v_n - v_{n-1} = \Delta v = \frac{2eE_0}{m\omega}$$

Ainsi, le gain en vitesse est indépendant de n .

b) On déduit l'abscisse x_n en intégrant. Dans la phase accélératrice n , on obtient :

$$x_n = \frac{eE_0}{m\omega} \left[t - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right] + v_{n-1} t + \text{Cte}$$

Entre $(n-1)$ et $(n-1/2)T$, la distance L_n parcourue est donc :

$$L_n = \left(\frac{eE_0}{m\omega} + v_{n-1} \right) \frac{T}{2} \quad \text{soit} \quad L_n = \frac{\pi}{\omega} \left[\frac{\Delta v}{2} + v_0 + (n-1)\Delta v \right]$$

Par conséquent :

$$L_n = \frac{\pi}{\omega} \left[v_0 + \left(n - \frac{1}{2} \right) \Delta v \right] = l_0 + \left(n - \frac{1}{2} \right) \Delta l$$

Dans la phase « cylindre n », l'intégration donne : $x_n = v_n t + \text{Cte}$. La distance parcourue entre $(n-1/2)T$ et NT est donc :

$$l_n = \frac{v_n T}{2} = \frac{\pi}{\omega} (v_0 + n\Delta v) = l_0 + n\Delta l$$

c) Avec les valeurs numériques données, on trouve :

$$\Delta v = \frac{2eE_0}{m\omega} = 2,4 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad v_i = \left(\frac{2\mathcal{E}_i}{m} \right)^{1/2} = 0,98 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; \quad v_f = \left(\frac{2\mathcal{E}_f}{m} \right)^{1/2} = 3,1 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Par conséquent :

$$v_f - v_i = 2,12 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad N \approx \frac{v_f - v_i}{\Delta v} \approx 89$$

On en déduit :

$$L_t = \sum_{n=1}^N L_n + l_n = \sum_{n=1}^N 2l_0 - \frac{\Delta l}{2} + 2n\Delta l = N \left(2l_0 - \frac{\Delta l}{2} \right) + 2\Delta l \sum_{n=1}^N n = 2Nl_0 + Nl \left(N + \frac{1}{2} \right)$$

puisque $\sum_{n=1}^N n = N(N+1)/2$.

A.N : $l_0 = \pi v_0 / \omega = 2,4 \text{ cm}$, $\Delta l = 0,06 \text{ cm}$, d'où $L_t = 9,05 \text{ m}$.

c) Si $\mathcal{E}_k$ est changé en $\alpha \mathcal{E}_k$ v_0 est changé en $\alpha^{1/2} v_0$, il faut modifier ω en $\alpha^{1/2} \omega$ afin que l_0 soit inchangé. Il faut alors changer E_0 en αE_0 pour que Δl ne varie pas.

2. a) La loi fondamentale de la dynamique einsteinienne, appliquée dans une cavité accélératrice, dans la phase accélératrice n , donne l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d(\gamma v)}{dt} = \frac{eE_0}{m} \sin(\omega t)$$

Il vient en intégrant :

$$\gamma \dot{x} = -\frac{eE_0}{m\omega} \cos(\omega t) + \text{Cte} \quad \text{soit} \quad \gamma \dot{x} - \gamma_{n-1} v_{n-1} = \frac{eE_0}{m\omega} [1 - \cos(\omega t)]$$

Comme l'accroissement de vitesse est faible, le premier terme s'écrit :

$$d(\gamma v) = \gamma dv + v d\gamma = \gamma dv + \frac{v^2}{c^2} \gamma^3 dv = \gamma dv (1 + \gamma^2 \beta^2) = \gamma^3 dv$$

Par conséquent :

$$\dot{x} - v_{n-1} = \frac{eE_0}{m\omega\gamma_{n-1}^3} [1 - \cos(\omega t)]$$

b) Mouvement dans la phase « cylindre n »

Comme la force à l'intérieur du cylindre est nulle, il vient :

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \dot{x}) = 0 \quad \text{d'où} \quad \dot{x} = \text{Cte} = (\dot{x}_n)_s = v_n$$

On en déduit :

$$v_n - v_{n-1} = \frac{2eE_0}{m\omega\gamma_{n-1}^3}$$

Dans la phase « cylindre n », on a, comme précédemment :

$$x = v_n t + \text{Cte} \quad \text{d'où} \quad l_n = \frac{v_n T}{2}$$

Pour calculer L_n , intégrons $\dot{x}$ dans la phase accélératrice n . On a :

$$\dot{x} = \frac{eE_0}{m\omega\gamma_{n-1}^3} [1 - \cos(\omega t)] + v_{n-1} \quad \text{d'où} \quad x = \frac{eE_0}{m\omega\gamma_{n-1}^3} \left[t - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right] + v_{n-1} t + \text{Cte}$$

Par conséquent :

$$L_n = \frac{\pi}{\omega} \left(\frac{eE_0}{m\omega\gamma_{n-1}^3} + v_{n-1} \right)$$

S6- 16. Prisme magnétique

1. a) D'après le théorème de l'énergie, la vitesse est constante car la force ne travaille pas. Par conséquent : $\gamma = \text{Cte}$ et la loi fondamentale de la dynamique einsteinienne, appliquée à un électron, s'écrit :

$$\gamma m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \text{soit} \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\omega_c \mathbf{v} \times \mathbf{e}_0 \quad \text{avec} \quad \omega_c = \frac{eB}{\gamma m_e}$$

b) En explicitant, on obtient :

$$\begin{vmatrix} \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 \\ \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\varphi}) - \omega \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{\rho} \\ \rho \dot{\varphi} \times \\ \ddot{\varphi}_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \text{soit} \quad \begin{vmatrix} \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 \\ \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\varphi}) \\ \ddot{z}_0 = 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\omega_c \rho \dot{\varphi} \\ \omega_c \dot{\rho} \end{vmatrix} \quad (1)$$

c) Si l'on fait $\rho = \rho_0$ dans l'équation (1), il vient :

$$-\rho_0 \dot{\varphi}^2 = -\omega_c \rho_0 \dot{\varphi} \quad \text{d'où} \quad \dot{\varphi} = \omega_c$$

2. a) On a : $v \approx \rho \dot{\varphi} \approx \rho_0 \omega_c$, car $v = \text{Cte}$. On en déduit :

$$\dot{\varphi} \approx \omega_c \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{\omega_c}{1 + \frac{\Delta \rho}{\rho_0}} \approx \omega_c \left(1 - \frac{\Delta \rho}{\rho_0}\right)$$

b) L'équation (1) donne, en remplaçant $\rho \dot{\varphi}$ par $\rho_0 \omega_c$:

$$\ddot{\rho} - \rho_0 \omega_c^2 \left(1 - \frac{\Delta \rho}{\rho_0}\right) = -\omega_c^2 \rho_0 \quad \text{d'où} \quad \ddot{\rho} + \omega_c^2 \Delta \rho = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{\Delta \rho} + \omega_c^2 \Delta \rho = 0$$

c) i) Posant $x = \Delta \rho$ et $z = \rho_0 \omega t$ dans l'équation différentielle précédente, on obtient :

$$(\rho_0 \omega_c)^2 x'' + \omega_c^2 x = 0 \quad \text{soit} \quad x'' + \frac{x}{\rho_0^2} = 0$$

ii) La solution de cette équation différentielle est :

$$x = C_1 \cos\left(\frac{z}{\rho_0}\right) + C_2 \sin\left(\frac{z}{\rho_0}\right)$$

En tenant compte des valeurs x_e et x'_e de x et x' respectivement pour $z = 0$, on trouve :

$$x = x_e \cos\left(\frac{z}{\rho_0}\right) + \rho_0 x'_e \sin\left(\frac{z}{\rho_0}\right)$$

3. a) À la sortie du prisme $z = \rho_0 \Phi$, $x = x_s$ et $x' = x'_s$. Donc :

$$x_s = x_e \cos \Phi + \rho_0 x'_e \sin \Phi \quad \text{et} \quad x'_s = -\frac{x_e}{\rho_0} \sin \Phi + x'_e \cos \Phi$$

d'où :

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \cos \Phi & \rho_0 \sin \Phi \\ -\sin \Phi / \rho_0 & \cos \Phi \end{bmatrix}$$

b) $x_2 = x_1 + \Delta z x'_1$ et $x'_2 = x'_1$, d'où :

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Comme $T(\overline{A_0 A_i}) = \mathcal{T}(\overline{S A_i}) \mathcal{P}(\overline{E S}) \mathcal{T}(\overline{A_0 E})$, il vient, en explicitant :

$$T(\overline{A_0 A_i}) = \begin{bmatrix} 1 & z_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \rho_0 \\ -1/\rho_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -z_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z_i/\rho_0 & \rho_0 + z_i z_0/\rho_0 \\ -1/\rho_0 & z_0/\rho_0 \end{bmatrix}$$

d) A_0 et A_i sont conjugués si x_s ne dépend pas de x'_e , soit si l'élément T_{12} est nul :

$$\rho_0 + \frac{z_i z_0}{\rho_0} = 0 \quad \text{ce qui donne} \quad z_i z_0 = -\rho_0^2$$

Il en résulte que $|z_i|/\rho_0 = \rho_0/|z_0|$ soit $\varepsilon_i = \varepsilon_0$. Les points A_0 , O et A_i sont alignés.

e) On en déduit les éléments cardinaux (cf. *Optique*) :

$$V = \frac{1}{\rho_0} \quad f_i = \frac{1}{V} = \rho_0 = -f_0 \quad \overline{SH}_i = \rho_0(a-1) = -\rho_0 \quad \overline{EH}_0 = -\rho_0(d-1) = \rho_0$$

Donc les foyers sont situés respectivement en E et S , et les plans principaux passent par le point H de la figure S6.1.

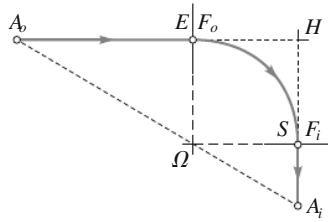


FIG. S6.1.

S6- 17. Focalisation radiale à l'aide d'un champ magnétique

1. Le rayon R de la trajectoire circulaire a pour expression :

$$R = \frac{\gamma m v}{qB} = \frac{\gamma \beta m c}{qB} = \frac{m v}{(1 - v^2/c^2)^{1/2} qB}$$

2. Considérons, sur la figure 6.18, la trajectoire en demi-cercle passant par S , placée à l'origine des coordonnées, et dont la vitesse initiale fait l'angle α avec la normale au plan de la fente. Les coordonnées du point d'impact I , $x_I = d$ et y_I à déterminer, satisfont à l'équation d'un cercle de rayon R . Comme le centre Ω de ce cercle a pour coordonnées $-R \sin \alpha$ (α est négatif sur la figure) et $R \cos \alpha$, on a :

$$(y_I - R \cos \alpha)^2 + (d + R \sin \alpha)^2 = R^2 \quad \text{soit} \quad y_I^2 - 2R \cos \alpha y_I + d^2 + 2Rd \sin \alpha = 0$$

Or, l'une des deux solutions de cette équation du deuxième degré est $y_I = y_E = d \tan \theta$ et la somme des deux solutions vaut $2R \cos \alpha$. Comme $\phi = \theta - \alpha$, on en déduit :

$$y_I = 2R \cos \alpha - d \tan \theta = 2R \cos(\phi - \theta) - d \tan \theta = 2R [\cos \phi \cos \theta + \sin \phi \sin \theta] - d \tan \theta$$

soit :

$$y_I = 2R \cos \phi \cos \theta = \frac{d}{\tan \phi} \quad \text{puisque} \quad \sin \phi = \frac{d}{2R \cos \theta}$$

3. La distance d tant fixe, y_I est maximal pour ϕ minimal, soit $\cos \theta$ maximal et θ nul ; en revanche, y_I est minimal pour ϕ maximal, soit $\cos \theta$ minimal et donc $\theta = \varepsilon$. Par conséquent :

$$\Delta y = (4R^2 - d^2)^{1/2} - (4R^2 \cos^2 \varepsilon - d^2)^{1/2}$$

Pour $\varepsilon \ll 1$, il vient :

$$\Delta y \approx (4R^2 - d^2)^{1/2} \left[1 - \left(1 - \frac{2R^2 \varepsilon^2}{4R^2 - d^2} \right)^{1/2} \right] \approx \frac{R^2 \varepsilon}{(4R^2 - d^2)^{1/2}} \approx 0$$

à l'ordre 2 près. Il y a donc focalisation.

Chapitre 7

S7- 1. Collision élastique symétrique

1. Les lois de la conservation de $\mathbf{P}$ et $\mathcal{E}$ donnent :

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_1 + mc^2 = \mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2$$

Comme la diffusion est symétrique, on a :

$$\mathcal{E}'_1 = \mathcal{E}'_2 = \mathcal{E}' \quad p'_1 = p'_2 = p' \quad \text{d'où} \quad p_1 = 2p' \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{et} \quad 2\mathcal{E}' = \mathcal{E}_1 + mc^2$$

Ainsi :

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{p_1}{2p'} \quad \text{soit} \quad \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{p_1^2 c^2}{4(\mathcal{E}'^2 - m^2 c^4)}$$

et :

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\mathcal{E}_1^2 - m^2 c^4}{(2\mathcal{E}' + 2mc^2)(2\mathcal{E}' - mc^2)} = \frac{(\mathcal{E}_1 + mc^2)(\mathcal{E}_1 - mc^2)}{(\mathcal{E}_1 + 3mc^2)(\mathcal{E}_1 - mc^2)} = \frac{\mathcal{E}_{k,1} + 2mc^2}{\mathcal{E}_{k,1} + 4mc^2}$$

Il en résulte que :

$$\cos \alpha = 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 = \frac{2(\mathcal{E}_{k,1} + 2mc^2) - \mathcal{E}_{k,1} - 4mc^2}{\mathcal{E}_{k,1} + 4mc^2} = \frac{\mathcal{E}_{k,1}}{\mathcal{E}_{k,1} + 4mc^2}$$

Dans l'approximation newtonienne ($\mathcal{E}_{k,1} \ll mc^2$), on retrouve le résultat connu $\cos \alpha \approx 0$ et $\alpha \approx \pi/2$.

2. Comme $\mathcal{E}_{k,1}(1 - \cos \alpha) = 4mc^2 \cos \alpha$, on a, pour $\alpha = 45^\circ$:

$$\mathcal{E}_{k,1} = 4m_p c^2 \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = 9056,7 \text{ MeV}.$$

S7- 2. Collision élastique entre deux électrons

1 a). Le facteur relativiste γ_1 de l'électron projectile vaut :

$$\gamma_1 = 1 + \frac{\mathcal{E}_{k,1}}{m_e c^2} = 6,87 \quad \text{d'où} \quad \beta_1 = \left(1 - \frac{1}{\gamma_1^2}\right)^{1/2} = 0,985$$

b) On trouve aisément (cf. chapitre 7) :

$$\beta_c = \frac{p_1 c^2}{\mathcal{E}} = \frac{\gamma_1 \beta_1 m c^2}{\gamma_1 m c^2 + m c^2} \quad \text{d'où} \quad \beta_c = \frac{\gamma_1 \beta_1}{\gamma_1 + 1} = \left(\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1}\right)^{1/2} = 0,86$$

c) On en déduit :

$$\gamma_c = (1 - \beta_c^2)^{-1/2} = \left(\frac{2}{\gamma_1 + 1}\right)^{-1/2} = 1,98$$

2 a). La vitesse du projectile par rapport à $\mathcal{R}^*$ s'obtient en composant les vitesses :

$$v_1^* = \frac{v_1 - v_c}{1 - v_c v_1 / c^2} \quad \text{d'où} \quad \beta_1^* = \frac{\beta_1 - \beta_c}{1 - \beta_1 \beta_c} = 0,84$$

b) On en déduit l'énergie cinétique dans $\mathcal{R}^*$:

$$\mathcal{E}_{k,1}^* = (\gamma_1^* - 1)m_e c^2 = 0,43 \text{ MeV}$$

Comme la collision est élastique, cette énergie se conserve dans $\mathcal{R}^*$.

3.a). Les équations de conservation s'écrivent :

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{0} = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_1 + m_e c^2 = \mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2$$

b) Éliminons les caractéristiques de la particule 2 après collision :

$$\mathcal{E}'_2 - p'^2_2 c^2 = m_e^2 c^4 \quad \text{soit} \quad (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}'_1 + m_e c^2)^2 - (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)^2 c^2 = m_e^2 c^4$$

et :

$$(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}'_1)^2 + 2m_e c^2 (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}'_1) - p_1^2 c^2 - p'^2_1 c^2 + 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}'_1 c^2 = 0$$

Il vient, en tenant compte des relations entre énergie et quantité de mouvement, et en introduisant l'angle $\theta = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_1)$:

$$-\mathcal{E}_1 \mathcal{E}'_1 + m_e c^2 (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}'_1) + m_e^2 c^4 + p_1 p'_1 c^2 \cos \theta = 0$$

d'où :

$$\cos \theta = \frac{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}'_1 - m_e c^2 (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}'_1) - m_e^2 c^4}{p_1 p'_1 c^2} \quad \text{et} \quad \cos^2 \theta = \frac{[\mathcal{E}_1 (\mathcal{E}'_1 - m_e c^2) + m_e c^2 (\mathcal{E}'_1 - m_e c^2)]^2}{(\mathcal{E}_1^2 - m_e^2 c^4)(\mathcal{E}'_1^2 - m_e^2 c^4)}$$

On a donc :

$$\cos^2 \theta = \frac{(\mathcal{E}_1 + m_e c^2)(\mathcal{E}'_1 - m_e c^2)}{(\mathcal{E}_1 - m_e c^2)(\mathcal{E}'_1 + m_e c^2)} \quad \text{soit} \quad \cos^2 \theta = \frac{\mathcal{E}'_{k,1}(\mathcal{E}_{k,1} + 2m_e c^2)}{\mathcal{E}_{k,1}(\mathcal{E}'_{k,1} + 2m_e c^2)}$$

Ainsi le facteur α introduit dans le texte vaut 2.

c) On en déduit l'énergie cinétique $\mathcal{E}'_{k,1}$ de A'_1 en fonction de θ et de $\mathcal{E}_{k,1}$:

$$\mathcal{E}'_{k,1} = \frac{2m_e c^2 \mathcal{E}_{k,1} \cos^2 \theta}{\mathcal{E}_{k,1} \sin^2 \theta + 2m_e c^2} \quad \text{soit} \quad \mathcal{E}'_{k,1} = \frac{2m_e c^2 \mathcal{E}_{k,1}}{3\mathcal{E}_{k,1} + 8m_e c^2} = 0,234 \text{ MeV} \quad \text{pour} \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

d) La valeur maximale de $\mathcal{E}'_{k,1}$ est obtenue pour $\theta = \pi$. Dans ce cas, $\mathcal{E}'_{k,1} = \mathcal{E}_{k,1}$: la particule cède toute son énergie cinétique, comme en mécanique newtonienne.

S7- 3. Angle minimal de diffusion entre deux particules identiques

1. D'après les résultats sur la diffusion élastique d'une particule projectile par une cible immobile (cf. chapitre 7), il vient :

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta^*}{\gamma_e (\cos \theta^* - 1)} = \tan \left(\frac{\theta^*}{2} \right) \left(\frac{2}{\gamma_1 + 1} \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \tan \theta_2 = -\cotan \left(\frac{\theta^*}{2} \right) \left(\frac{2}{\gamma_1 + 1} \right)^{1/2}$$

2. On en déduit :

$$\tan \theta_1 - \tan \theta_2 = \left(\frac{2}{\gamma_1 + 1} \right)^{1/2} \left(\frac{\sin \theta^*/2}{\cos \theta^*/2} + \frac{\cos \theta^*/2}{\sin \theta^*/2} \right) = \left(\frac{2}{\gamma_1 + 1} \right)^{1/2} \frac{2}{\sin \theta^*}$$

et :

$$\tan \theta_1 \times \tan \theta_2 = -\frac{2}{\gamma_1 + 1} = -\frac{2}{1,25 + 1} = -0,89 \quad \text{puisque} \quad \gamma_1 = (1 - \beta_1^2)^{-1/2} = (1 - 0,36)^{-1/2} = 1,25$$

Par conséquent :

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2} = \left(\frac{2}{\gamma_1 + 1} \right)^{1/2} \frac{2}{\sin \theta^* [1 - 2/(\gamma_1 + 1)]}$$

Ainsi, $(\theta_1 - \theta_2)$ est minimal pour $\theta^* = \pi/2$.

3. Lorsque $\theta^* = \pi/2$, et $\theta = \theta_1 - \theta_2 = 2\theta_1$. On trouve donc, puisque $\tan(\theta^*/2) = 1$:

$$\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) = \left(\frac{2}{\gamma_1 + 1} \right)^{1/2} = 0,943 \quad \text{d'où} \quad \theta = 86,6^\circ$$

S7- 4. Angle maximal de diffusion

1. D'après les résultats sur la diffusion élastique d'une particule projectile par une cible immobile (cf. chapitre 7), il vient :

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta^*}{\gamma_e (\cos \theta^* + \beta_e \mathcal{E}_1^* / p^* c)}$$

avec $\beta_e = p_1 c / \mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ étant l'énergie totale du système ($\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + m_2 c^2$).

2. L'équation :

$$\frac{1}{\tan \theta_1} = \gamma_e \frac{(\cos \theta^* + \beta_e \mathcal{E}_1^* / p^* c)}{\sin \theta^*}$$

donne par différenciation :

$$-\frac{1 + \tan^2 \theta_1}{\tan^2 \theta_1} d\theta_1 = \gamma_e \frac{-\sin^2 \theta^* - \cos^2 \theta^* - \beta_e \cos \theta^* \mathcal{E}_1^* / (p^* c)}{\sin^2 \theta^*} d\theta^* = -\gamma_e \frac{1 + \beta_e \cos \theta^* \mathcal{E}_1^* / (p^* c)}{\sin^2 \theta^*} d\theta^*$$

Ainsi :

$$\frac{d\theta_1}{d\theta^*} = 0 \quad \text{pour} \quad \cos \theta^* = -\frac{p^* c}{\mathcal{E}_1^* \beta_e}$$

En injectant cette valeur de θ^* dans $\tan \theta_1$, on obtient :

$$\tan \theta_1^m = \frac{[1 - (p^* c / \mathcal{E}_1^* \beta_e)^2]^{1/2}}{\gamma_e \left(-\frac{p^* c}{\mathcal{E}_1^* \beta_e} + \beta_e \frac{\mathcal{E}_1^*}{p^* c} \right)} = \frac{p^* c}{\gamma_e \beta_e \mathcal{E}_1^* [1 - (\frac{p^* c}{\mathcal{E}_1^* \beta_e})^2]^{1/2}}$$

On en déduit :

$$\frac{1}{\sin^2 \theta_1^m} = 1 + \frac{1}{\tan^2 \theta_1^m} = 1 + \left(\frac{\gamma_e \beta_e \mathcal{E}_1^*}{p^* c} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{p^* c}{\mathcal{E}_1^* \beta_e} \right)^2 \right] = -\gamma_e^2 \beta_e^2 \left[1 - \left(\frac{\mathcal{E}_1^*}{p^* c} \right)^2 \right] = \left(\frac{\gamma_e \beta_e}{\gamma_1^* \beta_1^*} \right)^2$$

et

$$\sin \theta_1^m = \frac{\gamma_1^* \beta_1^*}{\gamma_e \beta_e} = \frac{p_1^*}{\gamma_e \beta_e m_1 c}$$

Comme $p_1^* = \gamma_e (p_1 - \beta_e \mathcal{E}_1 / c)$, il vient finalement :

$$\sin \theta_1^m = \frac{1}{m_1 c} \left(\frac{p_1}{\beta_e} - \frac{\mathcal{E}_1}{c} \right) = \frac{1}{m_1 c} \left(\frac{\mathcal{E}}{c} - \frac{\mathcal{E}_1}{c} \right) = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_1}{m_1 c^2} = \frac{m_2 c^2}{m_1 c^2}$$

Ainsi :

$$\sin \theta_1^m = \frac{m_2}{m_1} \quad \text{soit} \quad \theta_1^m = \arcsin \frac{m_e}{m_p} \approx \frac{1}{1838}$$

puisque $m_1 = m_p$ et $m_2 = m_e$.

S7- 5. Énergie communiquée à une particule

1. D'après les résultats sur la diffusion élastique d'une particule projectile par une cible immobile (cf. chapitre 7), on a :

$$Q = \frac{2m_1^2(\gamma_1^2 - 1)}{m_1^2 + m_2^2 + 2\gamma_1 m_1 m_2} m_2 c^2 \sin^2 \left(\frac{\theta^*}{2} \right)$$

2. Comme : $\mathcal{E}_1 + m_2 c^2 = \mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2$ et $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}'_1 + Q$, on a :

$$\mathcal{E}_{k,1} = (\mathcal{E}'_{k,1})_m + Q_{\max} \quad \text{soit} \quad r_1 = \frac{(\mathcal{E}'_{k,1})_m}{\mathcal{E}_{k,1}} = 1 - \frac{Q_{\max}}{\mathcal{E}_{k,1}}$$

Il en résulte que :

$$r_1 = 1 - \frac{2m_1^2(\gamma_1^2 - 1)m_2 c^2}{[m_1^2 + m_2^2 + 2\gamma_1 m_1 m_2](\gamma_1 - 1)m_1 c^2} = 1 - \frac{2m_1 m_2(\gamma_1 + 1)}{m_1^2 + m_2^2 + 2\gamma_1 m_1 m_2} = \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1^2 + m_2^2 + 2\gamma_1 m_1 m_2}$$

3. Lorsque $m_2 \gg m_1$, r_1 devient :

$$r_1 = \frac{(1 - m_1/m_2)^2}{1 + (m_1/m_2)^2 + 2\gamma_1 m_1/m_2} \approx \frac{(1 - m_1/m_2)^2}{1 + 2\gamma_1 m_1/m_2}$$

Dans l'approximation newtonienne ($\gamma_1 \approx 1$) :

$$r_1 \approx \frac{(1 - m_1/m_2)^2}{1 + 2m_1/m_2} \approx 1 - 4 \frac{m_1}{m_2}$$

C'est évidemment le résultat établi en mécanique newtonienne (cf. *Mécanique*).

Dans le cas ultra-einsteinien $\gamma_1 m_1 \approx m_2$:

$$r_1 \approx \frac{(1 - m_1/m_2)^2}{1 + 2\gamma_1 m_1/m_2} \approx \frac{m_2}{2\gamma_1 m_1}$$

4. Lorsque $m_2 \ll m_1$, r_1 devient :

$$r_1 = \frac{(1 - m_2/m_1)^2}{1 + (m_2/m_1)^2 + 2\gamma_1 m_2/m_1} \approx \frac{(1 - m_2/m_1)^2}{1 + 2\gamma_1 m_2/m_1}$$

Dans l'approximation newtonienne ($\gamma_1 \approx 1$) :

$$r_1 \approx \frac{(1 - m_2/m_1)^2}{1 + 2m_2/m_1} \approx 1 - 4 \frac{m_2}{m_1}$$

Dans le cas ultra-einsteinien ($\gamma_1 m_2 \gg m_1$) :

$$r_1 \approx \frac{1}{1 + 2\gamma_1 m_2/m_1} \approx \frac{m_1}{2\gamma_1 m_2}$$

S7- 6. Désintégration d'une particule immobile en deux particules

D'après les lois de conservation, on a :

$$\mathbf{0} = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 = m_1 c^2$$

Or :

$$\mathcal{E}_2^2 - p_2^2 c^2 = m_2^2 c^4 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_3^2 - p_3^2 c^2 = m_3^2 c^4 \quad \text{d'où} \quad \mathcal{E}_2^2 - \mathcal{E}_3^2 = m_2^2 c^4 - m_3^2 c^4$$

Il en résulte, puisque $\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 = m_1 c^2$:

$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 = \frac{m_2^2 c^4 - m_3^2 c^4}{m_1 c^2}$$

Les énergies $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_3$ sont donc :

$$\mathcal{E}_2 = \frac{m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 - m_3^2 c^4}{2m_1 c^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_3 = \frac{m_1^2 c^4 + m_3^2 c^4 - m_2^2 c^4}{2m_1 c^2}$$

Applications :

(I) $m_K c^2 = 493,7 \text{ MeV}$, $m_{\pi^+} c^2 = 139,6 \text{ MeV}$, $m_{\pi^0} c^2 = 135 \text{ MeV}$:

$$\mathcal{E}_{\pi^+} = 248,1 \text{ MeV} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{\pi^0} = 245,6 \text{ MeV}$$

(II) $m_K c^2 = 498 \text{ MeV}$, $m_{\pi} c^2 = 139,6 \text{ MeV}$: $\mathcal{E}_{\pi} = 249 \text{ MeV}$.

(III) $m_{\pi^\pm} c^2 = 139,6 \text{ MeV}$, $m_{\mu^\pm} c^2 = 105,6 \text{ MeV}$: $\mathcal{E}_{\mu} = 109,7 \text{ MeV}$ et $\mathcal{E}_{\nu} = 29,9 \text{ MeV}$.

(IV) $m_K c^2 = 493,7 \text{ MeV}$, $m_{\mu^+} c^2 = 105,6 \text{ MeV}$: $\mathcal{E}_{\mu} = 258 \text{ MeV}$ et $\mathcal{E}_{\nu} = 235,6 \text{ MeV}$.

S7- 7. Désintégration d'un méson K^+

1. La condition pour que la désintégration soit possible est, si n est un entier :

$$\mathcal{E}^* \geq n \times m_{\pi} c^2 \quad \text{soit} \quad n \leq \frac{m_K c^2}{m_{\pi} c^2} = 3,54$$

puisque $m_K c^2 = 493,7 \text{ MeV}$ et $m_{\pi} c^2 = 139,6 \text{ MeV}$. Ainsi, la désintégration peut donner trois pions au plus.

2. Les conservations de la quantité de mouvement totale et de l'énergie s'écrivent :

$$\mathbf{0} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 \quad \text{et} \quad m_K c^2 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$$

avec, compte tenu de l'hypothèse supplémentaire $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3$: $p_1 = p_2 = p_3$. Par conséquent, les trois vecteurs quantités de mouvement font entre eux un angle de $2\pi/3$.

3. L'énergie d'un pion, par exemple A_1 , est minimale lorsqu'il est repos, ce qui est possible, puisque dans ce cas les quantités de mouvement $\mathbf{p}_2$ et $\mathbf{p}_3$ sont opposées :

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 \quad \text{donne} \quad \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = \mathbf{0}$$

Son énergie est donc l'énergie de masse $m_\pi c^2 = 139,6 \text{ MeV}$. En revanche, cette énergie, de A_1 par exemple, est maximale lorsque p_1 est maximale, ce qui exige que $p_1 = p_2 + p_3$ en norme. Cherchons la condition supplémentaire sur p_2 pour que la somme $\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$ soit minimale :

$$\frac{d(\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3)}{dp_2} = \frac{p_2 c^2}{\mathcal{E}_2} + \frac{p_3 c^2}{\mathcal{E}_3} \frac{dp_3}{dp_2} = 0 \quad \text{car} \quad \mathcal{E}^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad \text{donne} \quad 2\mathcal{E} d\mathcal{E} = 2 \cdot c^2 dp$$

en différentiant. Pour une valeur maximale fixée de p_1 , on a $dp_2 + dp_3 = 0$. Par conséquent :

$$\frac{p_2 c^2}{\mathcal{E}_2} - \frac{p_3 c^2}{\mathcal{E}_3} = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{p_2}{\mathcal{E}_2} = \frac{p_3}{\mathcal{E}_3} \quad v_2 = v_3 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3$$

Ainsi, la valeur maximale $\mathcal{E}_1$ est telle que :

$$p_1 = 2p_2 = 2p_3 \quad \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_1^2 - m_\pi^2 c^4 = 4(\mathcal{E}_2^2 - m_\pi^2 c^4)$$

En injectant ces expressions dans l'équation de conservation de l'énergie, on obtient : $2\mathcal{E}_2 = m_K c^2 - \mathcal{E}_1$. On en déduit, en éliminant $\mathcal{E}_2$:

$$4\mathcal{E}_2^2 = \mathcal{E}_1^2 + 3m_\pi^2 c^4 = (m_K c^2 - \mathcal{E}_1)^2 \quad \text{d'où} \quad \mathcal{E}_1 = \frac{m_K^2 c^4 - 3m_\pi^2 c^4}{2m_K c^2} = 187,64 \text{ MeV}$$

S7- 8. Perte d'énergie au cours d'une collision inélastique électron-atome

1. D'après les lois de conservation, on a :

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p} \quad \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_a = \mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}_a + \Delta\mathcal{E}$$

Comme $\mathcal{E}_1^2 - \mathcal{E}'_1{}^2 = p_1^2 c^2 - p'^2 c^2$ avec $p_1 \approx p'_1$, il vient :

$$p_1 - p'_1 = \frac{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}'_1)(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}'_1)}{(p_1 + p'_1)c^2} \quad \text{soit} \quad p_1 - p'_1 \approx \frac{\mathcal{E}_1 \Delta\mathcal{E}}{p_1 c^2} = \frac{\Delta\mathcal{E}}{v_1}$$

2. On a $p^2 = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)^2 = p_1^2 + p'^2 - 2p_1 p'_1 \cos \theta = (p_1 - p'_1)^2 + 4p_1 p'_1 \sin^2 \theta/2$. Donc :

$$p^2 \approx \left(\frac{\Delta\mathcal{E}}{v_1} \right)^2 + 4p_1^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = p_1^2 \left[\left(\frac{\Delta\mathcal{E}}{p_1 v_1} \right)^2 + 4 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \approx p_1^2 (\theta_0^2 + \theta^2)$$

lorsque θ est petit.

3. Calculons θ_0 pour $\gamma_1 = 3$ et $\Delta\mathcal{E} = 15 \text{ eV}$:

$$\theta_0 = \frac{\Delta\mathcal{E}}{\gamma_1 \beta_1^2 m_e c^2} = \frac{\gamma_1 \Delta\mathcal{E}}{(\gamma_1^2 - 1) m_e c^2} = 11 \text{ } \mu\text{rad}$$

S7– 9. Seuil énergétique d'excitation d'un atome d'aluminium par un électron

1. La réaction s'écrit :

$$A_1 + A_2 \rightarrow A_3 + A_4 \quad \text{avec} \quad m_1 c^2 = m_3 c^2 \quad \text{et} \quad m_4 c^2 = m_2 c^2 + \Delta \mathcal{E}_n$$

Or :

$$\mathcal{E}_{k,1} \geq \frac{(m_3 + m_4)^2 c^4 - (m_1 + m_2)^2 c^4}{2m_2 c^2}$$

soit :

$$\mathcal{E}_{k,1} \geq \frac{(2m_1 c^2 + 2m_2 c^2 + \Delta \mathcal{E}_n)}{2m_2 c^2} \Delta \mathcal{E}_n = \frac{m_1 c^2 + m_2 c^2}{m_2 c^2} \Delta \mathcal{E}_n + \frac{\Delta \mathcal{E}_n^2}{2m_2 c^2}$$

2. Dans $\mathcal{R}^*$, la conservation de l'énergie, en mécanique newtonienne, s'écrit (cf. *Mécanique*) :

$$\mathcal{E}_{k,i}^* + U_i = \mathcal{E}_{k,f}^* + U_f \quad \text{avec} \quad U_f = U_i + \Delta \mathcal{E}_n$$

Au seuil énergétique de la collision, on a $\mathcal{E}_{k,f}^* \geq 0$, d'où :

$$\mathcal{E}_{k,i}^* \geq \Delta \mathcal{E}_n \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_{k,i}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) v^2 = \frac{m_2 c^2}{m_1 c^2 + m_2 c^2} \mathcal{E}_{k,1}$$

Il en résulte :

$$\mathcal{E}_{k,1} \geq \frac{m_1 c^2 + m_2 c^2}{m_2 c^2} \Delta \mathcal{E}_n$$

3. Pour un électron projectile et un atome cible d'aluminium :

$$(\mathcal{E}_{k,1})_n \geq (1 + 2 \times 10^{-5}) \Delta \mathcal{E}_n \approx 1550 \text{ eV} \quad \text{et} \quad (\mathcal{E}_{k,1})_e \geq (1 + 2 \times 10^{-5}) \Delta \mathcal{E}_n + \frac{\Delta \mathcal{E}_n}{2 \times 25,13 \times 10^9} \approx 1550 \text{ eV}$$

S7– 10. Anneaux de stockage

Dans le cas des anneaux de stockage, le référentiel $\mathcal{R}^*$ coïncide avec le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$. L'énergie totale dans $\mathcal{R}^*$ est $\mathcal{E}^* = 2(m_p c^2 + \mathcal{E}_k^*)$. Dans $\mathcal{R}$, où le proton cible est immobile, l'énergie totale est :

$$\mathcal{E} = 2m_p c^2 + \mathcal{E}_k$$

Or, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^*$ et la quantité de mouvement $\mathbf{p}$ de la particule projectile, dans $\mathcal{R}$, sont reliées par l'équation $\mathcal{E}^2 - p^2 c^2 = \mathcal{E}^{*2}$ (invariance du carré de la pseudo-norme de 4-p). Cette équation s'écrit :

$$(\mathcal{E}_k + m_p c^2)^2 - p^2 c^2 = m_p^2 c^4 \quad \text{soit} \quad p^2 c^2 = \mathcal{E}_k (\mathcal{E}_k + 2m_p c^2)$$

Il en résulte :

$$(2m_p c^2 + \mathcal{E}_k)^2 - \mathcal{E}_k (\mathcal{E}_k + 2m_p c^2) = 4(m_p c^2 + \mathcal{E}_k^*)^2$$

En effectuant et en simplifiant, on trouve :

$$\mathcal{E}_k = \frac{4m c^2 + 2\mathcal{E}_k^*}{m c^2} \mathcal{E}_k^*$$

A.N : Les valeurs $\mathcal{E}_k^* = 28 \text{ GeV}$ et $m_p c^2 = 938 \text{ MeV}$ donnent :

$$\mathcal{E}_k = 28 \frac{4 \times 0,938 + 56}{0,938} = 1784 \text{ GeV}$$

S7– 11. Transformation réciproque paire proton-antiproton en paire électron-positron

1. Une paire proton-antiproton au repos peut toujours se transformer en une paire électron-positron, car : $\mathcal{E}_s^* = 2m_p c^2 > 2m_e c^2$. Ce n'est pas le cas pour la transformation inverse.

2. La condition sur l'énergie cinétique du système, exprimée dans $\mathcal{R}^*$, pour qu'une paire électron-positron, initialement au repos, se transforme en une paire proton-antiproton, est :

$$\mathcal{E}_s^* \geq 2m_p c^2 \quad \text{soit} \quad \mathcal{E}_k^* + 2m_e c^2 \geq 2m_p c^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_k^* \geq 2m_p c^2 - 2m_e c^2 = 1,875 \text{ GeV}$$

S7– 12. Production d'une paire proton-antiproton

1. Dans $\mathcal{R}^*$, le seuil énergétique de l'ensemble est la somme des énergies de masse des particules émergentes :

$$\mathcal{E}_s^* = 4m_p c^2 \quad \text{d'où} \quad (\mathcal{E}_{s,1} + m_p c^2)^2 - p_1^2 c^2 = (4m_p c^2)^2 = 16m_p^2 c^4$$

En effectuant, on trouve $\mathcal{E}_{s,1} = 7m_p c^2$.

2. Lorsque la cible est en mouvement, on a :

$$(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)^2 - (p_1 - p_2)^2 c^2 \geq 16m_p^2 c^4 \quad \text{ce qui donne} \quad (\mathcal{E}_1^2 - m_p^2 c^4)(\mathcal{E}_2^2 - m_p^2 c^4) \geq (7m_p^2 c^4 - \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2)^2$$

avec $\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \leq 7m_p^2 c^4$, en remplaçant p_1 et p_2 par leurs expressions en fonction des énergies et des masses. On obtient, en simplifiant :

$$\mathcal{E}_1^2 - 14\mathcal{E}_2 \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2^2 + \alpha \leq 0 \quad \text{avec} \quad \alpha = 48m_p^2 c^4$$

3. La résolution de l'inéquation précédente du deuxième degré donne :

$$\mathcal{E}_{1,min} \leq \mathcal{E}_1 \leq \mathcal{E}_{1,max} \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_{1,min} = 7\mathcal{E}_2 - [48(\mathcal{E}_2^2 - m_p^2 c^4)]^{1/2} = 5,12 \text{ GeV}$$

et $\mathcal{E}_{1,max} = 7\mathcal{E}_2 + [48(\mathcal{E}_2^2 - m_p^2 c^4)]^{1/2} = 8,16 \text{ GeV}$. Ce dernier résultat doit être exclu, car il ne réalise pas la condition $\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \leq 7m_p^2 c^4$. Finalement, on a bien :

$$\mathcal{E}_1 \leq U - [48(\mathcal{E}_2^2 - m_p^2 c^4)]^{1/2} \quad \text{avec} \quad U = 7\mathcal{E}_2 \quad \text{soit} \quad \mathcal{E}_1 \geq 5,12 \text{ GeV}$$

Le seuil énergétique est donc 5,12 GeV.

4. Le seuil énergétique demandée dans la question 1 s'en déduit aisément en faisant $\mathcal{E}_2 = m_p c^2$:

$$U - [48(\mathcal{E}_2^2 - m_p^2 c^4)]^{1/2} = 7\mathcal{E}_2 - [48(\mathcal{E}_2^2 - m_p^2 c^4)]^{1/2} = 7m_p c^2$$

S7– 13. Production d'un deuton par une collision proton-proton

1. Dans $\mathcal{R}^*$, l'énergie seuil de la réaction est la somme des énergies de masse des particules émergentes :

$$\mathcal{E}_s^* = m_d c^2 + m_\pi c^2$$

2. On en déduit l'énergie cinétique seuil du proton projectile dans le référentiel $\mathcal{R}$ où le proton-cible est au repos, en utilisant l'invariance du quadri-vecteur quantité de mouvement totale énergie totale :

$$\frac{\mathcal{E}_s^2}{c^2} - p_1^2 = \frac{\mathcal{E}_s^{*2}}{c^2} \quad \text{d'où} \quad (\mathcal{E}_{1,s} + m_p c^2)^2 - p_1^2 c^2 = (m_d c^2 + m_\pi c^2)^2$$

En effectuant et en faisant apparaître l'énergie cinétique seuil $\mathcal{E}_{k,1}^s$ du proton projectile, on trouve (cf. chapitre 7) :

$$\mathcal{E}_{k,1}^s = \frac{(m_\pi c^2 + m_d c^2)^2 - (2m_p c^2)^2}{2m_p c^2} = 294,75 \text{ MeV}$$

S7– 14. Désintégration d'un hypéron Λ^0

1. Écrivons les conservations de la quantité de mouvement et de l'énergie de l'ensemble :

$$\mathbf{0} = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 \quad \text{et} \quad m_\Lambda c^2 = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$$

Il vient donc :

$$m_\Lambda c^2 = (p_2^2 c^2 + m_2^2 c^4)^{1/2} + (p_3^2 c^2 + m_3^2 c^4)^{1/2}$$

soit :

$$m_\Lambda^2 c^4 - m_2^2 c^4 - m_3^2 c^4 - 2p_2^2 c^2 = 2(p_2^2 c^2 + m_2^2 c^4)^{1/2} (p_2^2 c^2 + m_3^2 c^4)^{1/2}$$

Ainsi :

$$4(p_2^2 c^2 + m_2^2 c^4)(p_2^2 c^2 + m_3^2 c^4) = (A - 2p_2^2 c^2)^2 \quad \text{avec} \quad A = m_\Lambda^2 c^4 - m_2^2 c^4 - m_3^2 c^4$$

On en déduit :

$$4p_2^4 c^4 + 4m_2^2 c^4 m_3^2 c^4 - 4p_2^2 c^2 (m_2^2 c^4 + m_3^2 c^4) = A^2 + 4p_2^4 c^4 - 4Ap_2^2 c^2$$

soit :

$$4p_2^2 c^2 (A + m_2^2 c^4 + m_3^2 c^4) = A^2 - 4m_2^2 c^4 m_3^2 c^4 \quad \text{et} \quad p_2^2 c^2 = \frac{A^2 - 4m_2^2 c^4 m_3^2 c^4}{4(A + m_2^2 c^4 + m_3^2 c^4)}$$

En simplifiant, on obtient :

$$p_2 c = \left[\frac{(A - 2m_2 c^2 m_3 c^2)(A + 2m_2 c^2 m_3 c^2)}{4(A + m_2^2 c^4 + m_3^2 c^4)} \right]^{1/2}$$

Or :

$$A + m_2^2 c^4 + m_3^2 c^4 = m_\Lambda^2 c^4 = A_0 \quad A - 2m_2 c^2 m_3 c^2 = A_0 - (m_2 c^2 + m_3 c^2)^2 = A_1$$

et

$$A + 2m_2 c^2 m_3 c^2 = A_0 - (m_2 c^2 - m_3 c^2)^2 = A_2$$

On en déduit :

$$p_2 c = \left(\frac{A_1 A_2}{4A_0} \right)^{1/2} \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

2. Effectuons les calculs, sachant que $m_\Lambda c^2 = 1115,6 \text{ MeV}$, $m_p c^2 = 938,3 \text{ MeV}$ et $m_\pi = 139,6 \text{ MeV}$:

$$p_2 c = p_3 c = p c \quad \text{avec} \quad p c \approx 100 \text{ MeV} \quad \text{et donc} \quad p \approx 100 \text{ MeV} \cdot c^{-1}$$

Les énergies cinétiques s'en déduisent aisément :

$$\mathcal{E}_{k,2} = (p_2^2 c^2 + m_2^2 c^4)^{1/2} - m_2 c^2 = 5,3 \text{ MeV} \quad \mathcal{E}_{k,2} = (p_2^2 c^2 + m_3^2 c^4)^{1/2} - m_3 c^2 = 32,1 \text{ MeV}$$

S7– 15. Désintégration d'un hypéron Σ^-

1. Écrivons les conservations de la quantité de mouvement et de l'énergie du système, pour la collision :

$$\Sigma^- \rightarrow n + \pi^-$$

Il vient, avec les notations habituelles : $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3$ et $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$.

Comme le produit scalaire $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3$ est nul, exprimons la relation entre $\mathcal{E}_2$ et $\mathbf{p}_2$ relatives au neutron :

$$(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3)^2 - (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3)^2 c^2 = m_2^2 c^4 \quad \text{soit} \quad m_1^2 c^4 + m_3^2 c^4 - 2\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_3 = m_2^2 c^4$$

On en déduit :

$$\mathcal{E}_3 = \frac{m_1^2 c^4 + m_3^2 c^4 - m_2^2 c^4}{2\mathcal{E}_1} = 196,97 \text{ MeV} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3 = 1250,33 \text{ MeV}$$

puisque $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{k,1} + m_1 c^2 = 1447,3 \text{ MeV}$. Par conséquent :

$$\mathcal{E}_{k,3} = \mathcal{E}_3 - m_3 c^2 = 57,37 \text{ MeV} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{k,2} = \mathcal{E}_2 - m_2 c^2 = 310,73 \text{ MeV}$$

2. Pour obtenir l'angle que fait $\mathbf{p}_2$ avec la direction incidente, multiplions l'équation vectorielle de conservation

par $\mathbf{p}_1$. Il vient, puisque $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 = 0$:

$$p_1^2 = \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = p_1 p_2 \cos \theta_2 \quad \text{d'où} \quad \cos \theta_2 = \frac{p_1}{p_2}$$

À l'aide des valeurs de p_{1c} et p_{2c} obtenues avec $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, on détermine θ_2 :

$$p_{1c} = (\mathcal{E}_1^2 - m_1^2 c^4)^{1/2} = 813,1 \text{ MeV} \cdot c^{-1} \quad p_{2c} = (\mathcal{E}_2^2 - m_2^2 c^4)^{1/2} = 824,9 \text{ MeV} \cdot c^{-1}$$

et $\theta_2 = \arccos(p_1/p_2) = 9,7^\circ$.

S7– 16. Énergie et masse d'un système de particules

1 a). Le seuil énergétique du système, dans $\mathcal{R}^*$ est, puisque dans ce référentiel chacune des particules peut être immobile :

$$\mathcal{E}_s^* = 3m_e c^2$$

On en déduit l'énergie seuil du photon incident et sa longueur d'onde dans $\mathcal{R}$ à l'aide de l'invariance du quadri-vecteur $4\text{-}P(\mathcal{E}/c, \mathbf{P})$:

$$\mathcal{E}_s^2 - P_s^2 c^2 = \mathcal{E}_s^{*2} \quad \text{soit en explicitant} \quad (h\nu_s + m_e c^2)^2 - h^2 \nu_s^2 = (3m_e c^2)^2$$

Il en résulte :

$$h\nu_s = 4m_e c^2 \quad \text{et} \quad \lambda_s = \frac{c}{\nu_s} = \frac{hc}{4m_e c^2} = 0,6 \text{ pm}$$

Ainsi, $\lambda < 0,6 \text{ pm}$: le domaine spectral est celui des rayons γ .

b) La masse M du système, au seuil, vaut, en fonction de m_e :

$$M = \frac{1}{c^2} (\mathcal{E}^2 - P^2 c^2)^{1/2} = \frac{\mathcal{E}^{*2}}{c^2} = 3m_e$$

Notons que $Mc^2 \neq \sum_i m_i c^2 = m_e c^2$.

2. a) Comme $\mathbf{P}^* = \mathbf{0}$, on trouve, à l'aide des formules de transformation de $4\text{-}P$:

$$P_x^* = \gamma_e \left(P_x - \beta_e \frac{\mathcal{E}}{c} \right) = 0 \quad \text{d'où} \quad v_e = \frac{P_x c^2}{\mathcal{E}}$$

b) Comme $\mathbf{P}_{av} = \mathbf{P}_{ap}$, il vient, en projetant selon Ox :

$$P_{av} = P_{ap} \quad \text{d'où} \quad \mathcal{E}_{av} = \mathcal{E}_{ap}$$

c) La masse M du système a pour expression :

$$M = \frac{\mathcal{E}^*}{c^2} = \sum_i \frac{\gamma_i^* m_i c^2}{c^2} = \sum_i \gamma_i^* m_i$$

S7– 17. Désintégration d'une particule étrange en trois particules

1. a) Les relations entre les énergies et les quantités de mouvement des particules issues de la désintégration s'écrivent :

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4 + \mathcal{E}_5 \quad \text{et} \quad \mathbf{0} = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_5$$

b) La particule initiale étant au repos, $\mathcal{R} = \mathcal{R}^*$. Une telle désintégration n'est possible que si l'énergie de masse de A_1 est supérieure à la somme des énergies de masse des particules émergentes, d'où :

$$m_1 \geq m_3 + m_4 + m_5$$

c) Si la particule initiale est un photon, on ne peut définir de référentiel du centre de masse ; la réaction précédente est impossible. En revanche la réaction de matérialisation d'un photon en interaction avec un proton au repos est possible. Dans ce dernier cas, l'énergie seuil $\mathcal{E}_\gamma$ est :

$$\mathcal{E}_\gamma \geq \frac{(3m_e c^2)^2 - (m_e c^2)^2}{2m_e c^2} = 4m_e c^2 \approx 2,04 \text{ MeV}$$

2. a) Les lois de conservation donnent, dans ce cas :

$$m_1 c^2 = m_3 c^2 + \mathcal{E}_4 + \mathcal{E}_5 \quad \text{et} \quad \mathbf{0} = \mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_5 \quad \text{d'où} \quad \mathcal{E}_4 = \mathcal{E}_5 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_1 = m_3 c^2 + 2\mathcal{E}_4$$

Par conséquent :

$$\mathcal{E}_3 = m_3 c^2 = 135 \text{ MeV} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_4 = \frac{m_1 c^2 - m_3 c^2}{2} = 181,35 \text{ MeV}$$

b) Dans ce cas, on a :

$$m_1 c^2 = \mathcal{E}_3 + 2\mathcal{E}_4 \quad \text{et} \quad \mathbf{0} = \mathbf{p}_3 + 2\mathbf{p}_4 \quad \text{car} \quad \mathbf{p}_4 = \mathbf{p}_5$$

Il vient, en éliminant les caractéristiques de la particule A_4 :

$$4\mathcal{E}_4 - 4p_4^2 c^2 = 4m_4^2 c^4 \quad \text{soit} \quad 4(m_1 c^2 - \mathcal{E}_3)^2 - 4p_3^2 c^2 = 4m_4^2 c^4$$

En simplifiant, on obtient $m_1^2 c^4 - 2\mathcal{E}_3 m_1 c^2 + m_3^2 c^4 = 4m_4^2 c^4$, soit :

$$\mathcal{E}_3 = \frac{m_1^2 c^4 - 4m_4^2 c^4 + m_3^2 c^4}{2m_1 c^2} = 189,01 \text{ MeV} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_4 = \mathcal{E}_5 = \frac{m_1 c^2 - \mathcal{E}_3}{2} = 154,5 \text{ MeV}$$

c) Le cas précédent correspond à une valeur maximale de l'énergie de π^0 , car la norme de $\mathbf{p}_3$ est alors maximale. Le spectre énergétique des mésons π^0 varie donc entre sa valeur minimale 135 MeV et sa valeur maximale 190,1 MeV.

S7- 18. Collision élastique d'un photon avec un miroir mobile

1. Les lois de conservation donnent, en désignant par $\mathbf{p}_m$ la quantité de mouvement du miroir avant la collision :

$$\mathbf{p}_m + \mathbf{p}_\gamma = \mathbf{p}'_m + \mathbf{p}'_\gamma \quad \text{soit} \quad \mathbf{p}_m - \frac{h\nu}{c} \mathbf{e}_x = \mathbf{p}'_m + \frac{h\nu'}{c} \mathbf{e}_x \quad \text{si} \quad \mathbf{u} = u \mathbf{e}_x \quad \text{et} \quad \frac{p_m^2}{2M} + h\nu = \frac{p'^2_m}{2M} + h\nu'$$

puisque le mouvement du miroir est newtonien ($u \ll c$). Si nous remplaçons p'^2_m par son expression, il vient :

$$\frac{p_m^2}{2M} + h(\nu - \nu') = \frac{1}{2M} \left[\mathbf{p}_m - \frac{h}{c}(\nu - \nu') \mathbf{e}_x \right]^2$$

Par conséquent :

$$\nu - \nu' = (\nu + \nu') \left[\frac{h(\nu + \nu')}{2Mc^2} - \frac{u}{c} \right] \approx -(\nu + \nu')\beta_e \quad \text{et} \quad \nu' = \nu \frac{1 + \beta_e}{1 - \beta_e}$$

Pour $u = 0,01c$, on trouve :

$$\nu' = \nu \frac{1 + 0,01}{1 - 0,01} = 1,02 \nu \quad \text{d'où} \quad \lambda' = 0,980 \lambda$$

2. En utilisant l'effet Doppler-Fizeau, on a la relation suivante entre la fréquence ν_0 du photon, dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ lié au miroir, et sa fréquence ν dans $\mathcal{R}$:

$$\nu = \frac{\nu_0}{\gamma_e(1 + \beta_e)}$$

Après réflexion, la fréquence du photon dans $\mathcal{R}_0$ est encore ν_0 . Cette fréquence est liée à ν' , fréquence observée dans $\mathcal{R}$, par :

$$\nu' = \frac{\nu_0}{\gamma_e(1 - \beta_e)} \quad \text{ce qui donne bien} \quad \nu' = \nu \frac{1 + \beta_e}{1 - \beta_e}$$

S7– 19. Énergie acquise par l'électron dans l'effet Compton

1. a) L'effet Compton est la collision élastique d'un photon et d'un électron libre : le nombre et la nature des particules sont inchangés. Précisément la somme des énergies de masse vaut, avant et après la collision :

$$\sum_i m_i c^2 = \sum_f m_f c^2 = m_e c^2$$

b) Écrivons les lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie :

$$\mathbf{p}_\gamma + \mathbf{0} = \mathbf{p}'_\gamma + \mathbf{p}'_e \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_\gamma + m_e c^2 = \mathcal{E}'_\gamma + \mathcal{E}'_2$$

En éliminant les caractéristiques de l'électron diffusé, on trouve :

$$(\mathcal{E}_\gamma - \mathcal{E}'_\gamma + m_e c^2)^2 - (\mathbf{p}_\gamma - \mathbf{p}'_\gamma)^2 c^2 = m_e^2 c^4$$

d'où, en effectuant (cf. chapitre 7) :

$$\mathcal{E}'_\gamma = \frac{\mathcal{E}_\gamma}{1 + \alpha(1 - \cos \theta)} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\mathcal{E}_\gamma}{m_e c^2}$$

Pour $\mathcal{E}_\gamma = 12 \text{ keV}$ et 60° , on trouve, puisque $m_e c^2 = 511 \text{ keV}$:

$$\alpha = 0,02348 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}'_\gamma = 11,86 \text{ keV}$$

2. L'énergie cinétique acquise par l'électron est la différence entre l'énergie du photon incident et l'énergie du photon diffusé :

$$\mathcal{E}'_k = \mathcal{E}_\gamma - \mathcal{E}'_\gamma = \mathcal{E}_\gamma \left[1 - \frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos \theta)} \right] = \mathcal{E}_\gamma \left[\frac{\alpha(1 - \cos \theta)}{1 + \alpha(1 - \cos \theta)} \right]$$

L'énergie cinétique de l'électron est minimale ou maximale lorsque la dérivée $d\mathcal{E}'_k / d\theta = 0$ soit :

$$\frac{d\mathcal{E}'_k}{d\theta} = \mathcal{E}_\gamma \frac{\alpha \sin \theta}{[1 + \alpha(1 - \cos \theta)]^2} = 0 \quad \text{soit} \quad \theta = 0 \quad \text{ou} \quad \theta = \pi$$

Dans ce dernier cas l'énergie cinétique est maximale et vaut :

$$\mathcal{E}'_{k,max} = \mathcal{E}_\gamma \frac{2\alpha}{1 + 2\alpha} = 538,3 \text{ eV}$$

On en déduit l'écart spectral correspondant :

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{hc}{\mathcal{E}'_\gamma} - \frac{hc}{\mathcal{E}_\gamma} = \frac{1239,8}{12 - 0,5383} - \frac{1239,8}{12} = 108,17 - 103,3 = 4,87 \text{ pm}$$

3. a) La vitesse du référentiel du centre de masse est donnée par (cf. chapitre 7) :

$$\beta_e = \frac{P_{x,c}}{\mathcal{E}} = \frac{P_{\gamma,x,c}}{\mathcal{E}_\gamma + m_e c^2} = \frac{\mathcal{E}_\gamma}{\mathcal{E}_\gamma + m_e c^2} = \frac{\alpha}{1 + \alpha} = 0,023$$

En mécanique newtonienne, on aurait trouvé $\beta_e = 0$, puisque la masse du photon est nulle et l'électron au repos :

$$\mathbf{v}_C = \frac{m_\gamma \mathbf{v}_\gamma + m_e \mathbf{v}_e}{m_\gamma + m_e} = \mathbf{0}$$

b) Les formules de transformation du quadrivecteur quantité de mouvement énergie, entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$, donnent :

$$\mathcal{E}_\gamma^* = \gamma_e (\mathcal{E}_\gamma - \beta_e p_{\gamma,x,c}) = \gamma_e \mathcal{E}_\gamma (1 - \beta_e) = \mathcal{E}_\gamma \left(\frac{1 - \beta_e}{1 + \beta_e} \right)^{1/2}$$

On reconnaît la formule de l'effet Doppler-Fizeau longitudinal, ce qui se justifie aisément en divisant les deux membres de l'égalité par h pour faire apparaître les fréquences. Pour des photons incidents de 12 keV, on a, puisque $\beta_e = 0,023$:

$$\mathcal{E}_\gamma^* = 0,977 \mathcal{E}_\gamma = 11,727 \text{ keV}$$

c) On obtient l'énergie cinétique de l'électron dans $\mathcal{R}^*$ de façon analogue :

$$\mathcal{E}_e^* = \gamma_e (\mathcal{E}_e - \beta_e p_e c) = \gamma_e m_e c^2 = 511,135 \text{ keV} \quad \text{d'où} \quad \mathcal{E}_k^* = \mathcal{E}_e^* - m_e c^2 \approx 135 \text{ eV}$$

d) On sait que l'énergie de chaque particule se conserve au cours d'une collision élastique (cf. chapitre 7) :

$$\mathcal{E}_\gamma^{*'} = \mathcal{E}_\gamma^* = 11,727 \text{ keV} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_e^{*'} = \mathcal{E}_e^* = 511,135 \text{ keV}$$

4. En projection, la conservation de la quantité de mouvement, $\mathbf{p}_\gamma = \mathbf{p}_\gamma' + \mathbf{p}_e$, s'écrit :

$$p_\gamma = p_\gamma' \cos \theta + p_e \cos \varphi \quad \text{et} \quad 0 = p_\gamma' \sin \theta + p_e \sin \varphi$$

On en déduit aisément :

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{p_\gamma' \sin \theta}{p_\gamma - p_\gamma' \cos \theta} \quad \text{soit} \quad \tan \varphi = \frac{\sin \theta}{(\mathcal{E}_\gamma / \mathcal{E}_\gamma') - \cos \theta}$$

Comme $\mathcal{E}_\gamma / \mathcal{E}_\gamma' = 1 + \alpha(1 - \cos \theta)$, il vient :

$$\tan \varphi = \frac{\sin \theta}{1 + \alpha(1 - \cos \theta) - \cos \theta} \quad \text{ce qui s'écrit} \quad \frac{1}{\tan \varphi} = (1 + \alpha) \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = -(1 + \alpha) \frac{1}{\tan(\theta/2)}$$

On trouve finalement :

$$\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \times \tan |\varphi| = \frac{1}{1 + K} \quad \text{avec} \quad K = \alpha = \frac{\mathcal{E}_\gamma}{m_e c^2}$$

Pour $\theta = 60^\circ$, on a :

$$\tan |\varphi| = \frac{1}{(1 + \alpha) \tan(\pi/6)} = \frac{\sqrt{3}}{1,02348} \quad \text{soit} \quad \varphi = 59,4^\circ$$

S7– 20. Effet Compton avec cible en mouvement

1. Les lois de conservation s'écrivent :

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' \quad \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1' + \mathcal{E}_2'$$

Éliminons les caractéristiques de l'électron après collision :

$$(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1')^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1')^2 c^2 = m_2^2 c^4 \quad \text{soit} \quad (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_1')^2 + 2(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_1')\mathcal{E}_2 - (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1')^2 c^2 + 2(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1') \cdot \mathbf{p}_2 c^2 = 0$$

puisque $\mathcal{E}_2^2 - p_2^2 c^2 = m_2^2 c^4$. Or :

$$\mathcal{E}_1 = p_1 c \quad \mathcal{E}_1' = p_1' c \quad \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 c^2 = -p_1 p_2 c^2 = -\mathcal{E}_1 p_2 c \quad \text{et} \quad \mathbf{p}_1' \cdot \mathbf{p}_2 c^2 = -p_1' p_2 c^2 \cos \theta = -\mathcal{E}_1' p_2 c \cos \theta$$

Par conséquent :

$$2(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_1')\mathcal{E}_2 - 2\mathcal{E}_1\mathcal{E}_1'(1 - \cos \theta) + 2\mathcal{E}_1 p_2 c - 2\mathcal{E}_1' p_2 c \cos \theta = 0$$

On en déduit $\mathcal{E}_1'$:

$$\mathcal{E}_1' = \frac{\mathcal{E}_1 (\mathcal{E}_2 + p_2 c)}{\mathcal{E}_1 (1 - \cos \theta) + \mathcal{E}_2 + p_2 \cos \theta}$$

En fonction des fréquences $\nu = \mathcal{E}_1/h$ et $\nu' = \mathcal{E}_1'/h$, de la quantité de mouvement p de l'électron cible et de son énergie, on trouve finalement :

$$h\nu' = \frac{h\nu(\mathcal{E}_2 + pc)}{h\nu(1 - \cos \theta) + \mathcal{E}_2 + p_2 \cos \theta}$$

2. On retrouve l'effet Compton habituel en faisant $p = 0$ et $\mathcal{E}_2 = mc^2$:

$$h\nu' = \frac{h\nu}{h\nu(1 - \cos\theta)/mc^2 + 1} \quad \text{et} \quad h\nu - h\nu' = \frac{h^2\nu\nu'}{mc^2}(1 - \cos\theta)$$

Il en résulte que :

$$\lambda' - \lambda = \frac{c}{\nu'} - \frac{c}{\nu} = \lambda_C(1 - \cos\theta) \quad \text{avec} \quad \lambda_C = \frac{h}{mc}$$

3. Lorsque $\theta = \pi$:

$$h\nu' = h\nu \frac{\mathcal{E}_2 + p_2 c}{\mathcal{E}_2 - p_2 c + 2h\nu}$$

Si $\mathcal{E}_{k,2} = 3 \text{ MeV}$, $\mathcal{E}_2 = 3,511 \text{ MeV}$ et $p_2 c = (\mathcal{E}^2 - m^2 c^4)^{1/2} = [\mathcal{E}_{k,2}(\mathcal{E}_{k,2} + 2mc^2)]^{1/2} = 3,474 \text{ MeV}$. On en déduit :

$$h\nu' \approx 2 \frac{6,985}{0,037} = 377,6 \text{ eV} \quad \text{ce qui correspond à un rayonnement X}$$

S7- 21. Désintégration symétrique du méson π^0 en deux photons

Les conservations de $\mathbf{p}$ et $\mathcal{E}$ donnent :

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 \quad \text{et} \quad \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 \quad \text{avec} \quad p_2 = p_3 = p \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 = \mathcal{E}$$

Il en résulte :

$$\mathcal{E}_1 = 2\mathcal{E} = 2h\nu \quad \text{et} \quad p_1 = 2p \cos\theta = 2\left(\frac{\mathcal{E}}{c}\right) \cos\theta = \left(\frac{\mathcal{E}_1}{c}\right) \cos\theta$$

Comme $\mathcal{E}_1^2 - p_1^2 c^2 = m_1^2 c^4$, il vient :

$$\mathcal{E}_1^2(1 - \cos^2\theta) = m_1^2 c^4 \quad \text{soit} \quad \sin^2\theta = \frac{1}{\gamma^2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

A.N : Si $v = c/2$, $\theta = 60^\circ$. Notons que le résultat est indépendant de la masse de la particule qui se désintègre.

S7- 22. Matérialisation d'un photon

1. D'après les lois de conservation, on aurait :

$$\frac{h\nu}{c} \mathbf{e}_x = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 \quad \text{et} \quad h\nu = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$$

Or :

$$\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 = (p_2^2 c^2 + m_2^2 c^4)^{1/2} + (p_3^2 c^2 + m_3^2 c^4)^{1/2} > (p_2 + p_3)c \quad \text{et} \quad p_2 + p_3 > \frac{h\nu}{c}$$

On en déduit $\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 > h\nu$, ce qui est absurde, puisque $\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 = h\nu$.

2. Le seuil énergétique de la seconde réaction s'obtient aisément :

$$\mathcal{E}_\gamma = \frac{(m_X c^2 + 2m_e c^2)^2 - m_X^2 c^4}{2m_X c^2} = 2m_e c^2 \frac{(m_e c^2 + m_X c^2)}{m_X c^2} \approx 2m_e c^2 = 1,022 \text{ MeV}$$

La longueur d'onde correspondante est dans le domaine γ :

$$\lambda_\gamma = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{\mathcal{E}_\gamma} \approx \frac{1240}{1,022 \times 10^6} = 1,21 \times 10^{-3} \text{ nm} \quad \text{soit} \quad \lambda_\gamma = 1,21 \text{ pm}$$

S7- 23. Collision inélastique photon-proton

1. La relation demandée s'obtient en exprimant l'invariance du carré de la pseudo-norme du quadrivecteur $4\text{-}P$:

$$(\mathcal{E}_\gamma + m_p c^2)^2 - P^2 c^2 = \mathcal{E}^{*2} \quad \text{avec} \quad P^2 c^2 = p_\gamma^2 c^2 = \mathcal{E}_\gamma^2$$

2. Dans $\mathcal{R}^*$, le seuil énergétique du photon incident est (cf. chapitre 7) :

$$\mathcal{E}^* = m_e c^2 + m_\pi c^2 = 1076 \text{ MeV}$$

3. Dans $\mathcal{R}$, ce seuil s'en déduit selon (cf. chapitre 7) :

$$\mathcal{E}_\gamma = \frac{(m_e c^2 + m_\pi c^2)^2 - m_p^2 c^4}{2m_p c^2} = 151 \text{ MeV}$$

S7– 24. Annihilation d'une paire électron-positron

1. Les lois de conservation s'écrivent :

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_{\gamma,1} + \mathbf{p}_{\gamma,2} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_{\gamma,1} + \mathcal{E}_{\gamma,2} \quad \text{soit} \quad 2\mathcal{E}_1 = 2\mathcal{E}_{\gamma,1}$$

puisque les quantités de mouvement des particules incidentes et aussi émergentes sont opposées. Il en résulte :

$$\mathcal{E}_{\gamma,1} = \mathcal{E}_{\gamma,2} = \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{k,1} + m_e c^2 \quad \text{d'où} \quad \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{\mathcal{E}_{k,1} + m_e c^2} = \frac{1240}{3,511 \times 10^6} = 0,35 \text{ nm}$$

2. Lorsque les vitesses des particules incidentes font entre elles un angle α au moment de leur rencontre, la conservation de la quantité de mouvement totale donne :

$$(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = (\mathbf{p}_{\gamma,1} + \mathbf{p}_{\gamma,2})^2 \quad \text{soit} \quad p_1^2 + p_2^2 + 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = (p_{\gamma,1} - p_{\gamma,2})^2$$

puisque les photons sont émis dans la même direction, mais dans des sens opposés. Les particules incidentes ayant même énergie, il vient :

$$2p_1^2 c^2 (1 + \cos \alpha) = (\mathcal{E}_{\gamma,1} - \mathcal{E}_{\gamma,2})^2 \quad \text{soit} \quad 4(\mathcal{E}_1^2 - m_e^2 c^4) \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) = (\mathcal{E}_{\gamma,1} - \mathcal{E}_{\gamma,2})^2$$

Ainsi :

$$\mathcal{E}_{\gamma,1} - \mathcal{E}_{\gamma,2} = 2(\mathcal{E}_1^2 - m_e^2 c^4)^{1/2} \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{\gamma,1} + \mathcal{E}_{\gamma,2} = 2\mathcal{E}_1$$

d'après la conservation de l'énergie. On en déduit aisément :

$$\mathcal{E}_{\gamma,1} = \mathcal{E}_k + m_e c^2 + \mathcal{E}_k^{1/2} (\mathcal{E}_k + 2m_e c^2)^{1/2} \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{\gamma,2} = \mathcal{E}_k + m_e c^2 - \mathcal{E}_k^{1/2} (\mathcal{E}_k + 2m_e c^2)^{1/2} \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right)$$

Les valeurs des énergies des photons sont donc :

$$\mathcal{E}_{\gamma,1} = 3,511 + \sqrt{3} \times \sqrt{4,022} \times \frac{1}{2} = 5,25 \text{ MeV} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{\gamma,2} = 3,511 - \sqrt{3} \times \sqrt{4,022} \times \frac{1}{2} = 1,77 \text{ MeV}$$

On en déduit :

$$\lambda_1 = \frac{1240}{5,25 \times 10^6} = 0,236 \text{ nm} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{1240}{1,77 \times 10^6} = 0,7 \text{ nm}$$

S7– 25. Désintégrations successives

1. Les lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie s'écrivent dans $\mathcal{R}$, respectivement :

$$\mathbf{p}_K = \mathbf{p}_{\pi^+} + \mathbf{p}_{\pi^0} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_K = \mathcal{E}_{\pi^+} + \mathcal{E}_{\pi^0} = m_K c^2$$

puisque le méson K est au repos. Il résulte de la première équation :

$$\mathcal{E}_{\pi^+}^2 - m_{\pi^+}^2 c^4 = \mathcal{E}_{\pi^0}^2 - m_{\pi^0}^2 c^4 \quad \text{d'où} \quad \mathcal{E}_{\pi^+}^2 - \mathcal{E}_{\pi^0}^2 = (\mathcal{E}_{\pi^+} - \mathcal{E}_{\pi^0}) m_K c^2 = m_{\pi^+}^2 c^4 - m_{\pi^0}^2 c^4$$

On en déduit aisément :

$$\mathcal{E}_{\pi^+} = \frac{m_K^2 c^4 + m_{\pi^+}^2 c^4 - m_{\pi^0}^2 c^4}{2m_K c^2} = 245,6 \text{ MeV} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{\pi^0} = \frac{m_K^2 c^4 - m_{\pi^+}^2 c^4 + m_{\pi^0}^2 c^4}{2m_K c^2} = 248,4 \text{ MeV}$$

2. Pour calculer θ_1 et θ_2 , écrivons les lois de conservation relatives à la désintégration en vol :

$$\mathbf{p}_{\pi^0} = \mathbf{p}_{\gamma,1} + \mathbf{p}_{\gamma,2} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{\pi^0} = \mathcal{E}_{\gamma,1} + \mathcal{E}_{\gamma,2} = 2\mathcal{E}_{\gamma,1} = \mathcal{E}_{\gamma}$$

Comme les normes des quantités de mouvement des photons sont égales (même énergie), les vecteurs $\mathbf{p}_{\gamma,1}$ et $\mathbf{p}_{\gamma,2}$ sont symétriques par rapport à la direction de $\mathbf{p}_{\pi^0}$. Les angles de diffusion sont donc égaux en valeur absolue. La prise en compte de cette valeur commune θ donne :

$$p_{\pi^0}^2 = p_{\gamma,1}^2 + p_{\gamma,2}^2 + 2\mathbf{p}_{\gamma,1} \cdot \mathbf{p}_{\gamma,2} = 2p_{\gamma,1}^2 [1 + \cos(2\theta)] = 4p_{\gamma,1}^2 \cos^2 \theta \quad \text{soit} \quad p_{\pi^0} = 2p_{\gamma,1} \cos \theta = 2\mathcal{E}_{\gamma,1} \cos \theta = \mathcal{E}_{\pi^0} \cos \theta$$

On en déduit :

$$\cos \theta = \frac{p_{\pi^0}}{\mathcal{E}_{\pi^0}} = \beta_0 \quad \text{avec} \quad \beta_0 = \left(1 - \frac{1}{\gamma_0^2}\right)^{-1/2} \quad \text{et} \quad \gamma_0 = \frac{\mathcal{E}_{\pi^0}}{m_{\pi^0} c^2} = \frac{248,4}{135} = 1,84$$

Le calcul donne $\beta_0 = 0,836$ et $\theta = 33,3^\circ$.

3. La fréquence ν , associée aux photons d'énergie $\mathcal{E}_{\gamma} = \mathcal{E}_{\pi^0}/2$, avec $\mathcal{E}_{\pi^0} = \gamma_0 m_{\pi^0} c^2$, est donc :

$$\nu = \frac{\gamma_0 m_{\pi^0} c^2}{2h}$$

Comme $m_{\pi^0} c^2 / (2h)$ représente la fréquence ν_0 des photons émis dans le référentiel lié au méson π^0 , on a la relation suivante entre ν et ν_0 : $\nu = \gamma_0 \nu_0$. Cette dernière relation s'écrit aussi, puisque $\cos \theta = \beta_0 = v/c$:

$$\frac{\nu_0}{\nu} = \frac{1}{\gamma_0} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} = \frac{1 - v^2/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = \frac{1 - v \cos \theta / c}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \quad \text{soit} \quad \nu = \frac{\nu_0}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)}$$

La formule donnée dans le texte est la relation caractéristique de l'effet Doppler-Fizeau sachant que, dans ce cas v est la vitesse de la source (cf. chapitre 3).

S7- 26. Émission et absorption d'un photon par un atome et un noyau

1. Comme $h\nu = hc/\lambda_0 = \Delta\mathcal{E}$, il vient :

$$\lambda_0 = \frac{hc}{\Delta\mathcal{E}} = \frac{hc}{e\Delta\mathcal{E}(\text{eV})} = \frac{1240}{\Delta\mathcal{E}(\text{eV})} \text{ nm}$$

On en déduit :

$$\lambda_0(\text{Na}) = 590,4 \text{ nm} \quad \text{et} \quad \lambda_0(\text{Fe}) = 0,086 \text{ nm}$$

2. a) En raison de la faiblesse de l'énergie des photons émis ou absorbés devant celle des atomes et des noyaux, les énergies de recul peuvent être calculées à partir de leurs expressions newtoniennes.

b) Les lois de conservation de $\mathbf{p}$ et $\mathcal{E}$ donnent, dans le cas de l'émission :

$$\mathbf{0} = \frac{h\nu}{c} \mathbf{n} + \mathbf{p}'_a \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 + h\nu + \mathcal{E}'_k$$

On en déduit :

$$h\nu = \Delta\mathcal{E} \left(1 - \frac{\Delta\mathcal{E}}{2mc^2}\right) \quad \text{d'où} \quad \nu_e = \nu_0 \left(1 - \frac{\Delta\mathcal{E}}{2mc^2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\nu_e - \nu_0}{\nu_0} = -\frac{\Delta\mathcal{E}}{2mc^2} \approx -\frac{\lambda_e - \lambda_0}{\lambda_0}$$

Pour l'absorption, le raisonnement est analogue :

$$\frac{h\nu}{c} \mathbf{n} = \mathbf{p}'_a \quad \text{et} \quad h\nu + \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}'_k$$

Comme :

$$\mathcal{E}'_k = \frac{p_a'^2}{2m} = \frac{h^2 \nu^2}{2mc^2} \quad \text{on trouve} \quad h\nu \approx \Delta\mathcal{E} + \frac{\Delta\mathcal{E}^2}{2mc^2} = \Delta\mathcal{E} \left(1 + \frac{\Delta\mathcal{E}}{2mc^2}\right)$$

Il en résulte que :

$$\nu_a = \nu_0 \left(1 + \frac{\Delta\mathcal{E}}{2mc^2} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\nu_a - \nu_0}{\nu_0} = \frac{\Delta\mathcal{E}}{2mc^2} \approx -\frac{\Delta\mathcal{E}}{2mc^2} \approx -\frac{\lambda_a - \lambda_0}{\lambda_0}$$

c) On en déduit les écarts relatifs :

$$\frac{\lambda_e - \lambda_0}{\lambda_0} = -\frac{\lambda_a - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\Delta\mathcal{E}}{2mc^2}$$

Application numérique :

$$\left(\frac{\delta\lambda}{\lambda_0} \right)_{\text{Na}} = 4,87 \times 10^{-11} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\delta\lambda}{\lambda_0} \right)_{\text{Fe}} = 1,35 \times 10^{-7}$$

3. a) D'après la théorie cinétique des gaz, la vitesse quadratique moyenne v_q est telle que :

$$\frac{3k_B T}{2} = \frac{mv_q^2}{2} \quad \text{d'où} \quad v_q = \left(\frac{3k_B T}{m} \right)^{1/2} = 570 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La formule de l'effet Doppler-Fizeau relie $\Delta\lambda/\lambda$ à v_q :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_q}{c} \quad \text{d'où} \quad \Delta\lambda = \lambda \frac{v_q}{c} = 1,1 \text{ pm} \quad \text{puisque} \quad \lambda = \frac{1239,8}{\Delta\mathcal{E}(\text{eV})} \approx 590 \text{ nm}$$

b) Comme la masse est celle du cristal, c'est-à-dire 1 g, et $\mathcal{E}_\gamma = 14,4 \text{ keV}$, on a :

$$\frac{\lambda_e - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\Delta\mathcal{E}}{2mc^2} = 1,28 \times 10^{-29} \quad \text{car} \quad mc^2 = \frac{10^{-3} \times 9 \times 10^{16}}{1,6 \times 10^{-19}} = 5,6 \times 10^{32} \text{ eV}$$

Le décalage dû au recul du noyau est négligeable devant la largeur naturelle énergétique de la raie.

S7- 27. Perte d'énergie maximale d'une particule au cours d'une collision élastique

1. Calculons, dans les trois cas, pour A_1 , $\mathcal{E}_1$, γ_1 , β_1 et p_1 :

i) Pour un hélium (particule α), d'énergie cinétique $\mathcal{E}_k = 5 \text{ MeV}$:

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{k,1} + m_\alpha c^2 = 5 + 3727 = 3732 \text{ MeV} \quad \gamma_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{m_\alpha c^2} = 1,0013$$

$$\beta_1 = \left(1 - \frac{1}{\gamma_1^2} \right)^{1/2} = 0,052 \quad \text{et} \quad p_1 = \gamma_1 \beta_1 m_\alpha c = 1,0013 \times 0,052 \times 3727 = 193,1 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-1}$$

ii) Pour un électron, d'énergie cinétique $\mathcal{E}_{k,1} = 3 \text{ MeV}$:

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{k,1} + m_e c^2 = 3 + 0,511 = 3,511 \text{ MeV} \quad \gamma_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{m_e c^2} = 6,87$$

$$\beta_1 = \left(1 - \frac{1}{\gamma_1^2} \right)^{1/2} = 0,989 \quad \text{et} \quad p_1 = 6,87 \times 0,989 \times 0,511 = 3,473 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-1}$$

iii) Pour un photon, d'énergie cinétique $\mathcal{E}_{k,1} = 2 \text{ MeV}$:

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{k,1} = 2 \text{ MeV} \quad \gamma_1 = \infty \quad \beta_1 = 1 \quad p_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{c} = 2 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-1} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{hc}{\mathcal{E}_1} = 0,621 \text{ pm}$$

2. a) Exprimons, dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, les lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie pour cette collision élastique, sachant que l'électron cible A_2 est au repos dans $\mathcal{R}$:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_1 + m_e c^2 = \mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2$$

b) L'équation reliant $p'_2 c$ à $\mathcal{E}'_{k,2}$ s'obtient aisément à l'aide de la relation entre énergie et quantité de mouvement pour toute particule en relativité :

$$\mathcal{E}^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 \quad \text{soit} \quad \mathcal{E}^2 - m^2 c^4 = p^2 c^2$$

On a donc :

$$p_2'^2 c^2 = (\mathcal{E}'_2 - m_e c^2)(\mathcal{E}'_2 + m_e c^2) = \mathcal{E}'_{k,2}(\mathcal{E}'_{k,2} + 2m_e c^2)$$

c) Éliminons, dans les lois de conservation, les caractéristiques dynamiques de la particule incidente diffusée A'_1 :

$$(\mathcal{E}_1 + m_e c^2 - \mathcal{E}'_2)^2 - (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_2)^2 c^2 = m_1^2 c^4$$

soit :

$$(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}'_{k,2})^2 - p_1^2 c^2 - p_2'^2 c^2 + 2p_1 p_2' c^2 \cos \theta_2 = m_1^2 c^4$$

On en déduit, en simplifiant, puisque $\mathcal{E}_1^2 - p_1^2 c^2 = m_1^2 c^4$, et en tenant compte de la relation entre p'_2 et $\mathcal{E}'_{k,2}$:

$$\mathcal{E}'_{k,2}(\mathcal{E}'_{k,2} - 2\mathcal{E}_1) = p_2'^2 c^2 - 2p_1 p_2' c^2 \cos \theta_2$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\mathcal{E}'_{k,2}(\mathcal{E}'_{k,2} - 2\mathcal{E}_1) = \mathcal{E}'_{k,2}(\mathcal{E}'_{k,2} + 2m_e c^2) - 2p_1 p_2' c^2 \cos \theta_2$$

Finalement, il vient :

$$\mathcal{E}'_{k,2}(E_1 + m_e c^2) = p_1 p_2' c^2 \cos \theta_2$$

Ainsi, K qui est homogène à une énergie, s'identifie à l'énergie de masse de l'électron : $K = m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}$.

d) On élimine p'_2 entre les deux relations obtenues en b) et en c), en élevant au carré cette dernière relation :

$$\mathcal{E}_{k,2}^2 (\mathcal{E}_1 + m_e c^2)^2 = p_1^2 c^2 \cos^2 \theta_2 \mathcal{E}_{k,2}^2 (\mathcal{E}'_{k,2} + 2m_e c^2) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{k,2}^2 (\mathcal{E}_1 + m_e c^2)^2 = p_1^2 c^2 \cos^2 \theta_2 (\mathcal{E}'_{k,2} + 2m_e c^2)$$

Par conséquent :

$$\mathcal{E}_{k,2} = \frac{2m_e c^2 p_1^2 c^2 \cos^2 \theta_2}{(\mathcal{E}_1 + m_e c^2)^2 - p_1^2 c^2 \cos^2 \theta_2}$$

3. a) La valeur maximale $Q_{\max}$ de la perte d'énergie subie par le projectile s'obtient aisément en faisant $\cos^2 \theta_2 = 1$:

$$Q_{\max} = \frac{2m_e c^2 p_1^2 c^2}{(\mathcal{E}_1 + m_e c^2)^2 - p_1^2 c^2}$$

Si on explicite p_1 et $\mathcal{E}_1$, on trouve :

$$Q_{\max} = m_e c^2 \frac{2\gamma_1^2 \beta_1^2 m_1^2 c^4}{m_1^2 c^4 + m_e^2 c^4 + 2\gamma_1 m_1 c^2 m_e c^2} \quad \text{soit} \quad Q_{\max} = m_e c^2 \frac{2(\gamma_1^2 - 1)m_1^2}{m_1^2 + m_e^2 + 2\gamma_1 m_e m_1}$$

Finalement :

$$Q_{\max} = \frac{2m_e c^2 m_1 c^2 (\gamma_1 + 1)}{m_1^2 c^4 + m_e^2 c^4 + 2\gamma_1 m_e m_1 c^4} \mathcal{E}_{k,1} \quad \text{d'où} \quad K = m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}$$

b) Étudions $Q_{\max}$ pour $m_1 = m_e$:

$$Q_{\max} = \frac{2K m_e c^2 (\gamma_1 + 1)}{2m_e^2 c^4 (1 + \gamma_1)} \mathcal{E}_{k,1} = \frac{K(\gamma_1 + 1)}{m_e c^2 (1 + \gamma_1)} \mathcal{E}_{k,1} = \mathcal{E}_{k,1} = (\gamma_1 - 1)m_e c^2$$

Pour obtenir l'approximation newtonienne, il suffit de faire $\gamma_1 \approx 1$ dans l'expression précédente : $Q_{\max} = m_e v_1^2 / 2$.

c) Dans le cas de l'hélium, $m_1 \gg m_e$

$$Q_{\max} \approx \frac{2K(\gamma_1 + 1)}{m_1 c^2} \mathcal{E}_{k,1} = \frac{2m_e(\gamma_1 + 1)}{m_1} \mathcal{E}_{k,1}$$

ce qui donne, dans l'approximation newtonienne :

$$Q_{\max,N} \approx \frac{4K}{m_1 c^2} \mathcal{E}_{k,1} = \frac{4m_e}{m_1} \mathcal{E}_{k,1} \ll \mathcal{E}_{k,1}$$

On voit que $Q_{\max} \approx \mathcal{E}_{k,1}$, si :

$$\frac{2m_e(\gamma_1 + 1)}{m_1} \approx 1 \quad \text{soit} \quad \gamma_1 \approx \frac{m_1}{2m_e} - 1 = 3\,645,77$$

ce qui est énorme, mais envisageable en astrophysique. Notons que $\gamma_1 = 3\,645,77$ correspond à $v_1 = 0,999999962\,c$!

4. a) Pour un photon incident, on obtient l'expression de $Q_{\max}$ en faisant $m_1 = 0$, mais $\gamma_1 m_1 c^2 = \mathcal{E}_1$:

$$Q_{\max} = \frac{2m_e m_1 (\gamma_1 + 1)}{m_1^2 + m_e^2 + 2\gamma_1 m_e m_1} \mathcal{E}_{k,1} = \frac{2m_e m_1 \gamma_1}{m_e^2 + 2\gamma_1 m_e m_1} \mathcal{E}_{k,1}$$

soit :

$$Q_{\max} = \frac{1}{1 + m_e/(2\gamma_1 m_1)} \mathcal{E}_{k,1} = \frac{\mathcal{E}_{k,1}}{1 + m_e c^2/(2\mathcal{E}_{k,1})}$$

Application numérique :

$$Q_{\max} = \frac{2}{1 + 0,511/4} = 1,77 \text{ MeV}$$

b) La fréquence ν' du photon diffusé est telle que :

$$Q_{\max} = h\nu - h\nu' \quad \text{d'où} \quad h\nu' = h\nu - Q_{\max} = h\nu \left[1 - \frac{1}{1 + m_e c^2/(2h\nu)} \right]$$

Il vient en introduisant les longueurs d'onde :

$$\frac{1}{\lambda'} = \frac{1}{\lambda} \left[1 - \frac{1}{1 + \lambda/(2\lambda_C)} \right] \quad \text{où} \quad \lambda_C = \frac{h}{m_e c}$$

est la longueur d'onde Compton. On en déduit l'écart spectral :

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_C$$

ce qui est l'écart maximal en longueur d'onde dans l'effet Compton. Numériquement, on a :

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{\mathcal{E}} = \frac{1240}{2 \times 10^6} = 0,62 \text{ pm} \quad \text{et} \quad \Delta\lambda = 2\lambda_C = 4,85 \text{ pm}$$

Notons que ce dernier est indépendant de l'énergie du photon incident.

S7– 28. Fusée rapide

1. Par rapport à $\mathcal{R}$, la vitesse d'éjection w des gaz s'obtient en composant les vitesses suivant le mouvement :

$$w = \frac{-u + v}{1 - uv/c^2} = \frac{-0,1 + 0,3}{1 - 0,03} c = 0,206 c$$

2. Les lois de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement du système, entre les instants voisins t et $t + dt$, s'écrivent respectivement :

$$d(\gamma_v M c^2) + \gamma_w dm c^2 = 0 \quad \text{et} \quad d\mathbf{P} = d(\gamma_v M \mathbf{v}) + \gamma_w w dm = \mathbf{0}$$

3. En combinant les équations précédentes, on trouve :

$$\gamma_v \mathbf{v} dM + \gamma_v M d\mathbf{v} + M \mathbf{v} d\gamma_v - w d(\gamma_v M) = 0$$

ce qui donne, en projection selon l'axe du mouvement :

$$\gamma_v v dM + \gamma_v M dv + M \beta_v^2 \gamma_v^3 dv - w \gamma_v dM - M w \gamma_v^3 \frac{v dv}{c^2} = 0 \quad \text{car} \quad d\gamma_v = \gamma_v^3 \frac{v dv}{c^2}$$

En effectuant, on obtient, puisque $1 + \beta_v^2 \gamma_v^2 = \gamma_v^2$:

$$\gamma_v M \left(1 + \beta_v^2 \gamma_v^2 - \frac{wv}{c^2} \gamma_v^2 \right) dv + \gamma_v (v - w) dM = 0 \quad \text{soit} \quad \gamma_v^2 M \left(1 - \frac{wv}{c^2} \right) dv + (v - w) dM = 0$$

Si on tient compte de la relation entre u , v et w , il vient, en notant que $v - w = (1 - wv/c^2)$:

$$\gamma_v^2 \left(1 - \frac{wv}{c^2} \right) \left(M dv + \frac{u dM}{\gamma_v^2} \right) = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{dM}{M} = - \frac{\gamma_v^2 dv}{u} = - \frac{dv}{u(1 - v^2/c^2)}$$

4. Pour établir la relation entre v , u et M , il suffit d'intégrer l'équation précédente :

$$\frac{dM}{M} = - \frac{1}{2u} \left(\frac{dv}{1 + v/c} + \frac{dv}{1 - v/c} \right) \quad \text{donne} \quad \ln \left(\frac{M}{M_0} \right) = - \frac{c}{2u} \left[\ln \left(1 + \frac{v}{c} \right) + \ln \left(1 - \frac{v}{c} \right) \right]$$

Or, à l'instant initial $v = v_0$ et $M = M_0$:

$$\ln \left(\frac{M_0}{M_0} \right) = - \frac{c}{2u} \left[\ln \left(1 + \frac{v_0}{c} \right) - \ln \left(1 - \frac{v_0}{c} \right) \right]$$

Il vient en effectuant la différence des deux relations précédentes :

$$\ln \left(\frac{M}{M_0} \right) = - \frac{c}{2u} \left[\ln \frac{(1 + v/c)(1 - v_0/c)}{(1 - v/c)(1 + v_0/c)} \right]$$

Pour $v_0 = 0$, on trouve :

$$\ln \left(\frac{M}{M_0} \right) = - \frac{c}{2u} \left[\ln \frac{(1 + v/c)}{(1 - v/c)} \right] = - \frac{1}{0,2} \left[\ln \frac{(1 + 0,3)}{(1 - 0,3)} \right] = -3,095 \quad \text{d'où} \quad \frac{M}{M_0} = \exp(-3,095) = 0,045$$

5. Si on fait $v \ll c$, on retrouve le résultat newtonien (cf. *Mécanique*) :

$$\ln \left(\frac{M}{M_0} \right) \approx - \frac{c}{2u} \left[\frac{v}{c} - \frac{v_0}{c} + \frac{v}{c} - \frac{v_0}{c} \right] = - \frac{v - v_0}{u} \quad \text{soit} \quad v - v_0 = u \ln \left(\frac{M_0}{M} \right)$$

S7- 29. Trajet d'un électron dans un microscope entre son émission et sa détection

1. Pour exprimer le facteur relativiste γ_a à la sortie de l'anode, en fonction de V_a , il suffit d'exprimer la conservation de l'énergie entre la cathode portée au potentiel $-V_a$ et l'anode connectée à la masse (cf. chapitre 5) :

$$0 + m_e c^2 + (-e)(-V_a) = (\gamma - 1)m_e c^2 + m_e c^2 \quad \text{d'où} \quad \gamma_a = 1 + \frac{eV_a}{m_e c^2} = 1 + \frac{1,5}{0,511} = 3,935$$

On en déduit β_a et p_a aisément :

$$\beta_a = \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right)^{1/2} = 0,967 \quad \text{et} \quad p_a = \gamma_a \beta_a m_e c = 3,935 \times 0,967 \times 0,511 \times 10^6 = 1,945 \text{ MeV} \cdot c^{-1}$$

2. Dans la région où règne un champ magnétique constant $\mathbf{B}$, normal à la direction de $\mathbf{v}_a$, la trajectoire de l'électron est un cercle dont le rayon de courbure R est tel que (cf. chapitre 6) :

$$\frac{\gamma m_e v_a^2}{R} = e v_a B \quad \text{d'où} \quad B = \frac{p_a}{eR} = \frac{1,945 \times 10^6}{3 \times 10^8 \times 0,12} \approx 54 \text{ mT}$$

3. a) Comme le nombre et la nature des particules changent dans ces réactions, ces deux collisions sont inélastiques.

b) On sait que le seuil énergétique est donnée par l'expression (cf. chapitre 7) :

$$\mathcal{E}_{k,s} = \frac{(\sum_f m_f c^2)^2 - (\sum_i m_i c^2)^2}{2m_N c^2}$$

ce qui donne, dans la première réaction :

$$\mathcal{E}_{k,s} = \frac{(m_e c^2 + m_N c^2 + 0)^2 - (m_e c^2 + m_N c^2)^2}{2m_N c^2} = 0$$

Il n'y a donc pas de seuil.

c) Dans la seconde réaction où la particule incidente est un photon :

$$\mathcal{E}_{k,s} = \frac{(2m_e c^2 + m_N c^2)^2 - (m_N c^2)^2}{2m_N c^2} = \frac{2m_e c^2 (2m_e c^2 + 2m_N c^2)}{2m_N c^2} = 2m_e c^2 \left(1 + \frac{m_e}{m_N}\right) \approx 2m_e c^2$$

On en déduit la longueur d'onde seuil selon :

$$\frac{hc}{\lambda} = 2m_e c^2 \quad \text{soit} \quad \lambda = \frac{h}{2m_e c} = \frac{\lambda_C}{2} = \frac{2,426}{2} = 1,213 \text{ pm}$$

Le domaine spectral concerné est le domaine X.

Chapitre 8

S8- 1. Rayon et masse volumique de différents noyaux

Comme $A = 16$, le rayon et la masse volumique du noyau d'oxygène sont respectivement :

$$R = 1,1 \times 16^{1/3} = 2,8 \text{ fm} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{A}{4\pi R^3/3} = \frac{3 \times 16 \times u}{4\pi \times 21,3 \times 10^{-45}} \approx 2,9 \times 10^{17} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

car $1 \text{ u} = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$. De même pour le noyau de fer 56 :

$$R = 1,1 \times 56^{1/3} = 4,2 \text{ fm} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{A}{4\pi R^3/3} = \frac{3 \times 56 \times u}{4\pi \times 74,596,77 \times 10^{-45}} \approx 3 \times 10^{17} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

De même aussi pour le noyau de mercure 202 :

$$R = 1,1 \times 202^{1/3} = 6,45 \text{ fm} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{A}{4\pi R^3/3} = \frac{3 \times 202 \times u}{4\pi \times 269349 \times 10^{-45}} = 3 \times 10^{17} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Les calculs donnent le même valeur.

S8- 2. Énergie de liaison de différents noyaux

1. L'énergie de liaison de la particule α s'écrit $\mathcal{E}_l = 2m_p c^2 + 2m_n c^2 - m_\alpha c^2$, d'où :

$$\mathcal{E}_l = 2 \times 938,27 + 2 \times 939,565 - 3727,41 = 28,3 \text{ MeV} \quad \text{et} \quad b = \frac{\mathcal{E}_l}{A} = \frac{28,3}{4} = 7,1 \text{ MeV}$$

2. L'énergie de liaison du noyau de $^{56}_{26}\text{Fe}$ s'obtient de la même façon $\mathcal{E}_l = 26m_p c^2 + 30m_n c^2 - m_{\text{Fe}} c^2$, d'où :

$$\mathcal{E}_l = 26 \times 938,27 + 30 \times 939,565 - 52\,090 = 492 \text{ MeV} \quad \text{et} \quad b = \frac{\mathcal{E}_l}{A} = \frac{492}{56} = 8,79 \text{ MeV}$$

3. De même pour le noyau d'uranium $^{238}_{92}\text{U}$: $\mathcal{E}_l = 92m_p c^2 + 146m_n c^2 - m_{\text{U}} c^2$, d'où :

$$\mathcal{E}_l = 92 \times 938,27 + 146 \times 939,565 - 221\,697,7 = 1\,798,5 \text{ MeV} \quad \text{et} \quad b = \frac{\mathcal{E}_l}{A} = \frac{1\,800,36}{238} = 7,56 \text{ MeV}$$

S8– 3. Réactions radioactives successives

1. Les équations différentielles auxquelles satisfont l'évolution des nombres N_1 , N_2 et N_3 de noyaux X_1 , X_2 et X_3 , au cours du temps, sont :

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 \qquad \frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \qquad \frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2$$

2. La première équation s'intègre aisément :

$$\frac{dN_1}{N_1} = -\lambda_1 dt \quad \text{donne} \quad \ln\left(\frac{N_1}{N_1(0)}\right) = -\lambda_1 t \quad \text{d'où} \quad N_1(t) = N_1(0) \exp(-\lambda_1 t)$$

Injectons cette expression de $N_1(t)$ dans la deuxième équation différentielle. Il vient :

$$\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_1(0) \exp(-\lambda_1 t)$$

La solution de cette équation est la solution générale de l'équation sans second membre, qui est $\text{Cte} \times \exp(-\lambda_1 t)$, à laquelle on ajoute une solution particulière $N_2^p(t)$ de l'équation différentielle complète, qui est de la forme $\text{Cte} \times \exp(-\lambda_1 t)$. Il vient, en injectant cette solution dans l'équation différentielle :

$$(-\lambda_1 + \lambda_2) \text{Cte} \times \exp(-\lambda_1 t) = \lambda_1 N_1(0) \exp(-\lambda_1 t) \quad \text{d'où} \quad \text{Cte} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0)$$

Ainsi :

$$N_2(t) = \text{Cte} \times \exp(-\lambda_1 t) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) \exp(-\lambda_1 t)$$

On trouve la valeur de la constante avec la condition initiale :

$$N_2(0) = 0 = \text{Cte} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) \quad \text{d'où} \quad \text{Cte} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0)$$

Il en résulte :

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) [\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_2 t)]$$

Quant à la troisième équation, elle donne :

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) [\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_2 t)]$$

En intégrant, on obtient :

$$N_3(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) \left[-\frac{\exp(-\lambda_1 t)}{\lambda_1} + \frac{\exp(-\lambda_2 t)}{\lambda_2} \right] + \text{Cte}$$

Comme $N_3 = 0$ à $t = 0$, il vient :

$$0 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) \left[-\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right] + \text{Cte}$$

d'où :

$$N_3(t) = N(0) \left[1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(-\lambda_1 t) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(-\lambda_2 t) \right]$$

Les trois courbes sont représentées sur la figure 8.7. On voit que N_2 est maximal pour

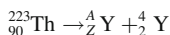
$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 \quad \text{d'où} \quad t = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)$$

En outre, les pentes de ces courbes à l'origine valent respectivement :

$$\left(\frac{dN_1}{dt} \right)_0 = -\lambda_1 N_1(0) \quad \left(\frac{dN_2}{dt} \right)_0 = \lambda_1 N_1(0) \quad \left(\frac{dN_3}{dt} \right)_0 = 0$$

S8- 4. Radioactivité α du thorium

1. L'équation de désintégration s'écrit :



d'où $A = 219$ et $Z = 88$. Le noyau ${}_Z^A\text{Y}$ est donc l'isotope 219 du radium.

2. L'énergie libérée Q est reliée à la variation de la somme des masses par l'équation :

$$Q = \sum_i m_i c^2 - \sum_f m_f c^2 = m_{\text{Th}} c^2 - m_{\text{Ra}} c^2 - m_{\alpha} c^2 = 8,26 \times 10^{-3} \times 931,5 = 7,69 \text{ MeV}$$

Si le noyau de radium est dans son état fondamental, l'énergie Q est libérée sous forme d'énergie cinétique des particules émergentes.

3. Les conservations de la quantité de mouvement et de l'énergie du système s'écrivent, respectivement :

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 = m_1 c^2$$

où la particule 1 est le noyau de thorium, la particule 2 le noyau de radium et la particule 3 le noyau d'hélium. Il vient, en explicitant :

$$m_1 c^2 = (p_2^2 c^2 + m_2^2 c^4)^{1/2} + (p_3^2 c^2 + m_3^2 c^4)^{1/2}$$

Comme $p_2 = p_3 = p$, on obtient :

$$2(p^2 c^2 + m_2^2 c^4)^{1/2} (p^2 c^2 + m_3^2 c^4)^{1/2} = m_1^2 c^4 - m_2^2 c^4 - m_3^2 c^4 - 2p^2 c^2$$

soit :

$$4(p^2 c^2 + m_2^2 c^4)(p^2 c^2 + m_3^2 c^4) = (A - 2p^2 c^2)^2 \quad \text{en posant} \quad A = m_1^2 c^4 - m_2^2 c^4 - m_3^2 c^4$$

En effectuant et en simplifiant, il vient :

$$p^2 c^2 = \frac{A^2 - m_2^2 c^4 m_3^2 c^4}{4m_1^2 c^4} = \frac{[m_1^2 c^4 - (m_2^2 c^4 + m_3^2 c^4)] [m_1^2 c^4 - (m_2^2 c^4 - m_3^2 c^4)]}{4m_1^2 c^4}$$

soit :

$$p^2 c^2 = \frac{(m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + m_3^2 c^4)(m_1^2 c^4 - m_2^2 c^4 - m_3^2 c^4)(m_1^2 c^4 - m_2^2 c^4 + m_3^2 c^4)(m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 - m_3^2 c^4)}{4m_1^2 c^4}$$

ce qui donne $pc = 237,487 \text{ MeV}$. On en déduit :

$$\beta_2 \gamma_2 = (\gamma_2^2 - 1)^{1/2} = \frac{pc}{m_2 c^2} = \frac{237,487}{219,01002 \times 931,5} = 1,16 \times 10^{-3}$$

et

$$\beta_3 \gamma_3 = (\gamma_3^2 - 1)^{1/2} = \frac{pc}{m_3 c^2} = \frac{237,487}{4,00260 \times 931,5} = 0,0637$$

Ainsi :

$$\gamma_2^2 = 1 + 1,346 \times 10^{-6} \quad \beta_2 = \left(1 - \frac{1}{\gamma_2^2}\right)^{1/2} \approx 1,160 \times 10^{-3}$$

et

$$\gamma_3^2 = 1,00406 \quad \beta_3 = \left(1 - \frac{1}{\gamma_3^2}\right)^{1/2} \approx 0,0635$$

Quant aux énergies cinétiques, elles valent respectivement :

$$\mathcal{E}_{k,2} = (\gamma_2 - 1)m_2 c^2 = 0,114 \text{ MeV} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{k,3} = (\gamma_3 - 1)m_3 c^2 = 7,45 \text{ MeV}$$

4. L'approximation newtonienne se justifie, car l'énergie cinétique des particules émergentes est faible devant l'énergie de masse. Dans ce cadre, on a :

$$\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad m_2 c^2 + \mathcal{E}_{k,2} + m_3 c^2 + \mathcal{E}_{k,3} = m_1 c^2$$

ce qui donne :

$$\mathcal{E}_{k,2} + \mathcal{E}_{k,3} = m_1 c^2 - m_2 c^2 - m_3 c^2 = Q \quad \text{et} \quad \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{p_3^2}{2m_3} = Q$$

On en déduit, puisque $p_2 = p_3 = p$:

$$p = (2\mu Q)^{1/2}$$

où $\mu = m_2 m_3 / (m_2 + m_3)$ est la masse réduite des particules émergentes. Ainsi :

$$v_2 = \frac{(2\mu Q)^{1/2}}{m_2} = \left(\frac{2m_3 Q / m_2}{m_2 + m_3}\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad v_3 = \frac{(2\mu Q)^{1/2}}{m_3} = \left(\frac{2m_2 Q / m_3}{m_2 + m_3}\right)^{1/2}$$

Quant aux énergies cinétiques, elles s'écrivent, respectivement :

$$\mathcal{E}_{k,2} = \frac{p^2}{2m_2} = \frac{\mu Q}{m_2} = \frac{m_3}{m_2 + m_3} Q \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{k,3} = \frac{p^2}{2m_3} = \frac{\mu Q}{m_3} = \frac{m_2}{m_2 + m_3} Q$$

Numériquement, on trouve :

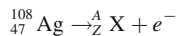
$$\beta_2 = \frac{v_2}{c} = \frac{3,49 \times 10^5}{3 \times 10^8} = 1,163 \times 10^{-3} \quad \beta_3 = \frac{v_3}{c} = \frac{1,91 \times 10^7}{3 \times 10^8} = 0,064$$

$$\mathcal{E}_{k,2} = 0,136 \text{ MeV} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{k,3} = 7,554 \text{ MeV}$$

On voit que l'analyse newtonienne donne des résultats satisfaisants.

S8- 5. Radioactivité β^- d'un noyau d'argent 108

1. L'équation de cette réaction nucléaire est :



On en déduit pour le noyau X : $A = 108$ et $Z = 48$; c'est donc le noyau de cadmium ${}_{48}^{108}\text{Ag}$.

2. En traçant le graphe donnant $\ln A$ en fonction du temps (Fig. S8.1), on obtient une droite dont la pente, changée de signe, donne la constante radioactive :

$$\lambda = 0,30 \text{ min}^{-1} \quad \text{d'où} \quad T_{1/2} = \frac{0,693}{\lambda} = 2,31 \text{ min} \quad \text{soit} \quad T_{1/2} = 139 \text{ s}$$

3. On trouve le nombre de noyaux initialement présents dans l'échantillon comme suit :

$$N(0) = \frac{A_0}{\lambda} = \frac{A_0 T_{1/2}}{0,693} = \frac{\exp(89) \times 139}{0,693} = 17851$$

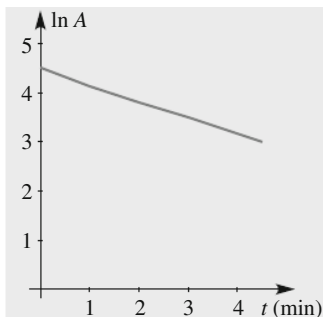
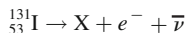


FIG. S8.1.

S8- 6. Accident nucléaire de Tchernobyl

1. L'équation-bilan de radioactivité s'écrit :



Par conséquent, le noyau X est caractérisé par $A = 131$ et $Z = 54$; c'est du xénon ${}_{54}^{131}\text{Xe}$.

2. La constante radioactive de l'iode 131 s'obtient aisément :

$$\lambda = \frac{0,693}{T_{1/2}} \approx 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

Un organisme, qui a absorbé de l'iode 131, ne contiendra plus que le centième de la quantité initiale au bout de la durée Δt telle que :

$$N(\Delta t) = \frac{N(0)}{100} = N(0) \exp(-\lambda \Delta t) \quad \text{d'où} \quad \Delta t = \frac{\ln 100}{\lambda} = 4,6 \times 10^6 \text{ s} = 53,3 \text{ jours}$$

S8- 7. Mesure approchée d'une constante radioactive

1. Calculons l'intégrale, en posant $x = \lambda t$:

$$\tau = \lambda \int_0^{\infty} t \exp(-\lambda t) dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} \lambda t \exp(-\lambda t) d(\lambda t) = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} x \exp(-x) dx$$

En intégrant par parties, on trouve :

$$\tau = \frac{1}{\lambda} [-x \exp(-x)]_0^{\infty} - \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} -\exp(-x) dx = \frac{1}{\lambda} [-\exp(-x)]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

2. Expérimentalement, la durée précédente τ peut être approchée en effectuant la moyenne discrète suivante :

$$\tau_d = \sum_i t_i \exp(-\lambda t_i) = \frac{1}{N_0} \sum_i N_i t_i \quad \text{d'où l'on déduit} \quad \lambda \approx \frac{1}{\tau_d}$$

Comme la sommation discrète donne une valeur inférieure à la sommation continue (Fig. S8.2), $\tau_d < \tau$. Par conséquent, la valeur calculée est plus grande que λ :

$$\tau_d < \frac{1}{\lambda} \quad \text{d'où} \quad \lambda_d = \frac{1}{\tau_d} > \lambda$$

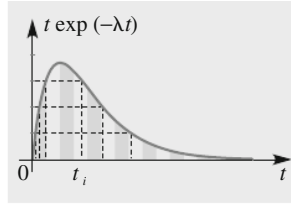


FIG. S8.2.

S8– 8. Influence de l'élimination métabolique de l'iode radioactif

1. Effectuons le bilan du nombre de noyaux radioactifs pendant une durée élémentaire dt :

$$dN = -\lambda_\beta dt - \lambda_m dt \quad \text{soit} \quad dN = -\lambda_{ef} dt \quad \text{avec} \quad \lambda_{ef} = \lambda_\beta + \lambda_m$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{T_{ef}} = \frac{\lambda_{ef}}{0,693} = \frac{\lambda_\beta}{0,693} + \frac{\lambda_m}{0,693} \quad \text{et} \quad \frac{1}{T_{ef}} = \frac{1}{T_\beta} + \frac{1}{T_m}$$

Ainsi, T_{ef} est inférieur à la plus petite des demi-vies T_β et T_m .

2. Dans le cas du noyau d'iode 131 :

$$T_{ef} = \frac{T_\beta T_m}{T_\beta + T_m} = \frac{8,1 \times 180}{8,1 + 180} = 7,75 \text{ jours}$$

Au bout de trois mois (90 jours), les nombres de noyaux d'iode prévus dans les deux cas sont respectivement :

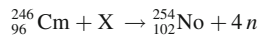
$$N_\beta(90) = N(0) \exp(-90\lambda_\beta) \quad \text{et} \quad N_{ef}(90) = N(0) \exp(-90\lambda_{ef})$$

d'où :

$$\frac{N_{ef}(90)}{N_\beta(90)} = \exp(-90\lambda_m) = \exp\left(-\frac{90 \times 0,693}{180}\right) = 0,707$$

S8– 9. Radioactivité des éléments transuraniens

1. L'équation de la réaction nucléaire s'écrit :

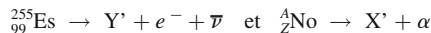


On en déduit pour le noyau X $A = 12$ et $Z = 6$; les projectiles sont donc des noyaux de carbone 12.

2. La durée au bout de laquelle 99 % des noyaux initialement présents ont disparu est telle que :

$$N(t) = \frac{N(0)}{1000} = N(0) \exp(-\lambda t) \quad \text{d'où} \quad t = \frac{\ln 1000}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{0,693} \times 6,907 = 27,9 \text{ s}$$

3. L'équation de réaction de la désintégration β^- de ${}_{99}^{255}\text{Es}$ et celle de la désintégration α de ${}_{102}^{254}\text{No}$ s'écrivent, respectivement :



On en déduit $A = 255$ pour le noyau de fermium et $Z = 102$ pour le noyau de nobium.

S8– 10. Datation d'une roche

Le rapport du nombre de noyaux d'uranium 238 sur le nombre de noyaux de plomb s'écrit :

$$r = \frac{N_U}{N_{Pb}} = \frac{N(0) \exp(-\lambda_U t)}{N(0) - N(0) \exp(-\lambda_U t)}$$

d'où

$$\exp(\lambda_U t) = 1 + \frac{1}{r} \quad \text{et} \quad t = \frac{1}{\lambda_U} \ln \left(1 + \frac{1}{r} \right) = \frac{T_U}{0,693} \ln \left(1 + \frac{1}{r} \right)$$

Comme $r = 1,5$, l'âge de la roche est $t = 3,3$ Gan (milliards d'années).

S8– 11. Pouvoir d'arrêt des matériaux pour des particules chargées rapides

1. Si Z est le nombre d'électrons par atomes et n_a le nombre d'atomes par unité de volume, on a :

$$n_e = n_a Z \quad \text{avec} \quad n_a = \frac{N_A}{M_m/\rho} = \frac{N_A \rho}{M_m}$$

2. D'après la formule générale donnant la perte d'énergie Q en fonction de θ^* (cf. chapitre 7) :

$$Q = \frac{2m_1^2(\gamma_1^2 - 1)}{m_1^2 + m_2^2 + 2\gamma_1 m_1 m_2} m_2 c^2 \sin^2 \left(\frac{\theta^*}{2} \right)$$

γ_1 étant le facteur relativiste associé au mouvement de la particule incidente. Il vient, si $m_1 = m_p$ et $m_2 = m_e$:

$$Q_{\max} = \frac{2m_p^2(\gamma_1^2 - 1)}{m_p^2 + m_e^2 + 2\gamma_1 m_p m_e} m_e c^2 = \frac{2(\gamma_1^2 - 1)m_e c^2}{(1 + m_e/m_p)^2 + (\gamma_1 - 1)m_e/m_p} \approx \frac{2(\gamma_1^2 - 1)m_e c^2}{1 + 2(\gamma_1 - 1)m_e/m_p}$$

En revanche si $m_1 = m_e$ et $m_2 = m_e$, alors :

$$Q_{\max} = \frac{\gamma_1^2 - 1}{1 + \gamma_1} m_e c^2 = (\gamma_1 - 1) m_e c^2$$

Donc $(Q_{\max})_e = (\gamma_1 - 1) m_e c^2 / 2$.

3. Pour des protons :

$$\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dx} \right)_p = \frac{2\pi q_e^4 N_A}{m_e c^2 \beta^2} \rho \frac{Z}{M_m} \left[\ln \frac{(2\gamma^2 \beta^2 m_e c^2)^2}{I^2} - 2\beta^2 \right] = \frac{e^4}{\varepsilon_0 m_e c^2} \frac{N_A}{\beta^2} \rho \frac{Z}{M_m} \left[\ln \frac{2(\gamma^2 - 1)m_e c^2}{I} - \beta^2 \right]$$

avec : $2\pi q_e^4 N_A / (m_e c^2) = 0,1536 \text{ MeV} \cdot \text{cm}^2$.

Pour des électrons :

$$\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dx} \right)_e = \frac{2\pi q_e^4 N_A}{m_e c^2 \beta^2} \rho \frac{Z}{M_m} \left[\ln \frac{(\gamma - 1)(\gamma^2 - 1)m_e c^4}{I^2} + E(\gamma) - \beta^2 \right]$$

4. Dans le cas de l'aluminium, $\rho Z / M_m = 1,3 \text{ cm}^{-3}$. On constate que le minimum du pouvoir d'arrêt a lieu pour $\beta = 0,95$ (cf. Tab. S8.1).

β	0,5	0,7	0,9	0,95	0,975	0,995
β^2	0,25	0,49	0,81	0,90	0,95	0,99
γ^2	1,333	1,961	5,263	10	20	100
$(-d\mathcal{E}/dx)_p \text{ (MeV} \cdot \text{cm}^{-1})$	11,813	6,694	4,626	4,455	4,514	4,981
$(-d\mathcal{E}/dx)_e \text{ (MeV} \cdot \text{cm}^{-1})$	9,996	5,844	4,172	4,058	4,142	4,6

TAB. S8.1.

S8– 12. Effet Cerenkov

1. La vitesse v de l'électron étant supérieure à la vitesse de propagation de la lumière dans ce milieu, on a :

$$v > \frac{c}{n} \quad \text{soit} \quad n > \frac{c}{v} = \beta^{-1}$$

2. On en déduit :

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} > \frac{1}{n^2} \quad \text{soit} \quad \gamma > \frac{n}{(n^2 - 1)^{1/2}} \quad \text{c'est-à-dire} \quad 1 + \frac{\mathcal{E}_k}{m_e c^2} > \frac{n}{(n^2 - 1)^{1/2}}$$

Par conséquent :

$$\mathcal{E}_k > m_e c^2 \left[\frac{n}{(n^2 - 1)^{1/2}} - 1 \right] = (\mathcal{E}_k)_m = 0,26 \text{ MeV}$$

S8– 13. Seuil énergétique de réactions nucléaires

1. a) Le seuil énergétique de la réaction a pour expression, avec des notations habituelles (cf. chapitre 7) :

$$\mathcal{E}_k^s = \frac{(\sum_f m_f c^2)^2 - (\sum_i m_i c^2)^2}{2m_b c^2}$$

Cette énergie cinétique est nulle si $\sum_f m_f c^2 = \sum_i m_i c^2$, c'est-à-dire si la collision est élastique.

b) On peut aisément faire apparaître le défaut de la somme des masses. En effet :

$$\mathcal{E}_k^s = \frac{(\sum_f m_f c^2 + \sum_i m_i c^2)(\sum_f m_f c^2 - \sum_i m_i c^2)}{2m_b c^2} = -Q \frac{\sum_f m_f c^2 + \sum_i m_i c^2}{2m_b c^2}$$

ce qui implique que $Q = \mu c^2 < 0$.

c) Dans l'approximation des faibles vitesses des particules devant c , les énergies cinétiques sont négligeables devant les énergies de masse. La conservation de l'énergie implique donc approximativement celle de la somme des énergies de masse :

$$\sum_f m_f c^2 \approx \sum_i m_i c^2 \quad \text{d'où} \quad \mathcal{E}_k^s \approx -2Q \frac{\sum_i m_i c^2}{2m_b c^2} = -Q \frac{m_1 c^2 + m_2 c^2}{m_2 c^2} = -Q(1 + a) \quad \text{avec} \quad a = \frac{m_1}{m_2}$$

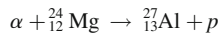
d) Si la particule A_3 était produite dans un état excité, avec un écart énergétique par rapport à l'état fondamental égal à $\Delta\mathcal{E}$, on aurait une expression analogue de $\mathcal{E}_k^s$ dans laquelle Q serait remplacé par Q' de telle sorte que :

$$Q' = (m_1 c^2 + m_2 c^2) - (m'_1 c^2 + m_4 c^2) = (m_1 c^2 + m_2 c^2) - (m_3 c^2 + m_4 c^2) + m_3 c^2 - m'_3 c^2 = Q - \Delta\mathcal{E}$$

Il vient donc :

$$\mathcal{E}_k^{fs} \approx -(Q - \Delta\mathcal{E})(1 + a)$$

2. a) La réaction suivante transformant un noyau de magnésium en un noyau d'aluminium :



satisfait aux règles de conservation de la charge, du nombre de baryons et du nombre d'étrangeté. En effet, on a, pour le nombre de charges élémentaires et le nombre de baryons, respectivement :

$$12e + 2e = e + 13e \quad \text{et} \quad 24 + 4 = 1 + 27$$

Enfin, les nombres d'étrangeté sont nuls dans chaque membre de la réaction.

b) Calculons Q et le seuil énergétique de la réaction, lorsque l'aluminium est dans l'état fondamental :

$$Q = \sum_i m_i c^2 - \sum_f m_f c^2 = (22\,341,3 + 3\,727,27) - (25\,132,44 + 938,27) = -2,14 \text{ MeV}$$

et :

$$\mathcal{E}_k^s = 2,14 \left(1 + \frac{3\,727,27}{22\,341,3} \right) = 2,47 \text{ MeV}$$

c) Lorsque l'aluminium est dans un état excité, tel que $\varepsilon = 2,21$ MeV, on obtient :

$$Q' = Q - \varepsilon = -2,14 - 2,21 = -4,35 \text{ MeV} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_k^s = 4,35 \left(1 + \frac{3\,727,27}{22\,341,3} \right) \approx 5 \text{ MeV}$$

3. a) Dans la réaction suivante $\gamma + \text{nucléon} \rightarrow \pi^0 + \text{nucléon}$, le seuil énergétique du photon $\mathcal{E}_k^s$, lorsque le nucléon cible est au repos dans le référentiel du laboratoire, a pour expression :

$$\mathcal{E}_k^s = \frac{(m_N c^2 + m_\pi c^2)^2 - m_N^2 c^4}{2m_N c^2} = \frac{m_\pi c^2 (m_N c^2 + m_\pi c^2)}{2m_N c^2} = m_\pi c^2 \left(1 + \frac{m_\pi c^2}{2m_N c^2} \right) = 144,7 \text{ MeV}$$

On en déduit :

$$\lambda_s = \frac{1\,239}{\mathcal{E}_k^s (\text{eV})} = 8,56 \text{ fm}$$

b) La quantité de mouvement des nucléons se déduit aisément de leur énergie cinétique selon la relation :

$$\begin{aligned} p_{NC} &= (\mathcal{E}_N^2 - m_N^2 c^4)^{1/2} = (\mathcal{E}_N - m_N c^2)^{1/2} (\mathcal{E}_N + m_N c^2)^{1/2} \\ &= \mathcal{E}_{k,N} (\mathcal{E}_{k,N} + 2m_N c^2)^{1/2} = 20^{1/2} (20 + 2 \times 939)^{1/2} = 194,83 \text{ MeV} \cdot c^{-1} \end{aligned}$$

c) Les nucléons-cibles étant en mouvement à l'intérieur des noyaux, avec une énergie cinétique $\mathcal{E}_{k,N} = 20$ MeV, le seuil énergétique est tel que :

$$(\mathcal{E}_1^s + \mathcal{E}_N)^2 - (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2 c^2 = \left(\sum_f m_f c^2 \right)^2$$

Cette équation diffère de celle connue seulement par la présence de $\mathbf{p}_2$. On obtient, en développant et en simplifiant :

$$m_N^2 c^4 + 2\mathcal{E}_1^s \mathcal{E}_N - 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 c^2 = \left(\sum_f m_f c^2 \right)^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_1^s = \frac{\left(\sum_f m_f c^2 \right)^2 - m_N^2 c^4}{2(\mathcal{E}_N - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{p}_2 c)}$$

$\mathbf{n}_1$ étant le vecteur unitaire défini par $\mathbf{p}_1$. Il en résulte :

$$\mathcal{E}_1^s = \frac{(\sum_f m_f c^2)^2 - m_N^2 c^4}{2(m_N c^2 + K)} \quad \text{en posant} \quad K = \mathcal{E}_{k,N} - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{p}_2 c = \mathcal{E}_{k,N} - p_{N,x} c$$

Ainsi :

$$\mathcal{E}_1^s = \frac{(\sum_f m_f c^2)^2 - m_N^2 c^4}{2m_N c^2 (1 + K/m_N c^2)} = \frac{\mathcal{E}_{1,r}^s}{1 + K/m_N c^2}$$

$\mathcal{E}_{1,r}^s$ étant le seuil énergétique du photon pour un nucléon au repos.

d) Calculons le seuil énergétique du photon, dans les deux cas envisagés.

i) La cible se rapproche du photon incident ($p_{N,x} = -p_{NC}$)

$$K = \mathcal{E}_{k,N} - p_{N,x} c = \mathcal{E}_{k,N} + p_{NC} = 20 + 194,83 = 204,83 \text{ MeV}$$

d'où :

$$\mathcal{E}_1^s = \frac{\mathcal{E}_{1,r}^s}{1 + K/m_N c^2} = \frac{144,7}{1 + 204,83/939} = 117,7 \text{ MeV}$$

ii) La cible s'éloigne du photon incident ($p_{N,x} = p_{NC}$)

$$K = \mathcal{E}_{k,N} - p_{N,x} c = \mathcal{E}_{k,N} - p_{NC} = 20 - 194,83 = -174,83 \text{ MeV}$$

ce qui donne :

$$\mathcal{E}_1^s = \frac{\mathcal{E}_{1,r}^s}{1 + K/m_N c^2} = \frac{144,7}{1 - 174,83/939} = 177,8 \text{ MeV}$$

S8– 14. Fission de l'uranium 235 en noyaux de krypton et de baryum

1. En raison des lois de conservation du nombre de protons et du nombre de nucléons, on doit avoir :

$$Z = 92 - 36 = 56 \quad \text{et} \quad a = (235 + 1) - (90 + 142) = 4$$

2. Au cours d'une réaction de fission, la somme des masses des particules n'est pas conservée. L'énergie libérée est :

$$Q = \sum_i \mathcal{E}_{k,i} - \sum_f \mathcal{E}_{k,f} = \sum_i m_i c^2 - \sum_f m_f c^2 = (m_U c^2 + m_n c^2) - (m_{Kr} c^2 + m_{Ba} c^2 + 4m_n c^2)$$

d'où :

$$Q = m_U c^2 - m_{Kr} c^2 - m_{Ba} c^2 - 3m_n c^2 = 0,18185 c^2 \text{ u} = 169,39 \text{ MeV}$$

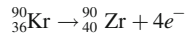
3. L'énergie libérée par 1 kg d'uranium 235 vaut, en joule :

$$Q = \frac{185 \times 10^6 \times 1,6 \times 10^{-19}}{235,043915 \times 1,66 \times 10^{-27}} = 75,8 \times 10^{12} \text{ J}$$

On en déduit la durée nécessaire pour consommer cette masse d'uranium :

$$\Delta t = \frac{Q}{P} = \frac{75,8 \times 10^{12}}{5 \times 10^8} = 15,6 \times 10^4 \text{ s} \quad \text{soit} \quad \Delta t = 1,75 \text{ jour}$$

4. Comme le nombre de nucléons est inchangé, les désintégrations matérielles sont de type β^- . Le bilan des réactions est donc :

**S8– 15. Énergétique de la fission de l'uranium 235 en noyaux de molybdène et de lanthane**

1. Les nombres x_1 et x_2 satisfont aux lois de conservation du nombre de nucléons et du nombre de charges élémentaires :

$$235 + 1 = 95 + 139 + x_1 \quad \text{et} \quad 92 + 0 = 42 + 57 - x_2$$

d'où $x_1 = 2$ et $x_2 = 7$. Les photons observés proviennent de la désexcitation des noyaux ; le domaine spectral est celui du rayonnement γ .

2. L'énergie cinétique du neutron projectile, en équilibre thermique à 580 K, s'obtient aisément selon (cf. *Thermodynamique*) :

$$\mathcal{E}_k = \frac{3}{2} k_B T = \frac{3}{2k_B e} \times 580 = 75 \text{ meV}$$

3. a) La conservation de l'énergie à laquelle doit satisfaire la réaction précédente, donne, si l'énergie cinétique du neutron-projectile est négligeable, si le noyau-cible d'uranium 235 est libre et immobile, enfin si l'énergie de liaison des électrons est négligeable devant leur énergie de masse :

$$m_U c^2 + m_n c^2 = M_{Mo} c^2 + M_{La} c^2 + 2m_n c^2 + 7m_e c^2 + \sum_f \mathcal{E}_{k,f}$$

d'où :

$$\sum_f \mathcal{E}_{k,f} = \sum_i m_i c^2 - \sum_f m_f c^2 = m_U c^2 + m_n c^2 - M_{Mo} c^2 - M_{La} c^2 - 2m_n c^2 - 7m_e c^2$$

Le calcul donne, puisque $m_n c^2 = 931,5 \text{ MeV}$:

$$\sum_f \mathcal{E}_{k,f} = 931,5 \left(235,049 + 1,0087 - 94,9058 - 138,9064 - 2 \times 1,0087 - 7 \times 5,49 \times 10^{-4} \right) = 207,7245 \text{ MeV}$$

b) Par fission d'un kilogramme d'uranium 235, l'énergie libérée, sous forme cinétique, vaut, en térajoule par kilogramme :

$$\frac{\sum_f \mathcal{E}_{k,f}}{M_U} = \frac{207,7245}{235,049 \times 931,5/c^2} = 85,4 \text{ TJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Cette valeur est considérable, d'où l'intérêt énergétique des centrales nucléaires. Cette énergie cinétique provoque la vaporisation de l'eau et la rotation d'un alternateur par la vapeur produite. Finalement, l'énergie cinétique produite est transformée en puissance électrique.

S8– 16. Spectre énergétique des neutrons rapides

La valeur moyenne de l'énergie cinétique de fission a pour expression :

$$\langle \mathcal{E}_k \rangle = \frac{1}{N} \int_0^\infty \mathcal{E}_k n_{\mathcal{E}} d\mathcal{E}_k \quad \text{avec} \quad N = \int_0^\infty n_{\mathcal{E}} d\mathcal{E}_k$$

Ces deux intégrales s'écrivent, respectivement, en posant $x = \mathcal{E}_k/b$:

$$ab^{5/2} \int_0^\infty x^{3/2} \exp(-x) dx \quad \text{et} \quad ab^{3/2} \int_0^\infty x^{1/2} \exp(-x) dx$$

Pour comparer ces deux intégrales, il suffit de noter que :

$$\int_0^\infty x^{3/2} \exp(-x) dx = \left\{ -x^{3/2} \exp(-x) \right\}_0^\infty + \frac{3}{2} \int_0^\infty x^{1/2} \exp(-x) dx = \frac{3}{2} \int_0^\infty x^{1/2} \exp(-x) dx$$

On en déduit :

$$\langle \mathcal{E}_k \rangle = \frac{3b}{2} = 1,995 \text{ MeV}$$

Comme $m_n c^2 = 938 \text{ MeV}$, ce qui est très supérieur à $\langle \mathcal{E}_k \rangle$, les neutrons de fission peuvent être considérés newtoniens.

S8– 17. Ralentissement de neutrons rapides par diffusion élastique

1. La diffusion étant isotrope dans $\mathcal{R}^*$, la valeur moyenne d'ensemble de l'énergie cinétique $\mathcal{E}'_k$ du neutron, après collision, a pour expression (cf. chapitre 8) :

$$\langle \mathcal{E}' \rangle = \mathcal{E} \int \frac{1 + A^2 + 2A \cos \theta^*}{(1 + A)^2} \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{2\pi}{4\pi} \mathcal{E} \int \frac{1 + A^2 + 2A \cos \theta^*}{(1 + A)^2} \sin \theta^* d\theta^*$$

On effectue, en posant :

$$u = 1 + A^2 + 2A \cos \theta^* \quad \text{d'où} \quad du = -2A \sin \theta^* d\theta^*$$

Il vient alors :

$$\langle \mathcal{E}' \rangle = -\frac{\mathcal{E}}{4A(1+A)^2} \int u du = -\frac{\mathcal{E}}{8A(1+A)^2} \{u^2\}_0^\pi = \frac{\mathcal{E}}{8A(1+A)^2} \{(1+A)^2 - (1-A)^2\}$$

En simplifiant, on trouve :

$$\langle \mathcal{E}' \rangle = \frac{1+A^2}{(1+A)^2} \mathcal{E}$$

Analysons la variation de $\langle \mathcal{E}' \rangle$ avec A :

$$\frac{d\langle \mathcal{E}' \rangle}{dA} = \frac{(1+A)^2 \times 2A - 2(1+A^2)(1+A)}{(1+A)^4} \mathcal{E} = \frac{(1+A) \times 2A - 2(1+A^2)}{(1+A)^3} \mathcal{E} = \frac{2(A-1)}{(1+A)^3} \mathcal{E} > 0$$

Ainsi $\langle \mathcal{E}' \rangle$ est d'autant plus faible et le ralentissement plus grand que A est faible, d'où l'intérêt des modérateurs à faible nombre de masse.

2. a) À l'aide du diagramme sur les quantités de mouvement, dans une collision élastique, en mécanique newtonienne (cf. chapitre 8 et *Mécanique*), on peut voir que l'angle θ_1 de diffusion des neutrons est donné par l'expression :

$$\cos \theta_1 = \frac{\mu v_1 \cos \theta^* + \mu v_1 / A}{[\mu^2 v_1^2 + \mu^2 v_1^2 / A^2 + 2(\mu^2 v_1^2 / A) \cos \theta^*]^{1/2}} \quad \text{soit} \quad \cos \theta_1 = \frac{1 + A \cos \theta^*}{(1 + A^2 + 2A \cos \theta^*)^{1/2}}$$

en divisant haut et bas par $\mu v_1 / A$, $\mu = m_n m_N / (m_n + m_N)$ étant la masse réduite. On trouve donc $\kappa = 2$.

b) Le calcul de la valeur moyenne d'ensemble de $\cos \theta_1$ est conduit comme celui de l'énergie $\mathcal{E}'$. On a :

$$\langle \cos \theta_1 \rangle = \int \cos \theta_1 \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{1 + A \cos \theta^*}{(1 + A^2 + 2A \cos \theta^*)^{1/2}} \sin \theta^* d\theta^*$$

Il vient, en introduisant, comme précédemment la variable u :

$$\langle \cos \theta_1 \rangle = -\frac{1}{4A} \int \frac{1 + (u - 1 - A^2)/2}{u^{1/2}} du = -\frac{1}{8A} \int \frac{u + 1 - A^2}{u^{1/2}} du = -\frac{1}{8A} \int \left[u^{1/2} + \frac{1 - A^2}{u^{1/2}} \right] du$$

ce qui donne, en effectuant :

$$\langle \cos \theta_1 \rangle = -\frac{1}{8A} \left\{ \frac{2}{3} u^{3/2} + 2(1 - A^2) u^{1/2} \right\}_{u_1 u_2} = -\frac{1}{8A} \left[\frac{2}{3} (A - 1)^3 - \frac{2}{3} (A + 1)^3 - 4(1 - A^2) \right]$$

Finalement :

$$\langle \cos \theta_1 \rangle = \frac{2}{3A} = \frac{2m_n}{3m_N}$$

Ainsi, dans le référentiel du laboratoire, la diffusion est anisotrope, alors qu'elle est isotrope dans le référentiel du centre de masse ($\langle \cos \theta^* \rangle = 0$). Cette anisotropie est faible lorsque A est grand et forte pour A faible.

3. a) La densité de probabilité $p_L(\mathcal{E}')$ du gain en léthargie est telle que :

$$dP_L = p_L(\mathcal{E}') d\mathcal{E}' = \frac{d\Omega^*}{4\pi} \quad \text{d'où} \quad p_L(\mathcal{E}') = \frac{1}{4\pi} \left| \frac{d\Omega^*}{d\mathcal{E}'} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{\sin \theta^* d\theta^*}{d\mathcal{E}'} \right|$$

Comme $d\mathcal{E}'_k = -2A \sin \theta^* d\theta^* \mathcal{E}'_k / (A + 1)^2$, on en déduit :

$$p_L(\mathcal{E}'_k) = \frac{(A + 1)^2}{4A\mathcal{E}_k} = \frac{1}{[4A/(A + 1)^2]\mathcal{E}_k} = \frac{1}{(1 - \alpha)\mathcal{E}_k} \quad \text{avec} \quad \alpha = \left(\frac{A - 1}{A + 1} \right)^2$$

b) Le gain moyen en léthargie par collision, $\langle g \rangle$, s'obtient selon :

$$\langle g \rangle = \int_{\alpha\mathcal{E}_k}^{\mathcal{E}_k} p_L(\mathcal{E}'_k) g d\mathcal{E}'_k = - \int \frac{1}{(1 - \alpha)\mathcal{E}_k} \ln \left(\frac{\mathcal{E}'_k}{\mathcal{E}_k} \right) d\mathcal{E}'_k$$

car les valeurs extrêmes de $\mathcal{E}'_k$ sont $\alpha\mathcal{E}_k$ et $\mathcal{E}_k$. Il vient donc, en introduisant le rapport $x = \mathcal{E}'_k / \mathcal{E}_k$:

$$\langle g \rangle = -\frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 \ln x dx = -\frac{1}{1 - \alpha} \left[\{x \ln x\}_\alpha^1 - \int_\alpha^1 dx \right]$$

ce qui donne en effectuant :

$$\langle g \rangle = \frac{1 - \alpha + \alpha \ln \alpha}{1 - \alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \ln \alpha$$

c) Le nombre moyen de collisions nécessaires pour que l'énergie cinétique d'un neutron passe de 2 MeV à 1 eV, lorsque le modérateur est constitué de noyaux d'hydrogène, vaut :

$$\langle n_H \rangle = -\frac{L}{\langle g_H \rangle} \quad \text{où} \quad L = \ln(2 \times 10^6) \quad \langle g_H \rangle = 1 \quad \text{et donc} \quad \langle n_H \rangle = 14,5$$

Pour un modérateur constitué de noyaux d'uranium 238, on trouve :

$$\langle n_U \rangle_H = -\frac{L}{\langle g_U \rangle} \quad \text{avec} \quad L = \ln(2 \times 10^6) \quad \text{et} \quad \langle g_U \rangle = 1 + \frac{0,967}{1 - 0,967} \ln 0,967 = 0,0166$$

Dans ce cas, $\langle n_U \rangle = 869,6$. Ainsi, l'hydrogène est un excellent modérateur contrairement à l'uranium 238.

S8– 18. Ralentissement de neutrons rapides par diffusion inélastique

1. Le seuil énergétique du neutron incident est donnée par l'expression bien connue (cf. chapitre 7) :

$$\mathcal{E}_{k,s} = \frac{(\sum_f m_f c^2)^2 - (\sum_i m_i c^2)^2}{2m_N c^2} = \frac{(m_n c^2 + m_N^* c^2)^2 - (m_n c^2 + m_N c^2)^2}{2m_N c^2}$$

ce qui donne, en effectuant :

$$\mathcal{E}_{k,s} = \frac{m_N^{*2} c^4 - m_N^2 c^4 + 2m_n c^2 (m_N^* c^2 - m_N c^2)}{2m_N c^2} = \frac{(m_N^* c^2 - m_N c^2)(m_N^* c^2 + m_N c^2 + 2m_n c^2)}{2m_N c^2} \approx (m_N^* c^2 - m_N c^2) \left(1 + \frac{m_n c^2}{m_N c^2}\right)$$

Le seuil énergétique des neutrons, dans la diffusion inélastique considérée, est donc supérieure à l'écart énergétique entre le niveau excité du noyau et son niveau fondamental.

2. Seuls les neutrons d'énergie cinétique supérieure à 3,09 MeV peuvent exciter le noyau. Il en résulte que la probabilité pour que cette diffusion inélastique de neutrons, d'énergie maximale 3,1 MeV, se produise est très faible. La longueur d'onde du rayonnement émis, à la suite de la désexcitation du noyau, se déduit aisément selon :

$$\lambda(\text{ nm }) = \frac{1239}{\Delta\mathcal{E}(\text{ eV })} = \frac{1239}{3,09 \times 10^6} = 401 \times 10^{-6} \text{ nm } \text{ soit } \lambda = 0,4 \text{ pm}$$

Le domaine spectral est évidemment celui des rayons gamma.

S8– 19. Fusion nucléaire dans le Soleil

1. En tenant des lois de conservation, les nucléides à identifier sont respectivement le deutérium ${}^2\text{H}$ et l'hélium ${}^3\text{He}$.

2. Le taux de défaut de la somme des masses des particules par seconde, associée au rayonnement du Soleil, vaut :

$$\dot{\mu} = \frac{P_r}{c^2} = \frac{3,9 \times 10^{26}}{9 \times 10^{16}} = 4,33 \times 10^9 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

3. La variation de la somme des énergies de masse est :

$$-\mu c^2 = \sum_f m_f c^2 - \sum_i m_i c^2 = m_{Ar} c^2 + m_e c^2 - m_{Cl} c^2$$

avec $\mathcal{E}_{l,Cl} = 17 m_p c^2 + 20 m_n c^2 - m_{Cl} c^2$ et $\mathcal{E}_{l,Ar} = 18 m_p c^2 + 19 m_n c^2 - m_{Ar} c^2$. Par conséquent, l'énergie de liaison de la réaction est :

$$\mathcal{E}_l = \sum_f m_f c^2 - \sum_i m_i c^2 = 18 m_p c^2 + 19 m_n c^2 - \mathcal{E}_{l,Ar} + m_e c^2 - 17 m_p c^2 - 20 m_n c^2 + \mathcal{E}_{l,Cl}$$

soit :

$$\mathcal{E}_l = m_p c^2 - m_n c^2 + m_e c^2 + \mathcal{E}_{l,Cl} - \mathcal{E}_{l,Ar}$$

En effectuant, on trouve pour $\mathcal{E}_l$ et pour l'énergie libérée Q :

$$\mathcal{E}_l = \sum_f m_f c^2 - \sum_i m_i c^2 = -739 \text{ keV } \text{ d'où } Q = 739 \text{ keV}$$

Une telle réaction est endoénergétique.

S8– 20. Formation de carbone dans les étoiles

1. On obtient l'énergie de liaison du noyau de carbone selon :

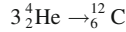
$$\mathcal{E}_l = (A - Z)m_n c^2 + Zm_p c^2 - m_C c^2 \quad \text{avec} \quad m_C c^2 = 12 \times 931,5 - 6 \times 0,511 = 11\,174,934 \text{ MeV}$$

car c'est l'atome de carbone 12, et non le noyau, qui définit l'unité de masse atomique. On en déduit :

$$\mathcal{E}_l = (6 \times 1,008\,665 + 6 \times 1,007\,277) \times 931,5 - 11\,174,934 = 92,166 \text{ MeV}$$

Par nucléon, l'énergie de liaison du carbone 12 vaut donc : $b_C = \mathcal{E}_l/12 = 7,68 \text{ MeV}$.

2. La réaction de fusion de noyaux d'hélium en un noyau de carbone 12 s'écrit :



L'énergie de liaison de cette réaction de fusion de noyaux est :

$$\mathcal{E}_l = \sum_i A_i b_i - \sum_f A_f b_f = 3 \times 4 \times b_{He} - 12 \times b_C = 84,84 - 92,166 = -7,326 \text{ MeV}$$

La réaction est exoénergétique puisque l'énergie qu'elle libère est positive : $Q = -\mathcal{E}_l = 7,326 \text{ MeV}$.

Chapitre 9**S9– 1. Transformation de la densité volumique de charge et de courant**

1. Le quadrivecteur $\{\gamma, \gamma\mathbf{\beta}\}$ s'identifie à $4-p/(mc)$. Comme mc est un invariant et que la pseudo-norme de $4-p$ est mc , c'est un quadrivecteur de pseudo-norme 1 :

$$\gamma^2 - \gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 (1 - \beta^2) = 1$$

2. D'après la conservation de la charge, on a : $n_v d\mathcal{V} = n'_v d\mathcal{V}'$, $d\mathcal{V}$ et $d\mathcal{V}'$ désignant les volumes élémentaires dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. La relation entre $d\mathcal{V}$ et $d\mathcal{V}'$ s'obtient à partir des équations :

$$d\mathcal{V} = \frac{d\mathcal{V}_0}{\gamma} \quad \text{et} \quad d\mathcal{V}' = \frac{d\mathcal{V}_0}{\gamma'}$$

$d\mathcal{V}_0$ étant le volume propre, γ et γ' les facteurs relativistes associés respectivement aux vitesses v et v' . Il en résulte :

$$\frac{n_v}{n'_v} = \frac{d\mathcal{V}}{d\mathcal{V}'} = \frac{\gamma'}{\gamma} = \gamma_e (1 - \beta_e \beta_x) \quad \text{avec} \quad \beta_e = \frac{u}{c} \quad \text{et} \quad \gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2}$$

3. Rappelons les expressions de $4-J$ dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$: $\rho c = n_v q c$, $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$, $\rho' c = n'_v q c$, $\mathbf{J}' = \rho' \mathbf{v}'$. Comme q est invariant, il vient :

$$\frac{\rho}{n_v} = \frac{\rho'}{n'_v} \quad \text{d'où} \quad \rho' = \rho \gamma_e (1 - \beta_e \beta_x)$$

D'autre part, en utilisant la transformation des vitesses, on obtient pour le courant volumique :

$$J'_x = \rho' v'_x = \rho \gamma_e (1 - \beta_e \beta_x) \frac{\beta_x - \beta_e}{1 - \beta_e \beta_x} c = \gamma_e (J_x - \beta_e \rho c)$$

$$J'_y = \rho' v'_y = \rho \gamma_e (1 - \beta_e \beta_x) \frac{\beta_y}{\gamma_e (1 - \beta_e \beta_x)} c = \rho \beta_y c = J_y$$

$$J'_z = \rho' v'_z = \rho \gamma_e (1 - \beta_e \beta_x) \frac{\beta_z}{\gamma_e (1 - \beta_e \beta_x)} c = \rho \beta_z c = J_z$$

Ainsi $\{\rho c, \mathbf{J}\}$ se transforme bien comme un quadrivecteur.

S9– 2. Transformation des forces et transformation des champs

1. Rappelons les formules de transformation des forces :

$$\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}/c = \gamma_e (\gamma' \mathbf{F}' \cdot \mathbf{v}'/c + \beta_e \gamma' F'_x) \quad \gamma F_x = \gamma_e (\gamma' F'_x + \beta_e \gamma' \mathbf{F}' \cdot \mathbf{v}'/c) \quad \gamma F_y = \gamma' F'_y \quad \gamma F_z = \gamma' F'_z$$

2. Comparons les expressions de la force de Lorentz dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, pour une particule chargée au repos dans $\mathcal{R}$. Dans ce référentiel $\mathcal{R}$, $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ s'explique selon :

$$F_x = qE_x \quad F_y = qE_y \quad F_z = qE_z$$

Dans $\mathcal{R}'$, $\mathbf{F}' = q(\mathbf{E}' + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}')$ avec :

$$v'_x = \frac{v_x - v_e}{1 - v_x v_e/c^2} = -v_e \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma_e(1 - v_x v_e/c^2)} = 0 \quad \text{et} \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma_e(1 - v_x v_e/c^2)} = 0$$

Ainsi :

$$F'_x = qE'_x \quad F'_y = q(E'_y + v_e B'_z) \quad F'_z = q(E'_z - v_e B'_y)$$

Comme $\gamma = 1$, $v'_x = -v_e$ et $\gamma' = \gamma_e$, les formules de transformation des forces se réduisent à :

$$F_x = \gamma_e (\gamma_e F'_x - \beta_e^2 \gamma_e F'_x) = F'_x \quad F_y = \gamma_e F'_y \quad F_z = \gamma_e F'_z$$

Il en résulte :

$$E_x = E'_x \quad E_y = \gamma_e (E'_y + \beta_e B'_z c) \quad E_z = \gamma_e (E'_z - \beta_e B'_y c)$$

3. Les deux dernières équations permettent d'écrire les formules réciproques suivantes :

$$E'_y = \gamma_e (E_y - \beta_e B_z c) \quad E'_z = \gamma_e (E_z + \beta_e B_y c)$$

ainsi que les équations :

$$\gamma_e E_y = \gamma_e^2 (E'_y + \beta_e B'_z c) \quad \gamma_e E_z = \gamma_e^2 (E'_z - \beta_e B'_y c)$$

Il en résulte, en éliminant $\gamma_e E_y$ et $\gamma_e E_z$:

$$E'_y = -\gamma_e \beta_e B_z c + \gamma_e^2 (E'_y + \beta_e B'_z c) \quad E'_z = \gamma_e \beta_e B_y c + \gamma_e^2 (E'_z - \beta_e B'_y c)$$

On en déduit respectivement, puisque $\gamma_e^2 - 1 = \gamma_e^2 \beta_e^2$: $B_z c = \gamma_e (B'_z c + \beta_e E'_y)$ et $B_y c = \gamma_e (B'_y c - \beta_e E'_z)$.

Afin d'obtenir la transformation de la première composante du champ magnétique, considérons une particule se déplaçant le long de l'axe Oy avec la vitesse $\mathbf{v}$ par rapport à $\mathcal{R}$. Explicitons la composante suivant Oz de la force qui s'exerce sur la particule dans $\mathcal{R}$:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \text{donne} \quad F_z = q(E_z - \beta B_x c)$$

Dans $\mathcal{R}'$, cette force a pour expression $\mathbf{F}' = q(\mathbf{E}' + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}')$, avec :

$$v'_x = \frac{v_x - v_e}{1 - v_x v_e/c^2} = -v_e \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma_e(1 - v_x v_e/c^2)} = \frac{v}{\gamma_e} \quad \text{et} \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma_e(1 - v_x v_e/c^2)} = 0$$

Ainsi :

$$F'_z = q \left(E'_z - v_e B'_y - \frac{\beta B'_x c}{\gamma_e} \right)$$

Il en résulte :

$$\gamma (E_z - \beta B_x c) = \gamma' \left(E'_z - v_e B'_y - \frac{\beta B'_x c}{\gamma_e} \right) \quad \text{soit} \quad E_z - \beta B_x c = \gamma_e \left(E'_z - v_e B'_y - \frac{\beta B'_x c}{\gamma_e} \right)$$

puisque $\gamma' c = \gamma_e (\gamma c - \beta_e \gamma v_x) = \gamma_e \gamma c$. On en déduit, en utilisant la relation $E_z = \gamma_e (E'_z - v_e B'_y)$:

$$E_z - \beta B_x c = \gamma_e (E'_z - v_e B'_y) - \beta B'_x c \quad \text{et} \quad B_x = B'_x$$

S9– 3. Invariance des équations de Maxwell en relativité

1. Dans $\mathcal{R}'$, l'équation traduisant la loi d'induction électromagnétique donne :

$$\frac{\partial E'_x}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} + \frac{\partial B'_z}{\partial t'} = 0 \quad \frac{\partial E'_x}{\partial z'} - \frac{\partial E'_z}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial t'} = 0 \quad \frac{\partial E'_y}{\partial x'} - \frac{\partial E'_z}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial t'} = 0$$

2. D'après la transformation de Lorentz-Poincaré, on a :

$$\frac{\partial}{\partial ct'} = \left(\frac{\partial}{\partial ct} \times \frac{\partial ct}{\partial ct'} + \frac{\partial}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial ct'} \right) = \gamma_e \left(\frac{\partial}{\partial ct} + \beta_e \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x'} = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t} \times \frac{\partial ct}{\partial x'} \right) = -\gamma_e \left(\frac{\partial}{\partial x} + \beta_e \frac{\partial}{\partial ct} \right)$$

En outre on a, évidemment : $-\partial/\partial y' = -\partial/\partial y$ et $-\partial/\partial z' = -\partial/\partial z$. Par conséquent :

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y} - \frac{\partial E'_y}{\partial z} + \gamma_e \left(\frac{\partial B'_z}{\partial t} - v_e \frac{\partial B'_x}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial E'_x}{\partial z} - \gamma_e \left(\frac{\partial E'_z}{\partial x} + \frac{v_e}{c^2} \frac{\partial E'_z}{\partial t} \right) + \gamma_e \left(\frac{\partial B'_y}{\partial t} - v_e \frac{\partial B'_x}{\partial x} \right) = 0$$

$$\gamma_e \left(\frac{\partial E'_y}{\partial x} + \frac{v_e}{c^2} \frac{\partial E'_y}{\partial t} \right) - \frac{\partial E'_x}{\partial y} + \gamma_e \left(\frac{\partial B'_z}{\partial t} - v_e \frac{\partial B'_z}{\partial x} \right) = 0$$

En ordonnant les deux dernières équations et en les comparant aux équations analogues dans $\mathcal{R}$, qui sont :

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0$$

on trouve :

$$E_x = E'_x \quad E_y = \gamma_e (E'_y + \beta_e c B'_z) \quad E_z = \gamma_e (E'_z - \beta_e c B'_y)$$

$$c B_y = \gamma_e (c B'_y - \beta_e E'_z) \quad c B_z = \gamma_e (c B'_z - \beta_e E'_y)$$

3. Afin d'obtenir la transformation de la composante B_x , remplaçons, dans l'équation scalaire suivante, relative à la coordonnée x de $\mathcal{R}$:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

E_z , E_y par leurs expressions et $\partial/\partial t$ par $\gamma_e (\partial/\partial t' - v_e \partial/\partial x')$. Il vient :

$$\frac{\partial}{\partial y'} [\gamma_e (E'_z - \beta_e c B'_y)] - \frac{\partial}{\partial z'} [\gamma_e (E'_y + \beta_e c B'_z)] + \gamma_e \left(\frac{\partial B'_x}{\partial t'} - v_e \frac{\partial B'_x}{\partial x'} \right) = 0$$

soit :

$$\frac{\partial B'_x}{\partial t'} = -\frac{\partial E'_z}{\partial y'} + \frac{\partial E'_y}{\partial z'} = \frac{\partial B_x}{\partial t'} - v_e \left(\frac{\partial B'_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} \right)$$

En identifiant, on trouve, puisque $\text{div}' \mathbf{B}' = 0$:

$$\frac{\partial B'_x}{\partial t'} = \frac{\partial B_x}{\partial t'} - v_e \frac{\partial (B_x - B'_x)}{\partial x'} \quad \text{soit} \quad \left(\frac{\partial}{\partial ct'} - \beta_e \frac{\partial}{\partial x'} \right) (B_x - B'_x) = 0$$

On en déduit que $B_x - B'_x = \text{Cte} = 0$ car ces composantes doivent s'annuler à l'infini, d'où l'égalité $B_x = B'_x$.

S9– 4. Transformation des potentiels créés par un fil rectiligne

1. a) Les composantes du quadrivecteur courant volumique $4\text{-}J_-$ associé aux électrons, dans $\mathcal{R}$, sont :

$$\rho_- c = -13,5 \times 10^9 \times 3 \times 10^8 = -40,5 \times 10^{17} \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$$

et :

$$\rho_- u = -13,5 \times 10^9 \times 0,75 \times 10^{-3} = -10,125 \times 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2} \quad \text{soit} \quad -10,125 \text{ A} \cdot \text{mm}^{-2}$$

Les formules de transformation entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ donnent :

$$c\rho'_- = \gamma_e(c\rho_- - \beta_e\rho_-u) = \gamma_e c\rho_- (1 - \beta_e\beta) \quad \text{et} \quad u'\rho'_- = \gamma_e(u\rho_- - \beta_e c\rho_-) = \gamma_e c\rho_- (\beta - \beta_e)$$

avec $\beta_e = v_e/c$ et $\gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2}$.

b) Celles du quadrivecteur courant volumique $(4\text{-}J_+)$ associé aux ions, dans $\mathcal{R}$, sont :

$$c\rho_+ = 13,5 \times 10^9 \times 3 \times 10^8 = 40,5 \times 10^{17} \text{ A} \cdot \text{m}^{-2} \quad \text{et} \quad u\rho_+ = 0$$

Les formules de transformation entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ donnent, dans ce cas :

$$c\rho'_+ = \gamma_e c\rho_+ \quad \text{et} \quad u'\rho'_+ = -\gamma_e \beta_e \rho_+ c$$

c) On en déduit le quadrivecteur totale $4\text{-}J = (4\text{-}J_-) + (4\text{-}J_+)$, de composantes dans $\mathcal{R}$:

$$(\rho_- + \rho_+)c = 0 \quad \text{et} \quad J_x = u\rho_-$$

Dans $\mathcal{R}'$, on trouve par transformation $\rho'c = (\rho'_- + \rho'_+)c = \gamma_e c(1 - \beta_e\beta)\rho_- + \gamma_e c\rho_+$, soit :

$$\rho'c = \gamma_e \beta_e c \beta \rho_- = \gamma_e \beta_e u \rho_- = -1,67 \times 0,8 \times 10,125 \times 10^6 = -13,53 \times 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$$

et :

$$J'_x = u'\rho'_- + u'\rho'_+ = \gamma_e c(\beta - \beta_e)\rho_- - \gamma_e \beta_e c\rho_+ = \gamma_e c\beta\rho_- = \gamma_e J_x$$

Ainsi, dans $\mathcal{R}'$, le fil n'est pas neutre puisque sa charge ρ' n'est pas nulle, d'où l'existence dans $\mathcal{R}'$ d'un potentiel électrique d'expression :

$$V' = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \lambda' \ln R + \text{Cte} \quad \text{avec} \quad \lambda' = \rho's = \frac{\gamma_e \beta_e J s}{c} = \frac{\gamma_e \beta_e I}{c} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\gamma_e \beta_e I}{c} \ln \left(\frac{R}{R_0} \right) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\gamma_e \beta_e I}{c} \ln \left(\frac{R}{R_0} \right)$$

en remplaçant $\epsilon_0 \mu_0 c^2$ par 1.

2. a) Le quadripotentiel $4\text{-}A$ se réduit dans $\mathcal{R}$ à sa composante magnétique (cf. *Électromagnétisme*) :

$$\frac{V}{c} = 0 \quad \text{et} \quad A_x = -\frac{\mu_0}{2\pi} I \ln R + \text{Cte} = -\frac{\mu_0}{2\pi} I \ln \left(\frac{R}{R_0} \right) \quad \text{avec} \quad I = J_s s = -\rho_- u s$$

si l'origine est prise à $R = R_0$.

b) On en déduit le quadripotentiel $4\text{-}A'$ dans $\mathcal{R}'$ par simple application des formules de transformation :

$$\frac{V'}{c} = \gamma_e \left(\frac{V}{c} - \beta_e A_x \right) = -\gamma_e \beta_e A_x = \gamma_e \beta_e \frac{\mu_0}{2\pi} I \ln \left(\frac{R}{R_0} \right)$$

et :

$$A'_x = \gamma_e \left(A_x - \beta_e \frac{V}{c} \right) = \gamma_e A_x = -\gamma_e \frac{\mu_0}{2\pi} I \ln \left(\frac{R}{R_0} \right)$$

Notons que l'on retrouve ainsi le potentiel V' créé par la distribution de charge non nulle dans $\mathcal{R}'$.

S9– 5. Variation de l'angle entre les champs électrique et magnétique

1. D'après les formules de transformation des champs, on a, pour les composantes selon l'axe du mouvement :

$$E_x = E'_x = 0 \quad B_x = B'_x = 0$$

Quant aux composantes transversales relatives au champ électrique, elles s'écrivent :

$$E_y = \gamma_e (E'_y + \beta_e B'_z c) = \gamma_e E_0 \quad E_z = \gamma_e (E'_z - \beta_e B'_y c) = -\gamma_e \beta_e E_0$$

et, pour le champ magnétique :

$$B_y c = \gamma_e (B'_y c - \beta_e E'_z) = \gamma_e E_0 \quad B_z c = \gamma_e (B'_z c + \beta_e E'_y) = \gamma_e E_0 \beta_e$$

2. Pour que les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ dans $\mathcal{R}$ fassent un angle de α , il faut que l'on ait :

$$\cos \alpha = \frac{E_y B_y + E_z B_z}{EB} \quad \text{soit} \quad \cos \alpha = \frac{\gamma_e^2 E_0^2 (1 - \beta_e^2)}{\gamma_e^2 E_0^2 (1 + \beta_e^2)} \quad \text{d'où} \quad \beta_e = \left(\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \right)^{1/2}$$

En effectuant, on trouve, puisque $\cos \alpha = 1/2$:

$$\beta_e = \left(\frac{2 - 1/2}{2 + 1/2} \right)^{1/2} = 0,6^{1/2} = 0,77$$

3. Le domaine de variation de α est défini par la double inégalité :

$$0 \leq \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} < 1 \quad \text{ce qui donne} \quad 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$$

S9- 6. Invariants du champ électromagnétique

1. Les invariants du champ électromagnétique $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ sont $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}c$ et $E^2 - B^2 c^2$. Le carré de $\mathbf{F}$ est aussi un invariant, puisque :

$$\mathbf{F}^2 = (\mathbf{E} + i \mathbf{B}c)^2 = E^2 - B^2 c^2 + 2i \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}c$$

2. Calculons la valeur des deux invariants $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}c$ et $E^2 - B^2 c^2$:

$$S = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}c = EBc \cos \theta = 5 \times 10^6 \times 0,01 \times 3 \times 10^8 \times \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) = 13 \times 10^{12} \text{ SI}$$

et $N^2 = E^2 - B^2 c^2 = 16 \times 10^{12} \text{ SI}$. On en déduit $E'B'c \cos \theta' = S$ et $E'^2 - B'^2 c^2 = N^2$, d'où :

$$B'c = (E'^2 - N^2)^{1/2} = 4,47 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \quad \text{et} \quad \cos \theta' = \frac{S}{E'B'c} = 0,485$$

Ainsi, l'angle que font entre eux les champs électrique et magnétique dans $\mathcal{R}'$ vaut 61° .

3. Comme $S \neq 0$, il n'existe pas de référentiel dans lequel le champ électromagnétique précédent se réduise à un champ électrique seul ou à un champ magnétique seul.

4. Dans le référentiel $\mathcal{R}''$ dans lequel les champs $\mathbf{E}''$ et $\mathbf{B}''c$ sont parallèles, on a :

$$E'' B'' c = S \quad \text{et} \quad E'^2 - B'^2 c^2 = N^2 \quad \text{d'où} \quad E'^2 - \frac{S^2}{E'^2} = N^2$$

On obtient E'' , en résolvant l'équation du deuxième degré en $X = E'^2$ suivante :

$$X^2 - N^2 X - S^2 = 0 \quad \text{de solution physique} \quad X = \frac{N^2 + (N^4 + 4S^2)^{1/2}}{2} = 23,12 \times 10^{12} \text{ SI}$$

On trouve donc $E'' = 4,82 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ et $B''c = S/E'' = 2,695 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

S9- 7. Force d'interaction entre un électron et un fil chargé positivement

1. Le champ électromagnétique ($\mathbf{E}'$, $\mathbf{B}'$) que produit dans $\mathcal{R}'$ la distribution linéique de charge se réduit à un champ électrostatique $\mathbf{E}'$. On calcule de dernier en appliquant le théorème de Gauss à une surface fermée cylindrique centrée sur le fil. D'après les symétries (cf. *Électromagnétisme*), le champ est radial, d'où :

$$2\pi D l E'_y = \frac{\rho_l l}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad E'_y = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right) \frac{2\rho_l}{D} = 1,8 \times 10^7 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

Il est facile d'en déduire la force :

$$\mathbf{F}' = - \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right) \frac{2e\rho_l}{D} \mathbf{e}'_y \quad \text{d'où} \quad F' = eE' = 2,88 \times 10^{-12} \text{ N}$$

2. On obtient le champ électromagnétique dans $\mathcal{R}$ à l'aide des formules de transformation des champs :

$$E_x = E'_x = 0 \quad E_y = \gamma_e(E'_y + \beta_e B'_z c) = \gamma_e E'_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\gamma_e \rho_l}{D} \quad E_z = \gamma_e(E'_z - \beta_e B'_y c) = 0$$

et :

$$B_x = B'_x = 0 \quad B_y c = \gamma_e(B'_y c - \beta_e E'_z) = 0 \\ B_z c = \gamma_e(B'_z c + \beta_e E'_y) = \gamma_e \beta_e E'_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\gamma_e \beta_e \rho_l}{D} = \frac{\mu_0 c}{4\pi} \frac{\gamma_e \rho_l v_e}{2D}$$

Ainsi :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\gamma_e \rho_l}{D} \mathbf{e}_y \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\gamma_e \rho_l v_e}{2D} \mathbf{e}_z$$

La force qui s'exerce sur l'électron dans $\mathcal{R}$ est :

$$\mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -e(\gamma_e E'_y \mathbf{e}_y + \beta_e \mathbf{e}_x \times B c \mathbf{e}_z) = -e E'_y \gamma_e (1 - \beta_e^2) \mathbf{e}_y = \frac{-e E'}{\gamma_e} \mathbf{e}_y = \frac{\mathbf{F}'}{\gamma_e}$$

Ce résultat est bien en accord avec la formule de transformation des forces transversales (cf. chapitre 5) :

$$\gamma F_y = \gamma' F'_y \quad \text{donne} \quad \gamma_e F_y = F'_y \quad \text{et} \quad \mathbf{F} = \frac{\mathbf{F}'}{\gamma_e}$$

S9- 8. Champs électrique et magnétique entre les armatures d'un condensateur

1. Le champ magnétique est évidemment nul, puisque dans $\mathcal{R}$ les charges sont fixes : $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. Quant au champ électrique, il a pour expression (cf. *Électromagnétisme*) :

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{e}_y = E \mathbf{e}_y \quad \text{avec} \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{a^2 \epsilon_0} = 1,13 \times 10^8 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

On en déduit les deux invariants : $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ et $E^2 - B^2 c^2 = E^2 = [Q/(a^2 \epsilon_0)]^2 = 1,28 \times 10^{16} \text{ SI}$.

2. Dans $\mathcal{R}'$, les champs électrique et magnétique sont obtenus à l'aide de la transformation des champs :

$$E'_x = E_x = 0 \quad E'_y = \gamma_e(E_y - \beta_e B_z c) = \gamma_e E_y = \gamma_e \frac{Q}{a^2 \epsilon_0} = 3,62 \times 10^8 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \quad E'_z = 0$$

puisque $\gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2} = 3,2$. En outre : $B'_x c = B_x c = 0$, $B'_y c = \gamma_e(B_y c + \beta_e E_z) = 0$ et :

$$B'_z c = \gamma_e(B_z c - \beta_e E_y) = 0 - \gamma_e \beta_e E_y = -(\gamma_e^2 - 1)^{1/2} \frac{Q}{a^2 \epsilon_0} = 3,44 \times 10^8 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

3. On peut retrouver les expressions précédentes à l'aide de la transformation du quadricourant volumique :

$$4-J(\rho c, \mathbf{J}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{J} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \rho c = 300 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$$

Les composantes de $4-J'$ dans $\mathcal{R}'$ sont :

$$\rho' c = \gamma_e(\rho c - \beta_e J_x) = \gamma_e \rho c \quad J'_x = \gamma_e(J_x - \beta_e \rho c) = -\gamma_e \beta_e \rho c \quad J'_y = 0 \quad \text{et} \quad J'_z = 0$$

Le champ électrique dans $\mathcal{R}'$ est donc produit par une double distribution surfacique de charge, de densités opposées $\gamma_e \rho_s$ et $-\gamma_e \rho_s$:

$$E'_y = \frac{\rho'_s}{\epsilon_0} = \frac{\gamma_e \rho_s}{\epsilon_0} = \gamma_e \frac{Q}{a^2 \epsilon_0}$$

De même, le champ magnétique dans $\mathcal{R}'$ est produit par une double distribution surfacique de courant, de densités $-\gamma_e \beta_e \rho_s c$ et $\gamma_e \beta_e \rho_s c$. On sait qu'un tel champ est uniforme et vaut (cf. *Électromagnétisme*) :

$$B'_z = \mu_0 J'_{s,z} = -\mu_0 \gamma_e \beta_e \rho_s c = -\frac{\gamma_e \beta_e \rho_s}{\epsilon_0 c} = -\gamma_e \beta_e E \quad \text{puisque} \quad \mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$$

S9– 9. Force d'interaction entre deux particules chargées de même vitesse

1. Dans $\mathcal{R}'$, le champ est électrostatique :

$$\mathbf{E}' = E' \mathbf{e}_y' \quad \text{avec} \quad E' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{e}{d^2} \right)$$

Dans $\mathcal{R}$, on trouve, à l'aide des formules de transformation des champs, en introduisant $\gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2}$:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e\gamma_e}{d^2} \mathbf{e}_y \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e\gamma_e\beta_e}{d^2} \mathbf{e}_z$$

On en déduit la force de Lorentz :

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\gamma_e e^2}{d^2} - \frac{\gamma_e \beta_e^2 e^2}{d^2} \right) \mathbf{e}_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\gamma_e d^2} \mathbf{e}_y$$

2. Pour $\beta_e \ll 1$, $1/\gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{1/2} \approx 1 - \beta_e^2/2$. Par conséquent, en posant $q_e^2 = e^2/(4\pi\epsilon_0)$:

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_e^2}{d^2} \left(1 - \frac{\beta_e^2}{2} \right) \mathbf{e}_y$$

3. Les forces électrique et magnétique donnent séparément, dans l'hypothèse où $\beta \ll 1$:

$$\mathbf{F}_e = -e\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma_e e^2}{d^2} \mathbf{e}_y \approx \frac{q_e^2}{d^2} \left(1 + \frac{\beta_e^2}{2} \right) \mathbf{e}_y \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_m = -e\mathbf{u} \times \mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\gamma_e u^2 e^2}{d^2} \mathbf{e}_y \approx -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^2 u^2}{d^2} \mathbf{e}_y$$

On voit que la force de Coulomb s'identifie au premier terme du développement de la force électrique et que la force magnétique rappelle la force magnétique $\mathbf{F}_m$ qui s'exerce entre deux éléments de courants.

S9– 10. Filtre de Wien en relativité

1. Pour que l'électron garde sa trajectoire rectiligne, il faut que la force électromagnétique qui s'exerce sur lui soit nulle :

$$\mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{0} \quad \text{soit} \quad E \mathbf{e}_y + v \mathbf{e}_x \times B \mathbf{e}_z = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad v = \frac{E}{B} = \frac{10^6}{0,02} = 5 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2. On obtient les champs E' et B' dans $\mathcal{R}'$ en utilisant les formules de transformation des champs :

$$E'_y = \gamma_e (E_y - \beta_e B_z c) \quad \text{et} \quad B'_z c = \gamma_e (B_z c - \beta_e E_y)$$

toutes les autres composantes étant nulles.

3. La particule a une trajectoire rectiligne dans $\mathcal{R}'$ si les champs électrique et magnétique E' et B' sont reliés à sa vitesse v' par l'équation :

$$v' = \frac{E'_y}{B'_z} = c \frac{\gamma_e (E_y - \beta_e B_z c)}{\gamma_e (B_z c - \beta_e E_y)} = c \frac{E_y - \beta_e B_z c}{B_z c - \beta_e E_y} = c \frac{E_y/(B_z c) - \beta_e}{c - \beta_e E_y/(B_z c)} = \frac{v - v_e}{1 - v_e v/c^2}$$

Ce résultat était prévisible, puisque conforme à la composition einsteinienne des vitesses. Pour $\beta_e = 0,15$, on a, sachant que $\beta = v/c = 0,167$:

$$\beta' = \frac{v'}{c} = \frac{\beta - \beta_e}{1 - \beta_e \beta} = \frac{0,167 - 0,15}{1 - 0,167 \times 0,15} = 0,0174$$

S9– 11. Particule dans des champs électrique et magnétique orthogonaux

1. Comme les champs sont perpendiculaires à la direction de translation, il vient, en appliquant les formules de transformation des champs :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma_e (\mathbf{E}_{\perp} + \boldsymbol{\beta}_e \times \mathbf{B}_{\perp}) = \gamma_e (E + uB) \mathbf{e}_z \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma_e (\mathbf{B}_{\perp} + \boldsymbol{\beta}_e \times \mathbf{E}_{\perp}) = \gamma_e (B + vE/c^2) \mathbf{e}_y\end{aligned}$$

Il en résulte que $\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' = 0$.

2. Comme $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' = 0$, il existe un référentiel $\mathcal{R}'$ tel que $\mathbf{E}' = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{B}' = \mathbf{0}$:

$$E' = 0 \quad \text{pour} \quad u = -E/B \quad \text{et} \quad B' = 0 \quad \text{pour} \quad u = -\frac{Bc^2}{E}$$

3. Dans le cas singulier où $E = Bc$, le deuxième invariant $E^2 - B^2 c^2$ est aussi nul. On a alors, à la fois, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ et $E^2 - B^2 c^2 = 0$. Il en résulte que $E = Bc$ dans tout autre référentiel. Notons qu'il n'existe pas alors de référentiel où l'un des champs s'annule.

S9– 12. Force sur un électron de conduction dans un métal

1. L'application du théorème de Gauss à un cylindre coaxial au conducteur, de longueur l et de rayon de base $r < R$, donne :

$$2\pi r l E = 0 \quad \text{d'où} \quad E = 0$$

Quant au théorème d'Ampère, appliqué sur un cercle centré sur l'axe, normal à cet l'axe et de rayon $r < R$, il fournit l'équation :

$$2\pi r B = \mu_0 I = \mu_0 J \pi r^2 = \mu_0 n_v e u \pi r^2 \quad \text{d'où} \quad \mathbf{B} = -\frac{\mu_0 n_v e u}{2} r \mathbf{e}_{\theta}$$

La force qui s'exerce sur l'électron a pour expression :

$$\mathbf{F} = -e \mathbf{u} \times \mathbf{B} = -\frac{e^2 \mu_0 n_v u^2}{2} r \mathbf{e}_y$$

2. On a $\rho' = en'_{v,+} - en'_{v,-}$. Comme $n'_v = \gamma_e n_v (1 - \beta_e v_x/c)$, il vient :

$$n'_{v,+} = \gamma_e n_{v,+} \quad \text{et} \quad n'_{v,-} = \gamma_e (1 - \beta_e^2) n_{v,-} = \frac{n_{v,-}}{\gamma_e}$$

puisque $v_{x,+} = 0$ et $v_{x,-} = v_e$. On en déduit, si $n_v = n_{v,+} = n_{v,-}$:

$$\rho' = en_v \gamma_e \left(1 - \frac{1}{\gamma_e^2}\right) = en_v \beta_e^2 (1 - \beta_e^2)^{-1/2}$$

3. La force $\mathbf{F}$ est transversale puisque dirigée suivant Oy . Dans ce cas, la relation entre $\mathbf{F}$ et $\mathbf{F}'$ est simple. On a, en effet :

$$\gamma \mathbf{F} = \gamma' \mathbf{F}' \quad \text{soit} \quad \mathbf{F}' = \frac{\gamma}{\gamma'} \mathbf{F}$$

avec $\gamma' = 1$ puisque $v' = 0$ et $\gamma = \gamma_e$ puisque $\mathbf{v} = \mathbf{u}$. On en déduit $\mathbf{F}'$:

$$\mathbf{F}' = \gamma_e \mathbf{F} = -e \frac{\mu_0 n_v u^2}{2(1 - u^2/c^2)^{1/2}} r \mathbf{e}_y$$

S9– 13. Électron dans un champ électrique et un champ magnétique orthogonaux

1. Si les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{Bc}$ sont orthogonaux, l'invariant $\mathbf{E} \cdot \mathbf{Bc}$ est nul. Il existe donc un référentiel où seul existe soit un champ électrique soit un champ magnétique. Appelons $\mathcal{R}'$ le référentiel dans lequel $\mathbf{E}' = \mathbf{0}$. Pour obtenir sa vitesse, il suffit d'utiliser les formules de transformation des champs :

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma_e(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}_{\perp}) = \mathbf{0} \quad \text{d'où} \quad E \mathbf{e}_y = B \mathbf{e}_z \times \mathbf{v}_e$$

On en déduit $\mathbf{v}_e = \beta_e c \mathbf{e}_x$ avec $\beta_e = E/(Bc) = 4/5 = 0,8$.

2. La valeur du champ magnétique dans $\mathcal{R}'$ s'obtient aisément à l'aide de l'invariant :

$$E^2 - B^2 c^2 = -B'^2 c^2 \quad \text{d'où} \quad B'c = (B^2 c^2 - E^2)^{1/2} = 3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

On l'obtiendrait de façon plus laborieuse à l'aide des formules de transformation du champ magnétique transversal :

$$\mathbf{B}'_{\perp} c = \gamma_e \left(\mathbf{B}_{\perp} c - \frac{\mathbf{v}_e}{c} \times \mathbf{E}_{\perp} \right) = \gamma_e (Bc \mathbf{e}_z - \beta_e \mathbf{e}_x \times E \mathbf{e}_y) = \gamma_e (Bc - \beta_e E) \mathbf{e}_z = B'c \mathbf{e}_z$$

avec : $B'c = \gamma_e (Bc - \beta_e E) = 1,67(5 - 0,8 \times 4) = 3$, puisque $\gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2} = 1,67$.

3. Dans $\mathcal{R}'$, la vitesse garde sa vitesse initiale v' puisque la seule force qui s'exerce sur l'électron est une force magnétique. La composition des vitesses donne alors :

$$v'_x = \frac{v_x - v_e}{1 - v_x v_e / c^2} = -v_e \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma_e (1 - v_x v_e / c^2)} = 0 \quad \text{et} \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma_e (1 - v_x v_e / c^2)} = 0$$

Par conséquent, la quantité de mouvement $\mathbf{p}'$ de l'électron a pour expression :

$$\mathbf{p}' = \gamma' m_e \mathbf{v}' = -\gamma_e \beta_e m_e c \mathbf{e}_x = -(\gamma_e^2 - 1)^{1/2} m_e c \mathbf{e}_x = -p' \mathbf{e}_x \quad \text{avec} \quad p' = 1,33 \times 0,511 = 0,681 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-1}$$

4. Le mouvement de l'électron dans $\mathcal{R}'$ est circulaire, uniforme avec un rayon R' qui vaut (cf. chapitre 6) :

$$R' = \frac{p'}{eB'} = \frac{p'c}{eB'c} = \frac{0,681}{3} = 0,227 \text{ m}$$

On sait que les équations du mouvement dans $\mathcal{R}'$ sont, puisque la vitesse initiale v' vaut $-v_e \mathbf{e}_x$:

$$x' = -R' \sin(\omega'_c t') \quad y' = R' [1 - \cos(\omega'_c t')] \quad z' = 0 \quad \text{avec} \quad \omega'_c = \frac{eB'}{\gamma m_e}$$

est la pulsation cyclotron dans $\mathcal{R}'$. La vitesse initiale d'un tel mouvement circulaire dans $\mathcal{R}'$ est v_e , ce que l'on peut vérifier :

$$\left(\frac{dx'}{dt} \right)_i = R' \omega'_c = \frac{p'}{eB'} \frac{eB'}{\gamma_e m_e} = \frac{p'}{\gamma_e m_e} = v' = v_e$$

On obtient le mouvement dans $\mathcal{R}$, à l'aide des formules de transformation de Lorentz-Poincaré :

$$x = \gamma_e(x' + \beta_e c t') = \gamma_e [v_e t' - R' \sin(\omega'_c t')] \quad y = y' = R' [1 - \cos(\omega'_c t')] \quad z = z' = 0$$

S9– 14. Rayonnement synchrotron

1. L'équation différentielle du premier ordre, à laquelle satisfait le vecteur vitesse, est donnée par la loi fondamentale de la dynamique einsteinienne $d\mathbf{p}/dt = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ avec $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$. Comme la force magnétique ne travaille pas, il vient :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{v} = (q\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{soit en effectuant} \quad d(\gamma mc^2) = 0$$

Il en résulte que γ et la norme v de $\mathbf{v}$ sont des constantes. Il vient, alors :

$$\gamma m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \text{d'où} \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \times \omega_c \frac{\mathbf{B}}{B} \quad \text{avec} \quad \omega_c = \frac{qB}{\gamma m}$$

2. Lorsque la composante de la vitesse initiale de la particule, suivant la direction de $\mathbf{B}$, est nulle, la trajectoire est un cercle ; sinon, c'est une hélice.

3. La pulsation cyclotron de l'électron dans ce cas vaut, au signe près :

$$\omega_c = \frac{eB}{\gamma m_e} = \frac{1,6 \times 10^{-19} \times 0,1}{0,91 \times 10^{-30} \times 10} = 1,76 \times 10^9 \text{ rad.s}^{-1} \quad \text{puisque} \quad \gamma \approx 10$$

La longueur caractéristique de la trajectoire circulaire est le rayon R :

$$R = \frac{\gamma m_e v}{eB} = \gamma \beta \frac{m_e c}{eB} = (\gamma^2 - 1)^{1/2} \frac{m_e c}{eB} \approx 17 \text{ cm}$$

4. a) La puissance électromagnétique rayonnée est : $\Phi = 2q_e^2 \gamma^4 a^2 / (3c^3)$ avec $a = \omega_c v$. Par conséquent :

$$\Phi = \frac{2q_e^2 c^2 \beta^2 \gamma^4 \omega_c^2}{3c^3} = \frac{2q_e^2 c^2 \beta^2 \gamma^4}{3c^3} \frac{e^2 B^2}{\gamma^2 m^2} = \frac{2q_e^4 \beta^2 \gamma^2}{3m^2 c^4} c (4\pi\epsilon_0) c^2 B^2 = 2c \frac{8\pi r_e^2}{3} \frac{B^2}{2\mu_0} (\gamma^2 - 1)$$

Ainsi, on trouve bien :

$$\Phi = 2c\sigma_T \frac{B^2}{2\mu_0} (\gamma^2 - 1) \quad \text{avec} \quad \sigma_T = \frac{8\pi r_e^2}{3}$$

b) La quantité $B^2/(2\mu_0)$ est l'énergie magnétique volumique associée au champ $\mathbf{B}$; r_e est une longueur telle que l'énergie de masse de l'électron soit égale à l'énergie électrostatique (à un facteur numérique près qui vaut 3/5) d'un électron assimilé à une boule uniformément chargée en volume :

$$m_e c^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_e} = \frac{q_e^2}{r_e} \quad \text{où} \quad r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} = 2,8 \times 10^{-15} \text{ m}$$

est appelé le rayon classique (par opposition à quantique) de l'électron. La vérification de la cohérence dimensionnelle de l'équation précédente est aisée : Φ est une puissance qui s'exprime en watt, $B^2/(2\mu_0)$ une énergie volumique, σ_T une aire (section efficace de Thomson) et c une vitesse. Le membre de droite a bien, lui aussi, les dimensions d'une puissance.

c) Calculons la puissance rayonnée par l'électron. Comme :

$$\sigma_T = \frac{8\pi r_e^2}{3} = 0,665 \times 10^{-28} \text{ m}^2 \quad \frac{B^2}{2\mu_0} \approx 4 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \quad \gamma^2 - 1 = 99$$

on trouve :

$$\Phi \approx 1,6 \times 10^{-14} \text{ W} \quad \text{soit} \quad \frac{1,6 \times 10^{-14}}{1,6 \times 10^{-13}} = 0,1 \text{ MeV} \cdot \text{s}^{-1}$$

5. Écrivons la composition einsteinienne des vitesses entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_0$, de vitesse v_e par rapport à $\mathcal{R}$, pour des photons émis de façon isotrope dans $\mathcal{R}_0$. On a :

$$c \cos \theta = \frac{c \cos \theta_0 + v_e}{1 + v_e \cos \theta_0 / c}$$

Lorsque θ_0 varie entre 0 et $\pi/2$, θ varie entre 0 et une valeur maximale θ_m telle que : $\cos \theta_m = \beta = 0,995$. Comme $v_\psi/c \approx 1$, l'angle θ_m est petit. Par conséquent :

$$1 - \frac{\theta_m^2}{2} \approx \beta \quad \text{d'où} \quad \theta_m^2 = 2(1 - \beta) \approx (1 + \beta)(1 - \beta) = 1 - \beta^2 = \frac{1}{\gamma^2}$$

La demi-largeur du rayonnement vaut donc : $\theta_m \approx 1/\gamma$.

Chapitre 10

S10– 1. Boule de pétanque et balle de tennis

1. La poussée d'Archimède due à l'air est négligeable, puisque la masse volumique de l'air, $\rho = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, est faible devant la masse volumique des boules. En effet, on a :

$$\rho_p = \frac{M_p}{4\pi R_p^3/3} = \frac{3 \times 0,7}{4\pi \times 3,8^3 \times 10^{-6}} = 3\,045 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \quad \text{et} \quad \rho_t = \frac{M_t}{4\pi R_t^3/3} = \frac{3 \times 0,058}{4\pi \times 3,35^3 \times 10^{-6}} = 368,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

L'équation différentielle du mouvement, suivant la verticale descendante Ox , est :

$$m \frac{dv}{dt} = mg - Av^2 \quad \text{ce qui s'écrit} \quad \frac{dv}{dt} = g \left(1 - \frac{v^2}{v_l^2} \right) \quad \text{en posant} \quad v_l = \left(\frac{mg}{A} \right)^{1/2}$$

C'est une équation non linéaire que l'on résout aisément en l'écrivant sous la forme (cf. *Mécanique*) :

$$\frac{dv}{1 - v/v_l} + \frac{dv}{1 + v/v_l} = 2g \, dt$$

Il vient en intégrant :

$$\ln \left(\frac{1 + v/v_l}{1 - v/v_l} \right) = \frac{2gt}{v_l} \quad \text{soit} \quad v = v_l \tanh \left(\frac{gt}{v_l} \right)$$

La quantité v_l est donc une vitesse limite. Elle vaut pour les deux boules, respectivement :

$$v_{l,p} = \left(\frac{m_p g}{A_p} \right)^{1/2} = 98,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad v_{l,t} = \left(\frac{m_t g}{A_t} \right)^{1/2} = 32 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Dans l'approximation de la chute libre, on a, puisqu'alors $gt \ll v_l$:

$$v \approx v_l \left(\frac{gt}{v_l} \right) = gt$$

Il est intéressant de calculer ces vitesses pour un objet sphérique. Compte tenu de la grande valeur du nombre de Reynolds, ici de l'ordre de 10 000, on peut adopter pour C_x la valeur 0,44, couramment admise.

i) Boule de pétanque : $m_1 = 700 \text{ g}$, $D_1 = 7,6 \text{ cm}$, d'où $v_{l,1} = 72,75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

ii) Balle de tennis : $m_2 = 58 \text{ g}$, $D_2 = 6,7 \text{ cm}$, d'où $v_{l,2} = 23,75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

2. Poursuivons l'analyse en exprimant la distance parcourue :

$$x = \int v \, dt = \int v_l \tanh \left(\frac{gt}{v_l} \right) dt = \left(\frac{v_l^2}{g} \right) \int \tanh w \, dw \quad \text{en posant} \quad w = \frac{gt}{v_l}$$

Il vient, en intégrant :

$$x = \left(\frac{v_l^2}{g} \right) \ln \cosh w + \text{Cte} \quad \text{soit} \quad x = \left(\frac{v_l^2}{g} \right) \ln \cosh \left(\frac{gt}{v_l} \right)$$

puisque $x = 0$ lorsque $w = 0$. Ici aussi, on retrouve le cas de la chute libre sans frottement en faisant v_l infini :

$$x \approx \left(\frac{v_l^2}{g} \right) \ln \left(1 + \frac{g^2 t^2}{2v_l^2} \right) \approx \frac{gt^2}{2}$$

La boule de pétanque A_1 , plus lourde, atteint le sol la première, au bout de la durée τ_1 telle que :

$$h_1 = \left(\frac{v_{l,1}^2}{g} \right) \ln \cosh \left(\frac{g\tau_1}{v_{l,1}} \right) \quad \text{soit} \quad \tau_1 = \left(\frac{v_{l,1}}{g} \right) \arg \cosh \left(\frac{gh_1}{v_{l,1}^2} \right)$$

Sa vitesse v_1 est alors :

$$v_1 = v_{l,1} \tanh \left(\frac{g\tau_1}{v_{l,1}} \right)$$

La balle de tennis A_2 , plus légère, atteint, elle, le sol au bout d'une durée plus petite τ_2 , telle que :

$$\tau_2 = \left(\frac{v_{l,2}}{g} \right) \arg \cosh \left(\frac{gh_1}{v_{l,2}^2} \right) \quad \text{avec la vitesse} \quad v_2 = v_{l,2} \tanh \left(\frac{g\tau_2}{v_{l,2}} \right)$$

3. Sur la figure S10.1, on a tracé le graphe donnant, en fonction de h_1 , l'écart h en centimètre qui sépare les deux boules, lorsque la plus lourde touche le sol :

$$h = h_1 - h_2 \quad \text{avec} \quad h_2 = \left(\frac{v_{l,2}^2}{g} \right) \ln \cosh \left(\frac{g\tau_1}{v_{l,2}} \right)$$

On voit que l'écart h est faible, mais détectable à l'œil, même lorsque les balles sont abandonnées à hauteur d'homme. On peut y lire pour $h_1 = 2$ m, $h \approx 2$ cm.

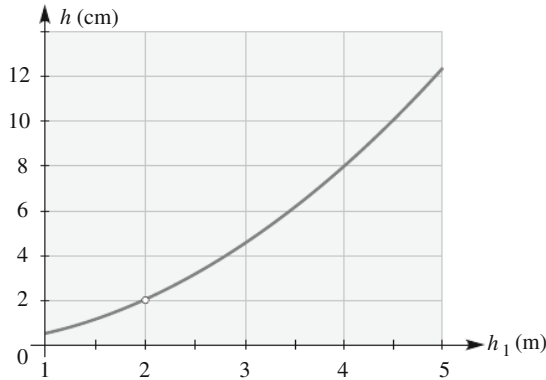


FIG. S10.1.

S10– 2. Effet de marée dans une cabine spatiale

1. La loi fondamentale de la dynamique newtonienne, appliquée à un point A , dans le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$, relatif à la cabine spatiale, s'écrit (cf. *Mécanique*) :

$$m\mathbf{a}_A^* = m[\mathcal{G}_T(A) - \mathcal{G}_T(C)] + \mathbf{F}_{oc}$$

$\mathbf{F}_{oc}$ étant la somme des forces autres que la gravitation (cf. chapitre 10).

2. La force maximale de marée qui s'exerce sur un cosmonaute, de masse $m = 75$ kg, est due à un effet différentiel du champ de gravitation terrestre. En différentiant GMm/r^2 on obtient :

$$-\frac{2GMm}{r^3} dr \quad \text{d'où} \quad m[\mathcal{G}(A) - \mathcal{G}(C)] \approx 2 \frac{mM_T}{(R_T + L)^3} L = 2,9 \times 10^{-6} \text{ N}$$

S10– 3. Effet de marée dans un amas de galaxies

1. Le champ de gravitation produit par l'amas galactique sphérique G_2 en un point de sa surface s'obtient aisément en appliquant le théorème de Gauss sur une surface sphérique, de centre C_2 et de rayon très voisin de R_2 (cf. *Mécanique*). On obtient :

$$4\pi R_2^2 \mathcal{G}_r = -4\pi G M_2 \quad \text{d'où} \quad \mathbf{G} = \mathcal{G}_r \mathbf{e}_r = -G \frac{M_2}{R_2^2} \mathbf{e}_r$$

Le signe moins exprime le caractère attractif de la gravitation.

2. La valeur maximale de la différence du champ de gravitation, produit par G_1 , en tout point de G_2 , s'obtient en différenciant le champ de gravitation GM_1/r^2 produit par G_1 . Elle vaut donc, selon un axe orienté vers G_1 :

$$2G \frac{M_1}{r^3} dr \approx 2G \frac{M_1}{d^3} R_2$$

3. La condition sur la distance d pour que l'effet de marée dans G_2 neutralise l'attraction gravitationnelle est :

$$-G \frac{M_2}{R_2^2} + 2G \frac{M_1}{d^3} R_2 = 0 \quad \text{soit} \quad d = R_2 \left(\frac{2M_1}{M_2} \right)^{1/3}$$

Pour $M_2 = 2 \times 10^3 M_1$, on trouve $d = R_2/10$.

S10– 4. Grandeurs fondamentales de Planck

1. On sait que :

$$G \approx 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \quad c \approx 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad h \approx 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

La dimension de G s'obtient aisément à partir de la loi d'attraction universelle de Newton, ou mieux à partir de l'énergie gravitationnelle $\mathcal{E}_{p,g} = -Gmm'/r$ de deux masses ponctuelles en interaction :

$$[G] = [E][L][M]^{-2} = [M][L]^2[T]^{-2}[L][M]^{-2} = [L]^3[M]^{-1}[T]^{-2}$$

2. Effectuons l'analyse dimensionnelle de Q_1 et Q_2 :

$$[Q]_1 = \left[\frac{hG}{c^3} \right] = \frac{[E][T] \times [E][L][M]^{-2}}{[L]^3[T]^{-3}} = \frac{[E]^2[T][L][M]^{-2}}{[L]^3[T]^{-3}} = \frac{([M][L]^2[T]^{-2})^2[T][L][M]^{-2}}{[L]^3[T]^{-3}} = [L]^2$$

$$[Q]_2 = \left[\frac{hc}{G} \right] = \frac{[E][T] \times [L][T]^{-1}}{[E][L][M]^{-2}} = \frac{1}{[M]^{-2}} (=) [M]^2 \quad \text{et} \quad [Q]_3 = \left[\frac{hc^5}{G} \right] = \frac{M^2 \times L^4}{T^{-4}} (=) E^2$$

3. On en déduit :

$$l_P = \left(\frac{hG}{c^3} \right)^{1/2} = 1,65 \times 10^{-35} \text{ m} \quad m_P = \left(\frac{hc}{G} \right)^{1/2} = 2,17 \times 10^{-8} \text{ kg}$$

et

$$\mathcal{E}_P = m_P c^2 = \left(\frac{hc^5}{G} \right)^{1/2} = 1,22 \times 10^{28} \text{ eV}$$

Par conséquent :

$$\tau_P = \frac{l_P}{c} = \left(\frac{hG}{c^5} \right)^{1/2} = 0,54 \times 10^{-43} \text{ s} \quad \text{et} \quad T_P = \frac{m_P c^2}{k_B} = 1,415 \times 10^{32} \text{ K}$$

La relation entre $\mathcal{E}_P$ et τ_P s'obtient en éliminant G . On trouve : $\mathcal{E}_P \times \tau_P = \hbar$.

4. L'énergie potentielle de gravitation d'une distribution sphérique de matière, de masse m_P et de rayon l_P est (cf. *Mécanique*) :

$$\mathcal{E}_{p,g} = -\frac{3}{5} \frac{Gm_P^2}{l_P} = -\frac{3}{5} \left(\frac{hc^5}{G} \right)^{1/2} = -\frac{3}{5} m_P \mathcal{E}_P$$

S10– 5. Mirages gravitationnels

1. La chemin L_c s'exprime aisément en fonction de D_c , b et $d_o = D_o - D_c$:

$$L_c = A_o I + IT = (d_o^2 + b^2)^{1/2} + (D_c^2 + b^2)^{1/2}$$

2. En revanche le calcul de L_S est plus laborieux :

$$L_S = r_S \int_{A_o IT} \frac{dr}{r} = r_S \int_{A_o I} \frac{dr}{r} + r_S \int_{IT} \frac{dr}{r}$$

Notons d'abord que $dr \approx dz$ en raison de la faiblesse des angles d'inclinaison, puisque $b \ll d_o$ et $b \ll D_c$.

En outre :

$$r = (z^2 + x^2)^{1/2} \quad \text{avec} \quad \frac{x}{b} + \frac{z}{D_c} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{x}{b} - \frac{z}{d_o} = 1$$

respectivement le long de IT et le long de $A_o I$. Il vient donc :

$$\int_{IT} \frac{dr}{r} \approx \int_0^{D_c} \frac{dz}{[z^2 + b^2(1 - z/D_c)^2]^{1/2}} \approx \int_0^{D_c} \frac{dz}{[z^2 - 2b^2 z/D_c + b^2]^{1/2}}$$

L'intégration donne :

$$\int_{IT} \frac{dr}{r} \approx \left\{ \ln \left[z - \frac{b^2}{D_c} + \left(\frac{z^2 - 2b^2 z}{D_c + b^2} \right)^{1/2} \right] \right\}_0^{D_c} \approx \ln \left(\frac{D_c}{b} \right) + \ln \left(1 - \frac{b}{D_c} \right)$$

De même :

$$\int_{A_o I} \frac{dr}{r} \approx \ln \left(\frac{d_o}{b} \right) + \ln \left(1 - \frac{b}{d_o} \right)$$

Par conséquent, en introduisant D tel que $1/D = 1/D_c + 1/d_o$, on obtient :

$$L_S = r_S \int_{A_o IT} \frac{dr}{r} \approx r_S \left[\ln \left(\frac{D_c}{b} \right) + \ln \left(1 - \frac{b}{D_c} \right) \right] + r_S \left[\ln \left(\frac{d_o}{b} \right) + \ln \left(1 - \frac{b}{d_o} \right) \right] = r_S \left[\ln \left(\frac{D_c d_o}{b^2} \right) - \frac{b}{D} \right]$$

3. Appliquons le principe de Fermat :

$$\frac{dL}{db} = 0 \quad \text{avec} \quad L = L_c + L_S \approx D_o + \frac{b^2}{2D} + r_S \left[\ln \left(\frac{D_c d_o}{b^2} \right) - \frac{b}{D} \right]$$

donne, puisque $b \ll D$:

$$\frac{b}{D} - \frac{2r_S}{b} \approx 0 \quad \text{soit} \quad b = (2r_S D)^{1/2}$$

On en déduit la déviation α :

$$|\alpha| = |\theta_i| + |\theta_o| \approx \frac{b}{D_c} - \frac{b}{d_o} = \frac{b}{D} = \frac{2r_S}{b} = \frac{\Lambda_m}{b} \quad \text{avec} \quad \Lambda_m = 2r_S$$

Ainsi, Λ_m , homogène à une longueur, est le double du rayon de Schwarzschild associé à cette masse. Pour un rayon lumineux passant près du bord de Jupiter, on trouve :

$$r_S = \frac{2GM_J}{c^2} = \frac{2 \times 6,67 \times 1,91}{9} = 2,83 \text{ m} \quad \text{d'où} \quad |\alpha| = \frac{2r_S}{b} = \frac{2 \times 2,83}{71,7} \times 10^{-6} = 0,078 \times 10^{-6}$$

soit 15,6 milliseconde d'arc.

S10– 6. Déviation de la lumière par le Soleil

1. L'angle de déviation du rayon lumineux passant à la distance $r = 1,4 \times 10^9$ m de S (deux fois le rayon du Soleil) est, puisque $1'' \approx 5 \mu\text{rad}$:

$$\theta = \frac{4GM_S}{rc^2} = 4,25 \times 10^{-6} \text{ rad} \quad \text{soit} \quad \theta = 0,85''$$

2. Tous les rayons lumineux parallèles situés à la distance r de S convergent au point F tel que $SM/SF = \theta$, M étant la projection de S sur la direction du rayon lumineux. On en déduit :

$$SF = \frac{r}{\theta} = \frac{r^2 c^2}{4GM_S} = \frac{1,4 \times 10^9}{4,25 \times 10^{-6}} = 0,33 \times 10^{15} \text{ m}$$

3. Le système se comporte comme une grande lentille convergente présentant une forte aberration de sphéricité, car la distance focale $SF = f$ varie avec la distance r (cf. *Optique*). Comme la focale f est proportionnelle à r^2 , on a :

$$\frac{\Delta f}{f} = 2 \frac{\Delta r}{r} \quad \text{d'où} \quad \Delta r \leq \frac{r}{2000} = 0,7 \times 10^6 \text{ m}$$

Ainsi, lorsque la distance SM varie entre $r - \Delta r/2$ et $r + \Delta r/2$, la focale reste invariable avec une précision relative de 0,001.

S10- 7. Décalage spectral gravitationnel d'une onde émise par le Soleil et détectée par la Terre

1. Le décalage spectral gravitationnel d'une raie émise par le Soleil est un décalage vers le rouge donné par l'expression :

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = -\frac{\Phi_S}{c^2} = \frac{GM_S}{R_S c^2} = 2,1 \times 10^{-6}$$

Par conséquent, pour la raie H_α , on a :

$$\Delta \lambda = 2,1 \times 10^{-6} \times 656,3 \approx 1,3 \times 10^{-3} \text{ nm}$$

2. Pour un observateur terrestre analysant la raie émise par le Soleil, le décalage spectral gravitationnel relatif est vers le bleu et de valeur :

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = -\frac{\Phi_T}{c^2} = \frac{GM_T}{R_T c^2} \approx 0,71 \times 10^{-9}$$

S10- 8. Loi d'Hubble et principe cosmologique

1. On a, d'après la loi d'Hubble : $c z_{31} = H d_{31}$ et $c z_{32} = H d_{32}$, soit, vectoriellement, les mouvements étant radiaux et les vitesses radiales égales à $\mathbf{v}_{1/3}$ et $\mathbf{v}_{2/3}$, respectivement :

$$\mathbf{v}_{1/3} = H \mathbf{r}_{31} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_{2/3} = H \mathbf{r}_{32} \quad \text{d'où par différence} \quad \mathbf{v}_{1/3} - \mathbf{v}_{2/3} = H \mathbf{r}_{21}$$

Comme la différence des vitesses représente la vitesse de G_1 par rapport à un référentiel lié à G_2 , on voit que la loi d'Hubble est vérifiée dans le mouvement de G_1 par rapport à G_2 .

2. La distance d_{12} s'obtient aisément :

$$d_{12} = \left(d_{32}^2 + d_{31}^2 \right)^{1/2} = 38,22 \times 10^{24} \text{ m} \quad \text{d'où} \quad z_{12} = \frac{H d_{12}}{c} = z_{3,1} \frac{d_{12}}{d_{31}} = 0,05 \frac{38,22}{9,18} = 0,21$$

S10- 9. Décalages spectraux cosmologiques

1. La distance, qui correspond à $z = 0,14$, est en Mpc (1 Mpc = $3,09 \times 10^{22}$ m) :

$$d = \frac{cz}{H} = \frac{c \times 0,14}{0,7 \times H_{100}} = 600 \text{ Mpc}$$

2. La distance du quasar double UM673 est :

$$d = \frac{cz}{H} = \frac{c \times 2,72}{0,7 \times H_{100}} = 11,66 \text{ Gpc} \quad \text{d'où} \quad D = \alpha d = 13,12 \text{ kpc}$$

S10– 10. Bilan énergétique d'une sphère matérielle de rayon R

1. L'application du premier principe de la thermodynamique à la sphère donne :

$$dU = \delta W = -p dV \quad \text{avec} \quad U = \rho c^2 V \quad \text{et} \quad V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Par conséquent :

$$\frac{d(4\pi R^3 \rho c^2)}{3 dt} = -4\pi R^2 \frac{dR}{dt} \quad \text{soit} \quad \frac{d(R^3 \rho c^2)}{dt} = -3p R^2 \frac{dR}{dt}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\frac{d[R^3(\rho c^2 + p)]}{dt} = R^3 \frac{dp}{dt} \quad \text{puisque} \quad \frac{d(R^3 p)}{dt} = R^3 \frac{dp}{dt} + 3p R^2 \frac{dR}{dt}$$

2. i) Pour $p \ll \rho c^2$, il vient :

$$\frac{d(R^3 \rho)}{dt} = 0 \quad \text{soit} \quad \rho R^3 = \text{Cte}$$

ii) Si $p = \rho c^2 / 3$, alors :

$$\frac{d(4R^3 \rho c^2)}{3 dt} = R^3 \frac{\dot{\rho} c^2}{3} \quad \text{soit} \quad 4R^3 \dot{\rho} + 12\rho R^2 \dot{R} = R^3 \dot{\rho}$$

On en déduit :

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} + 4 \frac{\dot{R}}{R} = 0 \quad \text{et} \quad \rho R^4 = \text{Cte}$$

Ainsi, lorsque la distance d'échelle augmente dans un rapport 10, on a, dans le premier cas, une diminution de la masse volumique dans un rapport 10^3 , alors que dans le second cette diminution s'effectue dans un rapport 10^4 .

S10– 11. Force associée à la constante cosmologique

1. Comme le potentiel gravitationnel est homogène au carré d'une vitesse, son laplacien est homogène lui à l'inverse du carré d'une durée. On en déduit, en SI, que Λ s'exprime en m^{-2} et Λc^2 en s^{-2} .

2. L'équation à laquelle satisfait le potentiel gravitationnel Φ s'écrit selon :

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G \rho r^2 - \Lambda c^2 r^2 \quad \text{d'où} \quad r^2 \frac{d\Phi}{dr} = \frac{4\pi G \rho r^3}{3} - \frac{\Lambda c^2 r^3}{3}$$

la constante d'intégration étant nulle, afin que l'égalité soit satisfaite pour $r = 0$. On en déduit le champ de gravitation, en un point intérieur de la distribution :

$$\mathcal{G}_r = -\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{4\pi G \rho r}{3} + \frac{\Lambda c^2 r}{3}$$

La première contribution est due à l'attraction gravitationnelle, la seconde traduit une répulsion cosmologique. En point extérieur de la distribution, on a :

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = -\Lambda c^2 r^2 \quad \text{d'où} \quad r^2 \frac{d\Phi}{dr} = \text{Cte} - \frac{\Lambda c^2 r^3}{3}$$

Le champ de gravitation, en un point extérieur, s'écrit donc :

$$\mathcal{G}_r = -\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{\text{Cte}}{r^2} + \frac{\Lambda c^2 r}{3}$$

En identifiant cette équation à celle obtenue en l'absence de Λ , on trouve évidemment $\text{Cte} = GM$.

3. Dans le cas du Soleil agissant sur la Terre, les deux contributions valent respectivement :

$$\frac{GM_S}{ST^2} \approx 6 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad \text{et} \quad \frac{\Lambda c^2 ST}{3} \approx 4,47 \times 10^{-25} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Elles sont égales à la distance r_c telle que :

$$\frac{GM_S}{r_c^2} = \frac{\Lambda c^2 r_c}{3} \quad \text{soit} \quad r_c = \left(\frac{3GM_S}{\Lambda c^2} \right)^{1/3} = 3,54 \times 10^{18} = 115 \text{ pc}$$

S10– 12. Paradoxe du ciel noir ou paradoxe d'Olbers

1. La densité volumique d'étoiles qui peuplent l'Univers a pour expression :

$$n_e = \frac{n_A}{N_A} = \frac{n_A}{M_s/m_p} = \frac{n_A m_p}{M_s} \quad \text{d'où} \quad n_e = \frac{5 \times 1,67 \times 10^{-27}}{2 \times 10^{30}} = 4,17 \times 10^{-57} \text{ m}^{-3}$$

car M_s/m_p représente approximativement le nombre de nucléons présents dans une étoile telle que le Soleil.

2. Calculons le libre parcours moyen d'un photon, ainsi que la durée moyenne τ qui sépare deux collisions d'un photon avec une étoile :

$$\ell = \frac{1}{n_e \pi R_e^2} = \frac{1}{4,17 \times 10^{-57} \times \pi \times 0,696^2 \times 10^{18}} = 0,15 \times 10^{39} \text{ m} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{\ell}{c} = \frac{0,15 \times 10^{39}}{3 \times 10^8} = 0,75 \times 10^{31} \text{ s}$$

ce qui donne en Gan :

$$\tau = \frac{0,75 \times 10^{31}}{3,156 \times 10^{16}} = 24 \times 10^{13} \text{ Gan}$$

Il en résulte que la durée nécessaire pour observer le rayonnement émis par toutes les étoiles, ce qui permettrait d'avoir une nuit totalement éclairée, est bien plus grande que la durée de l'Univers, puisque cette dernière est inférieure à 14 Gan. C'est donc la durée de vie limitée de l'Univers, et par conséquent celle des étoiles, qui permet de lever le paradoxe d'Olbers.

S10– 13. Matière noire dans une galaxie spirale

1. Appliquons la loi fondamentale de la dynamique à A , soumis à l'action de O , pour $r > R_n$, sachant que le mouvement est circulaire uniforme. Il vient, puisque la force de gravitation est celle entre deux points :

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_g \quad \text{d'où} \quad m \frac{v^2}{r} = \frac{GM_n m}{r^2} \quad \text{et} \quad v = \left(\frac{GM_n}{r} \right)^{1/2} = (GM_n)^{1/2} \frac{1}{r^{1/2}}$$

Pour $r < R_n$, le champ de gravitation est proportionnel à r . En effet, on a, d'après le théorème de Gauss appliqué à un système présentant la symétrie sphérique (cf. *Mécanique*) :

$$4\pi r^2 \mathcal{G}_r = -4\pi G \rho \times \frac{4\pi r^3}{3} \quad \text{d'où} \quad \mathcal{G}_r = -G \rho \times \frac{4\pi r}{3} = -G \frac{M_n}{R_n^3} r$$

La loi fondamentale de la dynamique donne, dans ce cas :

$$m \frac{v^2}{r} = m \frac{GM_n}{R_n^3} r \quad \text{d'où} \quad v = \left(\frac{GM_n}{R_n^3} \right)^{1/2} r$$

Ainsi, v croît d'abord proportionnellement à r , jusqu'à $r = R_n$, puis décroît en $1/r^{1/2}$.

2. On sait que le décalage spectral par effet Doppler-Fizeau a pour expression, lorsque la vitesse est faible devant c (cf. chapitre 3) :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{v}{c}$$

v étant la vitesse d'éloignement de la source. Il en résulte :

$$\Delta\lambda = \lambda \frac{v}{c} = 0,21 \times \frac{3,25 \times 10^5}{3 \times 10^8} = 0,2275 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Comme la masse du noyau est donnée par l'expression :

$$v_m = \left(\frac{GM_n}{R_n^3} \right)^{1/2} r \quad \text{avec} \quad r = R_n$$

il vient :

$$M_n = \frac{v_m^2 R_n}{G} = \frac{3,25^2 \times 10^{10} \times 3,46 \times 3 \times 10^{19}}{6,67 \times 10^{-11}} = 16,4 \times 10^{40} \text{ kg} \quad \text{d'où} \quad \frac{M_n}{M_\odot} = \frac{16,4 \times 10^{40}}{2 \times 10^{30}} = 82 \times 10^9$$

Ainsi, le noyau de cette galaxie contient environ 82 milliards d'étoiles telles que le Soleil.

3. La contradiction est évidente lorsque r dépasse la valeur maximale : la vitesse ne varie plus, alors que le modèle donne une vitesse qui décroît comme $1/r^{1/2}$. La matière gazeuse, dans laquelle se trouverait plongée la galaxie, est qualifiée de noire, car elle n'émet pas de rayonnement détecté.

S10– 14. Modèle d'Univers non stationnaire d'Einstein et de Sitter

1. Les deux équations, auxquelles satisfait le modèle d'Einstein et de Sitter, sont obtenues à partir de l'équation de Friedmann qui donne H^2 et de l'équation du bilan énergétique. En effet, en faisant $k = 0$, $p = 0$ et $\Lambda = 0$, on obtient :

$$H^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} \quad \text{et} \quad \frac{d(\rho c^2 R^3)}{dt} = 0 \quad \text{d'où} \quad \rho R^3 = \text{Cte}$$

2. Comme $\rho R^3 = \text{Cte}$, il vient :

$$\left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = R^2 \frac{8\pi G\rho}{3} = \frac{\text{Cte}}{R} \quad \text{d'où} \quad \frac{dR}{dt} = \text{Cte} \times R^{-1/2}$$

On en déduit l'équation différentielle :

$$R^{1/2} dR = \text{Cte} \times dt \quad \text{qui s'intègre selon} \quad R^{3/2} = \text{Cte} \times t$$

si, à $t = 0$, $R = 0$. On trouve bien une loi de variation de $R(t)$ en $t^{2/3}$:

$$R(t) = C_{EdS} \times t^{2/3}$$

C_{EdS} étant une constante.

3. Calculons le facteur de décélération q . Comme :

$$\text{Comme} \quad \frac{dR}{dt} = \frac{2}{3} C_{EdS} t^{-1/3} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{2}{9} C_{EdS} t^{-4/3} \quad \text{il vient} \quad q = -\frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2} = \frac{t^{2/3} 2At^{-4/3}/9}{4t^{-2/3}/9} = 0,5$$

4. On en déduit alors $H(t)$ selon :

$$H(t) = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{2t^{-1/3}/3}{t^{2/3}} = \frac{2}{3t}$$

S10– 15. Modèle de Weinberg de l'expansion primordiale

1. L'équation de Friedmann-Lemaître :

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G \rho R^2}{3} = \frac{8\pi G \rho R^2}{3c^2} \rho c^2 = \frac{8\pi G R^2}{3c^2} \frac{A}{R^4} = \frac{8\pi G A}{3c^2 R^2}$$

donne :

$$\dot{R} = \frac{\text{Cte}}{R} \quad \text{soit} \quad R \, dR = \text{Cte} \times dt \quad \text{avec} \quad \text{Cte} = \left(\frac{8\pi G A}{3c^2} \right)^{1/2}$$

Il vient, en intégrant, en supposant que $R = 0$ à $t = 0$:

$$\frac{R^2}{2} = \text{Cte} \times t \quad \text{et} \quad R = C_W \times t^{1/2} \quad \text{avec} \quad C_W = \left(\frac{32\pi G A}{3c^2} \right)^{1/4}$$

2. Comme w est aussi égal à $\sigma_B T^4$, on en déduit :

$$T = \left(\frac{A}{\sigma_B} \right)^{1/4} \frac{1}{R} \quad \text{et} \quad T = \left(\frac{A}{\sigma_B C_W^4} \right)^{1/4} t^{-1/2} = \left(\frac{3c^2}{32\pi G \sigma_B} \right)^{1/4} t^{-1/2}$$

3. Dans ce modèle, la température de l'Univers peut être calculée puisque le coefficient $C_{W,T}$ est déterminé uniquement par des constantes physiques fondamentales. On obtient, numériquement :

$$T = 1,52 \times 10^{10} \times t^{-1/2}$$

Pour $t = 0,01$ s et $t = 180$ s, on trouve respectivement : $T_1 = 0,15 \times 10^{12}$ K et $T_{180} = 1,1 \times 10^9$ K.

Bibliographie

- J.-P. AUFFRAY, *Einstein et Poincaré*, Éditions Le Pommier, 1999
- W. BERTOZZI, *Speed and kinetic energy of relativistic electrons*, Am. J. of Phys., Vol.32, 551, 1964
- BIPM, *Le système international d'unités*, Bureau International des Poids et Mesures, 8^e édition, 2006
- L. BRILLOUIN, *Les tenseurs en mécanique et en élasticité*, Masson, 1938
- A. COMPTON, *The spectrum of scattering X-rays*, Phys. Rev. Vol. 22, Number 5, 409, 1923
- T. DAMOUR, *Poincaré, Relativity, Billiards and Symmetry*, Solvay symposium on Henri Poincaré, ULB, Brussels, octobre 2004
- J.Y. DANIEL et al., *Sciences de la Terre et de l'Univers*, Vuibert, 1999
- P. DIRAC, *L'équation d'onde relativiste de l'électron*, Proceedings of the Royal Society, A, vol 117, p. 610, 1928 (traduction dans *Sources et évolution de la physique quantique* de J. Leite Lopes et B. Es-coubès, Masson, 1994).
- E. DURAND, *Électrostatique et magnétostatique*, Masson, p. 627, 1953
- J. EISENSTAEDT, *Einstein et la relativité générale*, CNRS Editions, Paris, 2002
- A. EINSTEIN, *Sur l'électrodynamique des corps en mouvement*, Annalen der Physik, Vol. 17, p. 891, 30 juin 1905
- A. EINSTEIN, *L'inertie d'un corps dépend-elle de son contenu en énergie*, Annalen der Physik, Vol. 18, p. 639, 1905
- A. EINSTEIN, *De l'influence de la pesanteur sur la propagation de la lumière*, Annalen der Physik, Vol. 35, p. 898, 1911
- A. EINSTEIN, *Les fondements de la théorie de la relativité générale*, Annalen der Physik, vol. 49, p. 769, 1916
- H. FIZEAU, *Sur les hypothèses relatives à l'éther lumineux*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, p. 349, 1851
- A.P. FRENCH, *Special Relativity*, Norton & Company, New York, 1968
- D. FRISCH, J. SMITH, *Measurement of the Relativistic Time Dilatation Using μ -Mesons*, Am. J.Phys. 31, 342, 1963
- J. HAFELE, R. KEATING, *Around the world atomic clocks : predicted relativistic time gains*, Science, vol. 117, 166-167, 1972
- S. HAWKING, *Sur les épaules des géants*, Paris, Dunod, 2003

- J. HLADIK et P. E. HLADIK, *Le calcul tensoriel en physique*, 3^e édition, Dunod, 1999
- M. HOBSON, G. EFSTATHIOU et A. LASENBY, *Relativité générale*, De Boeck, 2010
- H. IVES, G. STILWELL, *An experimental study of the rate of a moving atomic clock*, J. Opt. Soc. Am., Volume 28, Number 7, 215-226, 1938
- J.D. JACKSON, *Classical electrodynamics*, John Wiley, 3^e édition, 1999. Trad. française Dunod, 2001
- I. KENYON, *General Relativity*, Oxford University Press, 1994
- T. LAHAYE, P. LABASTIE, R. MATHEVET, *Fizeau's « aether-drag » experiment in the undergraduate laboratory*, Am. J. Phys., 80 (6), 2012
- LAROUSSE, *Inventeurs et scientifiques*, 1994
- L. LANDAU, *Journal of Physics*, Vol. VIII, n° 4, 1944
- L. LANDAU, E. LIFCHITZ, *Théorie des Champs*, Editions Mir, 1970
- A. LANNES, J.-Ph. PÉREZ, *Optique de Fourier en Microscopie Électronique*, Masson, 1983
- J.-M. LEVY-LEBLOND et J.P. PROVOST, *Additivity, Rapidity, Relativity*, Am. J. Phys. 47 (12), 1979
- J.-M. LEVY-LEBLOND, *Did the Big Bang begin ?*, Am. J. Phys., 58 (2), pp.156-159, 1990
- H.-A LORENTZ, *The theory of electrons and its applications to the phenomena of light and radiant heat*, Course of Lectures delivered in Columbia University, New-York, 1906, Éditions Jacques Gabay, 1992
- E. MACH, *La mécanique, exposé historique et critique de son développement*, 1903, Éditions Jacques Gabay, 1987
- J. C. MATHER et al., *A preliminary measurement of the cosmic microwave background spectrum by the COBE satellite*, The Astrophysical Journal, 354, L37, 1990
- A. MICHELSON, E. MORLEY, *On the relative motion of the Earth and the Luminiferous aether*, Phil. Mag. S. 5, Vol. 24, 151, p. 449, 1887
- I. MILLS, T. CVITAS, *Quantities, Units and Symbols in Physical Chemistry*, Blackwell Scientific publications, 1993
- C. MISNER, K. THORNE, J. WHEELER, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, 1973
- C. MØLLER, *The process of electron-electron scattering*, Annalen der Physik, 406, 531, 1932
- L. MOTZ and J. WEAVER, *The story of physics*, Plenum Press, 1991
- H. MÜLLER et al., *Modern Michelson-Morley experiment using cryogenic optical resonators*, Phys. Rev. Lett. 91, 2003
- J. NARLIKAR, *Introduction to cosmology*, Cambridge University Press, 1993
- L. OKUN, *The concept of mass*, Physics Today, Juin 1989
- A. PAIS, *Albert Einstein, la vie et l'œuvre*, InterEditions, 1993
- J.-Ph. PÉREZ, *Thèse : Pertes d'énergie des électrons en microscopie électronique à très haute tension*, Toulouse, 1976
- J.-Ph. PÉREZ, R. CARLES et R. FLECKINGER, *Électromagnétisme, Fondements et applications, avec 300 exercices et problèmes résolus*, Dunod, 2009

- J.-Ph. PÉREZ, *Mécanique, Fondements et applications, avec 300 exercices et problèmes résolus*, Dunod, 2014
- J.-Ph. PÉREZ, *Optique, Fondements et applications, avec 250 exercices et problèmes résolus*, Dunod, 2011
- J.-Ph. PÉREZ, R. CARLES et O. PUJOL, *Quantique, fondements et applications avec 250 exercices et problèmes résolus*, De Boeck, 2013
- J.-Ph. PÉREZ et O. PUJOL, *Two often disregarded aspects of Foucault's pendulum*, Eur. J. Phys., 36, 13 pp., 2015
- J.-Ph. PÉREZ, *Redshift formulas and the Doppler-Fizeau effect*, Eur. J. Phys., **37**, 2016
- H. POINCARÉ, *La Science et l'Hypothèse*, Flammarion 1902, réédition par les Éditions de la Bohême en 1992
- H. POINCARÉ, *L'état actuel et avenir de la physique mathématique*, Bulletin des Sciences Mathématiques, Tome 28, p. 302, 1904
- H. POINCARÉ, *Sur la dynamique de l'électron*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Tome 23, p. 1504, Juin 1905
- H. POINCARÉ, *La Valeur de la Science*, Flammarion 1902, 1912
- H. POINCARÉ, *La mécanique nouvelle*, Éditions Jacques Gabay, 1989 (Gauthier-Villars 1924).
- R. POUND and G. REBKA, *Gravitational red-shift in nuclear resonance*, Phys. Rev. Letters, Vol. 3, Number 9, 439-441, 1959
- O. PUJOL, C. LAGOUTE et J.-Ph. PÉREZ, *Weight, gravitation, inertia and tides*, Eur. J. Phys., 36, 12 pp., 2015
- W. RINDLER, *Essential Relativity*, Springer-Verlag, 1997
- J. ROHLF, *Modern Physics*, J. Wiley, 1994
- P.G. ROLL, R. KROTKOV, et R.H. DICKE, *The Equivalence of Inertial and Passive Gravitational Mass*, Annals of Physics, 26, 442-517, 1964
- M. ROOS, *Introduction to Cosmology*, J. Wiley, 1997
- B. ROSSI and D. HALL, *Variation of the rate of Decay of Mesotrons with momentum*, Physical Review, Vol. 59, number 3, 223-228, 1941
- A. ROUSSET, *Des physiciens de A à Z*, Ellipses, 2000
- J. SCHWINGER, *L'héritage d'Einstein*, Pour La Science, Belin, 1988
- E. SEGRÈ, *Les Physiciens Modernes et leurs Découvertes*, Fayard, 1984
- E. TAYLOR et J. WHEELER, *Spacetime physics*, Freeman, 1992
- J.P. UZAN et R. LEHOUC, *Les constantes fondamentales*, Belin, p. 488, 2005
- S. WEINBERG, *Gravitation and cosmology*, Wiley, 1972.

Index

- aberration
 - de l'émission lumineuse, 60
 - des étoiles, 72, 82
- absorption, 160
 - (Émission et), 157
 - résonnante, 159
- accélérateur linéaire, 116
- accélération de l'expansion, 273
- accélération(s)
 - (Quadivecteur), 76
 - (Transformation des), 74
- Anderson, 157, 197
- anisotrope (Rayonnement), 73
- anneau(x)
 - d'Einstein, 260
 - de stockage, 164
- année-lumière, 265
- antiproton (Paire proton-), 165
- Arago, x, 5
- avance du périhélie de Mercure, 255
- Becquerel, x, 178
- becquerel, 182
- Bethe, x, 189, 206, 211
- big bang, 268, 271
- bombe
 - A, 149
 - H, 150
 - N, 150
- boulet (Expérience du), 4
- Bradley, 60
- Brillance, 269
- cabine spatiale (Impesanteur dans une), 242
- canon de microscope électronique, 92
- capture (Réaction générale de), 185
- centre de masse (Référentiel du), 139
- Cerenkov, 190
- Chadwick, 173
- chaînette, 112
- chambre
 - à brouillard de Wilson, 197
 - à bulles, 197
 - à étincelles, 198
 - multifils, 198
- champ(s), 222
 - électromagnétique, 227
 - (Invariants associés au), 224
 - (Tenseur), 230
 - (Transformation du), 11
 - magnétique (Focalisation par un), 122
- charge électrique, 218, 219
- Charpak, 197, 198
- cible
 - au repos, 150
 - en mouvement, 152, 168
- COBE, 268
- Cockroft, 177
- coefficient
 - d'absorption, 191
 - d'Hubble, 266
- cohésion du noyau, 174
- collision(s)
 - avec photons, 154
 - élastique symétrique, 162
 - élastiques, 137, 141, 142
 - inélastiques, 138, 147
 - (Propriétés générales des), 136
- collisionneur, 152
- comobile, 270
- composantes d'un vecteur
 - contravariantes, 297
 - covariantes, 297
- compteur à fil de Geiger-Muller, 198
- Compton, xi
- Compton (Effet), 155, 167
- cône de lumière, 28
- confinement magnétique, 123, 325
- conforme (temps), 271
- conservatif (Caractère), 219

- conservation
 - de l'énergie, 91, 137
 - de la quantité de mouvement, 136
 - du moment cinétique, 89
- constante cosmologique, 271, 273
- constante de structure fine, 276
- contraction des longueurs, 51
- correction de relativité générale, 262
- cosmique (temps), 270
- cosmologie, 264
- courbure de l'espace-temps, 247
- Cowan, 184
- curie, 182
- Curie (Irène), 157
 - (Marie), xi, 178
 - (Pierre), 178
- cyclotron, 116
 - (Pulsation), 113
- dalembertien, 18
- datation par radioactivité, 187
- décalage spectral, 58, 261, 264, 267
- déchets, 203
- défaut de la somme des masses, 138, 149
- dérivée covariante d'un vecteur, 300
- désintégration
 - (Constante de), 179
 - radioactive, 179
- deutérium, 137
- deuton, 137
- déviation
 - des rayons lumineux, 257
 - électrique, 118
 - magnétique, 119
- Dicke (Expérience de), 242
- diffusion inélastique, 153
- dilatation (des durées), 42
- Dirac, xi, 157
- distance d'échelle, 270
- Doppler-Fizeau (Effet), 19, 56
- durée(s)
 - de Planck, 285
 - de vie, 45
 - de l'Univers, 268
- (Dilatation des), 42
- (Mesure des durées et des longueurs), 40
- propre, 42, 70
- (Relativité de la), 44
- eau lourde, 202
- effet
 - Cerenkov, 190
 - Compton, 155, 167
 - Doppler-Fizeau, 19, 56
 - longitudinal, 57
 - transversal, 59
 - Mössbauer, 160, 263
 - photo-électrique, 154
- effets biologiques
 - de la radioactivité, 187
- effondrement gravitationnel, 206
- égalité des masses inerte et grave, 240
- Einstein, xi, 14, 93, 249, 260
- élastiques (Collisions), 137, 141, 142
- électrique (Particule dans un champ), 108
- émission, 160
 - de lumière par des objets en mouvement, 73
 - et absorption, 157
- énergie, 96, 166
 - cinétique, 89
 - (Théorème de l'), 90
 - (Conservation de l'), 91
 - de liaison
 - d'un noyau atomique, 176
 - d'une réaction, 199
 - de masse, 90
 - de Planck, 285
 - libérée par la réaction, 199
 - noire, 274, 275
 - (Perte d'), 145
 - sombre, 273
 - (Théorème de l'), 91
 - totale (Conservation de l'), 137
- Eötvös (Expérience d'), 242
- équation(s)
 - de Maxwell, 11, 216
 - de Maxwell-Ampère, 18
 - de Maxwell-Faraday, 18
- équivalence masse-énergie, 138
- espace-temps, 28, 248
 - (courbure de l'), 247
 - (Diagramme d'), 33
 - (Forme métrique de l'), 32
 - (géodésique de l'), 248
 - (trajectoire dans l'), 248
- éther, 6
- étoiles (Aberration des), 72

- événement, 1
- expansion (temps d'), 271
- expansion de l'Univers, 267
- expérience(s), 15
 - d'Eötvos et de Dicke, 242
 - de Fizeau, 6, 74
 - de Kaufmann, 14
 - de Michelson, 7
 - du boulet, 4
 - du tube de Newton, 240
 - Pound et Rebka, 263
- facteur
 - d'échelle, 269
 - de courbure, 270
 - de dilatation ou d'expansion, 269
- Fermi, 202
- fermi, 172
- filiations radioactives, 186
- filtrage magnétique, 130
- filtre de Wien, 122, 237
- fission d'un noyau lourd, 149
- Fizeau, xii
 - (Expérience de), 6, 74
- focalisation
 - axiale par un champ magnétique, 122
 - par un champ électrique, 120
 - radiale par un champ magnétique, 121, 135
- formalisme quadridimensionnel, 31, 72
- forte interaction, 174
- Fresnel, xii, 5
- Fresnel (Facteur d'entraînement de), 83
- Friedmann, 271
- Frisch, 200
- fusée, 77, 171
- fusion
 - chaude, 178
 - froide, 178, 205
 - nucléaire, 205
 - dans les étoiles, 206
- Galilée, xii
 - (Transformation de), 2
- galiléen (Référentiel), 1
- Gamow, xii, 177, 268
- Geiger, 198
- Geiger-Muller (Compteur à fil de), 198
- Gell-Mann, 194
- genre
 - espace, 27, 30
 - lumière, 27, 28
 - temps, 27, 30
- géodésique
 - de l'espace-temps, 248, 302, 304
 - sur une variété, 302
- Glaser, 197
- Glashow, 196
- gluon, 195
- goutte liquide, 200
- GPS, 47, 262
- gray, 187
- hélium, 137
- hadrons, 193
- Hahn, 200
- Hamilton, xiii
- hamiltonien d'une particule charge rapide, 232
- hélium, 137
- horloges
 - mobiles, 43
 - (Ralentissement d'), 50, 78
- Hubble, xiii
 - (coefficient d'), 266
- Hulse, 277
- Huygens, 17
- impesanteur dans une cabine spatiale, 242
- indice en optique
 - corpusculaire, 118
 - électronique, 129
- inélastique(s)
 - (Collisions), 138, 147
 - (Diffusion), 153
- inertie, 17, 93
- interaction(s)
 - entre deux particules chargées, 229
 - fondamentales, 193
 - forte, 174
- intervalle, 27
 - élémentaire, 28
- invariance, 218
 - de la forme des lois de la physique, 244
- invariants
 - du champ électromagnétique, 224, 236
- isomères, 174
- isotopes, 174
- Ives, 59

- Joliot, 157, 185
- jumeaux de Langevin (Paradoxe des), 48, 66
- Kaufmann (Expérience de), 14
- Kepler (Problème de), 96
- lagrangien d'une particule charge rapide, 231
- Langevin (Paradoxe des jumeaux de), 48, 66
- Larmor (pulsation de), 115
- Lawrence, 116, 133
- Lemaître, 267
- Lemaître, xiii
- leptons, 193, 195
- LHC, 153
- liaison par nucléon (Énergie de), 177
- ligne d'Univers, 2
- linéarité, 22
- localisation (Relativité de la), 42
- Loi de Lemaître-Hubble, 268
- lois de la physique (invariance de la forme des), 244
- longitudinal(e)
 - (Effet Doppler-Fizeau), 57
 - (Masse), 88
- longueur(s)
 - (Contraction des), 51
 - de Planck, 285
 - (Mesure des durées et des), 40
 - propre, 51
- Lorentz, xiii, 10
- Lorentz-Poincaré (Transformation de), 13
- lumière, 11
 - (Cône de), 28
 - (vitesse de la), 70, 217
- luminance spectrale, 268
- masse(s), 96, 138, 166
 - d'un système
 - d'électrons, 104
 - de deux photons, 105
 - de Planck, 285
 - grave, 240
 - inerte, 85
 - longitudinale, 88
 - transversale, 88
- matière noire, 276
- Maxwell, xiv, 1
 - (Équations de), 11
- Meitner, 200
- Mercure (Trajectoire de), 99, 255
- mésos, 148
- mesure des durées et des longueurs, 40
- métrique, 28, 299
 - de Robertson-Walker, 269
 - de Schwarzschild, 250
 - FLRW, 269
- Michelson, xiv
 - (Expérience de), 7
- microscopie électronique, 92, 124
- Minkowski, xiv, 33
- mirages gravitationnels, 259
- modèle de Friedmann-Lemaître, 271, 273
- modérateur, 202
- moindre action, 233
- moment cinétique, 88
- Mössbauer
 - (Effet), 160, 263
 - (Spectrométrie), 161
- Muller, 198
- muons, 45
- nabla (quadriopérateur), 217
- neutrino (antineutrino), 26, 148, 184
- neutron, 137
- Newton, xiv, 1
 - (Expérience du tube de), 240
- niveaux d'énergie d'un noyau, 176
- noyau(x), 172
 - (Cohésion du), 174
 - (Constituant du), 173
 - (Demi-vie du), 181
 - (Stabilité des), 175
 - superlourds, 177
 - (Taille d'un), 172
- Olbers, 428
- onde (quadrivecteur d'), 57
- oscillateur, 105
- paire
 - électron-positron, 157
 - proton-antiproton, 165
- paradoxe
 - de la barre et de l'ouverture, 53
 - des jumeaux de Langevin, 48, 66
- parsec, 265

- particule(s)
 - dans un champ électrique, 108
 - dans un champ magnétique, 112
 - de masse
 - non nulle, 94
 - nulle, 95
 - en mouvement rectiligne uniforme, 220, 227
 - fondamentales, 193
- Pauli, 184
- pentaquark, 195
- Penzias, 268
- périhélie de Mercure (Avance du), 255
- perte(s) d'énergie, 145, 164
 - par ionisation, 189
 - par rayonnement de freinage, 190
- photons (Collisions avec), 154
- Planck (grandeur de), 285
- Poincaré, xv, 13, 14
- point d'Univers, 2
- Poisson (Loi statistique de), 180
- positron, 148
- potentiel (Transformation du), 219
- principe, 17, 233
 - d'Hamilton, 232
 - de relativité, 14
 - de relativité générale, 247
- prisme magnétique, 126, 134
- propagation du son, 18
- propre
 - (Durée), 42, 70
 - (Longueur), 51
 - (Référentiel), 42, 51
- propriété(s)
 - focalisantes des champs, 120
 - générales des collisions, 136
- proton, 137
- pulsar, 277
- pulsation
 - cyclotron, 113
 - de Larmor, 115
- quadriaccélération dans le référentiel propre, 77
- quadrimensionnel (Formalisme), 72
- quadriopérateur nabla, 217
- quadrivecteur, 31
 - accélération, 76
 - d'onde, 57
 - force, 99
 - quantité de mouvement-énergie, 85
 - source, 219
 - vitesse, 71
- quantité de mouvement
 - (Conservation de la), 136
 - énergie (Quadrivecteur), 85
- quarks, 194
- quasars, 58
- radioactivité, 178
 - α , 182
 - β^+ , 185
 - β^- , 183
 - γ , 184
 - (Datation par la), 187
- radionavigation, 46
- ralentissement
 - d'horloges, 50
 - des horloges mobiles, 78
- rapidité(s), 24, 70
- rayon de Schwarzschild, 251
- rayonnement du fond cosmologique, 268
- réacteurs
 - à fission nucléaire, 204
 - à fusion nucléaire, 205
- réaction (Énergie libérée par la), 199
- réciprocité, 22
- redshift, (voir décalage spectral)
- référentiel(s)
 - du centre de masse, 139
 - inertiels, 246
 - naturels, 246
 - propre, 42, 51
 - (Quadriaccélération dans le référentiel propre), 77
- Reines, 184
- relation entre quantité de mouvement et énergie, 94
- relativité
 - de la durée, 44
 - de la localisation, 42
 - de la simultanéité, 42
 - newtonienne, 1
 - (Principe de), 14
 - restreinte, 46

- rigidité magnétique, 115, 130
- Robertson-Walker (métrique de), 269
- Roemer, 17
- Rubbia, 196, 207
- rubbiatron, 207
- Rutherford, xv

- Salam, 196
- Schwarzschild
 - (Métrique de), 250
 - (Rayon de), 251
- seuil énergétique, 150
- sievert, 187
- simulation en relativité, 305
- simultanéité, 40, 41
 - (Relativité de la), 42
- son (Propagation du), 18
- spectrométrie Mössbauer, 161
- stabilité des noyaux, 175
- Stilwell, 59
- Strassmann, 200
- supersynchrotron à protons du CERN, 132
- supraluminiques (Vitesses), 25
- symétrique (Collision élastique), 162
- synchronisation des horloges, 41
- synchrotron à protons Saturne de Saclay, 131
- système d'unités, 284
- système de particules, 96, 166
- Système International, 286

- taille d'un noyau, 172
- Taylor, 277
- temps conforme, 271
- temps cosmique, 270
- temps d'expansion, 271
- tenseur(s), 294
 - champ électromagnétique, 230
 - en physique, 292
- théorème de l'énergie, 91
 - cinétique, 90
- thorium, 207
- traceurs radioactifs, 188

- transformation
 - de Galilée, 2
 - de la charge volumique, 218
 - de Lorentz-Poincaré, 13, 23
 - des accélérations, 74
 - des forces, 99
 - des vitesses, 68
 - du champ
 - électrique, 223
 - électromagnétique, 11, 223
 - magnétique, 222
 - du potentiel, 219
 - einsteinienne des champs, 222
 - galiléenne des champs, 225
 - réciproque de masse en énergie, 148
- transport parallèle, 302
- transversal(e)
 - (Effet Doppler-Fizeau), 59
 - (Masse), 88
- tritium, 137
- triton, 137
- trou noir, 251
- tube de Newton (Expérience du), 240
- tumulus, 203

- unité de masse atomique, 137
- Univers, 2
 - durée de vie de l', 268
 - (expansion de l'), 267
 - (Point d'), 2
- universalité, 16

- variété, 294
- vitesse(s)
 - de la lumière, 70
 - (Quadrivecteur), 71
 - supraluminiques, 25
 - (Transformation des), 68
- Voie Lactée, 265
- Voigt, 10
- voyage intersidéral, 65

- Walton, 177
- Weinberg, 196
- Wien (Filtre de), 122, 237
- Wilson, 197, 268
 - (Chambre à brouillard de), 197
- Zweig, 194